Un exemple de processus de mathématisation : L'Addition dans les naturels : C.P. - C.E.1

"En aviation, quand une pièce casse il faut chercher le truc pour soulager la fatigue, ou supprimer la pièce, ou changer le pilote... plus on renforce plus on casse."

A. ODIER
(Souvenir d'une vieille tige. A. FAYARD).

J'ai toujours essayé de suivre, en enseignement des mathématiques, le conseil de cette "vieille tige". Car une méthode pédagogique s'apprécie comme un avion à sa légèreté, à son économie, à sa finesse.

D'ailleurs les dernières années évoquent irrésistiblement pour moi la naissance de l'auto, de l'aviation ou de la radio. J'y perçois la même ambiance de liberté et de facilité, le même foisonnement d'idées ingénieuses ou naïves, pratiques ou folles. On y voit les mêmes chercheurs de génie, les mêmes inventeurs souvent autodidactes, les mêmes ingénieurs audacieux bricolant avec des moyens réduits face au même enthousiasme et à la même muflerie des foules, à la même incompréhension de l'administration, face à la même insolente suffisance de certains pontifes abusant de leur prestige, face à l'héroïque et obstiné soutien d'autres. J'y vois aussi le même grouillement de mercantis et de prophètes...

Les méthodes nouvelles résultent de la combinaison de nombreux progrès et d'importants changements de points de vue dans des domaines très divers. On n'optimise pas du premier coup sur un tel champ de variation. Ces méthodes se ressemblent à peu près autant entre elles que ls premières "cages à poules" : l'essentiel des solutions possibles y est probablement contenu en germe. Mais il est trop tôt pour démêler des procédés que l'avenir retiendra de chacune, trop tôt aussi pour les éprouver et les juger en bloc.

Les novateurs se sont surtout jusqu'à présent préoccupés d'améliorer l'apprentissage du *raisonnement* qui était certainement la partie la plus défectueuse des méthodes classiques, et un peu l'étude précoce des *structures mathématiques.* Je veux montrer avant la fin de l'année que d'importants gains de temps et de qualité peuvent être réalisés sur l'enseignement du *calcul* numérique (et sur celui du calcul logique). J'ai la conviction, étayée par mes expériences personnelles, que nous pourrons alors renouveler radicalement *l'application des connaissances mathématiques* et l'étude des problèmes pratiques de toutes sortes. En particulier je crois possible de banaliser le raisonnement probabiliste et les problèmes linéaires d'optimisation aussi bien que ceux de logique élémentaire.

L'emploi précoce et familier d'une formalisation efficace m'a paru être une des clés du problème de l'enseignement de l'algèbre, de l'arithmétique et de la logique. Il m'a semblé que l'on pouvait gagner là plusieurs années si l'on arrivait à comprendre comment pouvait s'opérer l'acquisition d'un langage formel, la création d'une syntaxe, l'accroissement ou la reprise d'un répertoire.

C'est au cours des deux première années de scolarité que la question décisive de savoir si l'enfant disposera, à l'école primaire, d'une écriture mathématique, est tranchée et l'on ne peut faire de pari intéressant en enseignement élémentaire sans l'avoir d'abord en partie résolue.

C'est une question difficile. C'est pourquoi depuis dix ans les travaux portent essentiellement sur ces deux premiers cours (CP - CE). Mais c'est aussi pourquoi nous pouvons maintenant espérer de nouveaux progrès dans les années qui viennent.

Pour illustrer ces propos et afin de pouvoir faire d'utiles comparaisons, j'ai choisi de résumer ici une série de leçons relatives à un sujet classique : addition des naturels.

Ces leçons, comme la plupart de celles que je conçois à l'heure actuelle, sont étayées par un ensemble d'hypothèses sur le processus de mathématisation que j'ai exposées en mai 1970 aux journées de l'A.P.M. de Clermont-Ferrand.

Définitions traditionnelles et définitions actuelles de l'addition des naturels

Dans la méthode traditionnelle, on introduisait directement des assemblages de signes, tels que "3 + 4 = 7", c'est-à-dire des relations entre naturels. Ces assemblages ne traduisaient pas des énoncés, c'est-à-dire des constatations, mais un certain algorithme. L'apprentissage consistait dans l'association répétée de l'algorithme et de l'écriture. Le rôle des signes "+" et "=" était appris par habitude et leur signification par une traduction dans la langue ordinaire. Les naturels n'étaient donc pas construits d'après une signification mais présentés axiomatiquement. C'étaient des "choses" qu'on ne montrait pas mais qui vérifiaient toutes les relations écrites.

Ce procédé était raisonnable lorsqu'on a choisi la théorie des naturels comme théorie pédagogique primitive. Cependant, après échec avéré des méthodes dogmatiques, les pédagogues se sont lancés, par réaction, dans les méthodes actives. Un reste de platonicisme sous-tendait toutefois les théories dont on s'inspirait pour effectuer le passage de l'action à la traduction symbolique. Il s'ensuivit un goût souvent exagéré pour le concret et des erreurs grossières dans l'emploi du matériel et dans la recherche des situations favorables à la mathématisation (par exemple l'emploi des "constellations" pour l'étude des naturels supérieurs à 6). Pour que le sens du naturel se développe chez lui, il fallait que l'enfant concrétise l'algorithme désigné, qu'il compte et recompte ses doigts, des pommes, des bâtons, etc... Si l'abstraction ne se produisait pas, l'enfant se noyait dans le concret : n'ayant qu'un langage, il confondait le naturel et les collections manipulées.

Nous avons fait un choix différent : pour parler des objets physiques et des collections qu'il manipule, nous avons introduit le langage de la théorie des ensembles ou plutôt son écriture formelle. Celle-ci a été obtenue directement et non comme traduction de phrases en langue usuelle. Elle est utilisée simplement pour la désignation.

Dans ces conditions, le naturel peut être construit par des classifications d'ensembles. Les ensembles d'ensembles doivent être à leur tour désignés. Nous verrons comment divers procédés de désignation sont successivement construits par les enfants suivant leurs progrès.

Ces procédés de désignation, au fur et à mesure de la découverte des naturels et de leurs relations, vont constituer un véritable modèle de la manipulation des collections d'objets physiques. Ce modèle sera créé et utilisé par l'enfant comme un langage par un travail sémantique et un travail syntaxique, puis repris dans une véritable construction axiomatique. Les leçons que nous décrivons plus précisément illustrent ces trois points.

A Désignation des nombres - Travail sémantique

1 Rappel.

Dans la classe un cardinal est interprété par une grande boîte où l'on a placé certains ensembles en classant des collections de petits objets ou des dessins les représentant. Suivant les connaissances des enfants, certaines boîtes ont reçu un signe : 11, 9, 8, 6, 3, 4, 2 ; d'autres n'ont pas de signes, par exemple, celle que les adultes appelleraient 14, bien qu'elle contienne déjà plusieurs collections et qu'on sache en construire d'autres allant dans cette boîte.

2 Premier type d'activité : le jeu de Kim. Sujets mathématiques : partition, écriture d'un *n*-uplet de naturels. Introduction du zéro. Préparation à la numération.

Nous avons utilisé le matériel *précalcul* (Hachette) qui présente des collections de lions, de canards, d'écureuils, d'arbres, de maisons, etc...

Il s'agira pour les enfants d'écrire une suite de nombres naturels, nombre de chevaux, de canards..., chaque suite décrivant un sous-ensemble du matériel.

Présentation du jeu :

Sur une table, une partie E (moindre que la moitié) du matériel dont on dispose, et que l'on peut facilement grouper suivant un critère simple ; les lions, les canards..., une dizaine d'objets de chaque espèce. Sur une autre table, le reste des objets de la collection (de quoi reconstituer une collection identique E'). Un linge va permettre de cacher la collection montrée aux enfants.

Déroulement du jeu :

1ère phase : Sur la première table un enfant constitue un ensemble A avec des éléments de E.

Un second enfant vient alors observer cet ensemble A pendant un court instant puis va à la deuxième table où il doit constituer un autre ensemble A' où il y aura "les mêmes choses et en même nombre", qu'en A.

Le modèle est alors caché sous un linge.

Lorsque l'enfant déclare avoir fini, quelques délégués de la classe comparent le modèle et la copie. Cela suscitera un regroupement matériel des objets en classes et une bijection ou un décompte.

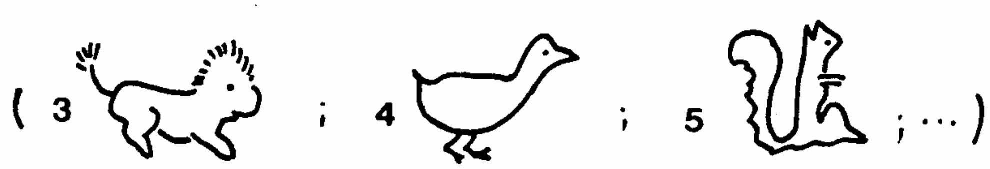
Deuxième phase : Dès que la règle du jeu est comprise, la maîtresse forme une première équipe de 2 enfants.

— Le premier observe comme ci-dessus et rédige un message qu'il porte au second.

— Le second doit alors, grâce au message, pouvoir faire la copie exacte du modèle. Il est permis de discuter pour demander des renseignements mais seulement entre deux concours.

Chaque enfant observe l'efficacité des messages dans le jeu et peut remplacer un joueur défaillant. La deuxième phase dure jusqu'à l'obtention d'un premier message réellement utilisable.

Troisième phase : Course entre deux ou plusieurs équipes pour l'amélioration des conventions. A la fin de la deuxième phase on obtient un dessin ou au mieux une écriture du genre



(3 lions ; 4 canards ; 5 écureuils...)

Les enfants conviennent d'un ordre (par exemple : lions, canards, écureuils, éléphants, arbres) que la maîtresse écrit au tableau ; alors les dessins sont inutiles et une suite de naturels suffit.

Quatrième phase : Plusieurs groupes jouent pour bien connaître les conventions de position. Introduction du zéro à l'occasion d'une classe vide.

Observations

Les enfants n'ont tout d'abord même pas compris l'utilité de dessiner chaque objet : ils dessinaient *un* seul objet de chaque type sans indiquer le nombre des éléments.

Ce qui retenait leur attention c'était la nature des objets et non leur nombre : ils ont été très surpris de voir la différence entre le modèle et la copie.

Tout de suite après ils ont dessiné *tous* les objets et bien vite les dessins complets ont été jugés trop longs.

La solution (3...) leur a paru très satisfaisante. La maîtresse a dû intervenir pour suggérer l'abandon de la représentation dessinée.

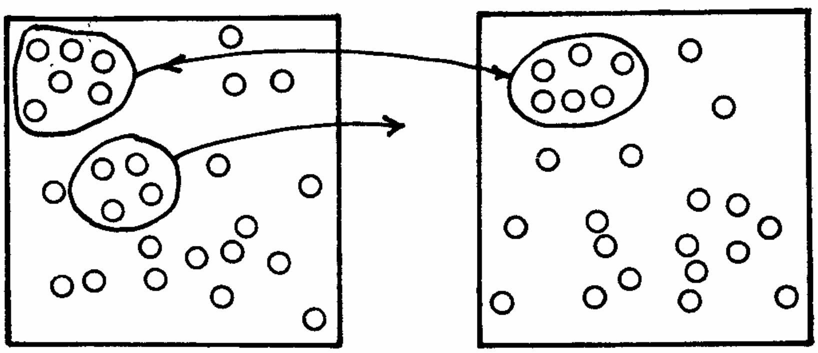
Elle a disposé les messages obtenus dans un tableau affiché.

3. Deuxième type d'activité : Comparaison de partitions.

Il s'agit de comparer, en nombre, des ensembles comportant beaucoup d'éléments (59). La seule technique de comparaison de deux ensembles que connaissent alors les enfants est l'injection, mais comment l'exécuter ?

Les enfants doivent déclarer lequel de deux ensembles d'objets contient le plus d'éléments. Si les objets ne peuvent pas être appariés (mis face à face), par exemple s'ils sont dessinés, la technique des flèches est obligatoire mais dès qu'il y a plus de vingt objets elle est proprement inextricable.

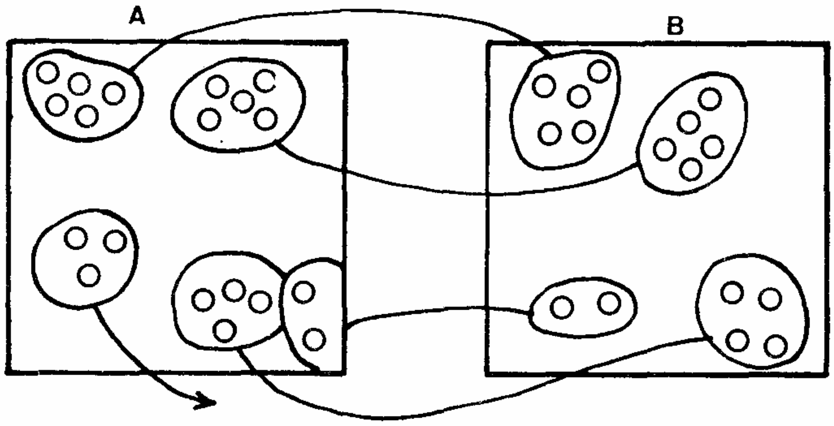
A condition de présenter un nombre suffisant d'objets (au moins 50) les enfants découvrent eux-mêmes qu'il est avantageux de procéder des deux côtés à des partitions en sous-ensembles disjoints de même nombre d'objets :



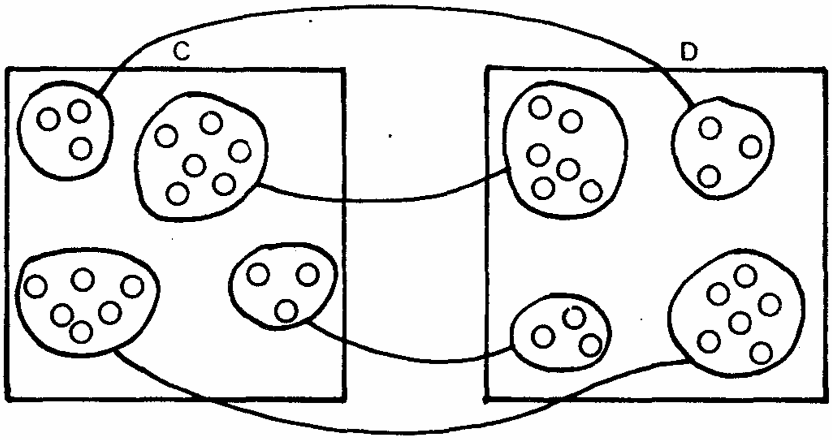
et de tenter de mettre *ces sous-ensembles* en bijection. Cette découverte est facilitée par le travail en groupe.

Les enfants sont répartis en trois groupes. Chaque groupe doit comparer deux ensembles dessinés sur deux grands papiers et comportant plus de cinquante éléments. Il ne suffit pas de conclure, il faut aussi montrer aux autres groupes qu'on ne s'est pas trompé.

Les enfants par exemple dessinent ceci :



Ils écrivent $a > b$ et disent "le nombre d'éléments de A est plus grand que celui de B".



Ici, ils écrivent $c = d$ et disent "le nombre d'éléments de C est le même que celui de D".

Par des questions telles que "es-tu bien sûr ? Je ne sais pas, je ne vois pas..." la maîtresse suscite des hésitations et des controverses.

Il faut bien remarquer que la comparaison de deux cardinaux s'effectue chez l'enfant à l'aide de procédés différents suivant le nombre d'objets dont il s'agit ; chaque modèle a ainsi un intervalle d'emploi privilégié :

de 1 à 6 perception directe (à 6 ans) ;

de 9 à 15 correspondance terme à terme, liens ;

de 30 à 60 ou 70, partition et correspondance entre sous-ensembles.

Il est aussi ridicule de demander une perception globale du nombre de 15 ou 16 objets (anciennes constellations) que de faire tracer des liens entre deux ensembles de quatre objets. Les enfants peuvent eux-mêmes découvrir les modèles mathématiques à condition de leur proposer des situations où ils sont plus utiles que tout autre.

En développant ces considérations on peut établir ainsi les caractéristiques informationnelles de l'emploi privilégié d'un modèle mathématique.

4 Troisième type d'activité : Ecriture du cardinal d'une collection très nombreuse.

Devant une collection d'un grand nombre d'objets les enfants veulent écrire un message permettant à d'autres enfants de réaliser un ensemble équivalent en nombre. Il leur faudra aussi comparer en nombre deux tels ensembles. C'est l'occasion pour eux de découvrir que l'addition leur permet d'écrire des naturels, qui pour eux sont très grands, à l'aide des quelques petits naturels qu'ils connaissent.

On utilise environ 200 objets pour une classe.

Les enfants sont répartis en 3 groupes autour de 3 grandes tables. Sur chaque table un ensemble de plus de 60 objets (distribués à poignées).

La maîtresse propose d'écrire le nombre de ces objets. L'écriture sera transmise à un autre groupe qui devra reconstituer un ensemble équivalent.
La comparaison se fera directement sur les ensembles d'objets (par bijection ou tout autre moyen). Nous recherchons des écritures du genre $(5 + 4 + 5 + 3 + 2 + 8 + 10)$ mais nous ne refusons aucune idée correcte. Le procédé a été découvert facilement par les enfants par référence au jeu de Kim.

Observations

Les méthodes de détermination des cardinaux ont été différentes pour les trois groupes :

— La première équipe a compté et écrit le nombre d'objets de l'ensemble (une élève sait mais elle est la seule).

— La deuxième équipe a réparti les objets entre les individus. Chaque enfant a compté le cardinal d'une partie de l'ensemble. On a donc pu introduire tout naturellement l'écriture souhaitée.

— La troisième équipe a construit systématiquement des sous-ensembles de 5 éléments. Cette méthode pourra être exploitée avec fruit quand on introduira les systèmes de numération.

Dans ces deux derniers cas on obtient des écritures du genre (5, 8, 4, 8, 7, 12, 5) ou (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 8).

Il est facile d'indiquer alors l'écriture habituelle 5 + 8 + 4 + 8 + 7 + 12 + 5;elle est adoptée sans problème. Mais on peut attendre aussi la phase suivante.

Remarque : Par exception (CP début décembre), dans l'un des groupes une élève sait compter correctement un ensemble de 67 objets et écrire "67" mais ce renseignement n'est encore exploitable que pour un nombre infime d'élèves. La maîtresse ne refuse pas le message : le renseignement est compris ou non par les autres.

5 Quatrième type d'activité.

Définition sémantique de la somme des naturels (2 par exemple) ; classement de réunions d'ensembles.

Le jeu consiste à réaliser, matériellement ou sur un dessin, des réunions d'ensembles et à les classer le plus rapidement possible d'après leur cardinal (dans des boîtes, par exemple).

1ère phase : Le maître place sur une table deux boîtes "5" et "9" qui contiennent respectivement des ensembles équivalents en nombre, de 5 objets et de 9 objets. Si l'on utilise des dessins de ces objets on aura soin, dans cette première leçon, de ne prendre que des dessins d'ensembles disjoints. Dans une autre partie de la classe sont rangées toutes les boîtes que les enfants ont dû déjà utiliser pour classer les ensembles rencontrés. Certaines n'ont pas de nom.

a) Les enfants prennent un ensemble d'objets dans la boîte 5, un dans la boîte 9 ; ils en constituent la réunion, par exemple en mettant les objets de l'ensemble obtenu dans un sac. Ce sac est transmis à un coéquipier qui cherche le cardinal de cet ensemble, soit par bijection avec un ensemble figurant dans les boîtes dont il dispose, soit en comptant s'il sait. Mais il vaut mieux que l'ensemble soit tel qu'il ne sache pas compter ses éléments.

b) Le jeu recommence, toujours avec les mêmes boîtes mais avec des dessins d'ensembles, en cherchant la boîte à laquelle appartient la réunion ; on peut vérifier en réalisant concrètement cette réunion à l'aide d'objets.

Le maître organise une course entre deux équipes pour classer le plus vite possible les réunions.

Très vite l'une des deux équipes s'aperçoit que la boîte convenable est toujours la même et elle s'abstient de compter ou de vérifier : elle gagne — l'autre équipe l'imite bientôt, vérifie — Cette découverte est l'objectif de la première phase.

2ème phase :

Même jeu en remplaçant la première paire de boîtes (5,9) par une autre, par exemple (7,9). C'est une autre boîte qui convient, valable quels que soient les ensembles choisis. Nouvel exemple ; explication de la découverte. Mais nous voulons aussi une écriture.

3ème phase :

Le maître met à la fois plusieurs boîtes d'ensembles à la disposition des joueurs, par exemple 7, 9, 6, 11 et il désigne à chaque fois une paire de boîtes (telle que (7, 9), (11, 9), (6, 7), etc...). Les enfants découvrent que chaque paire caractérise la boîte but.

Pour faciliter la tâche il faut se rappeler dans quelle boîte il fallait mettre la réunion précédemment faite avec la même paire. Le seul moyen commode est de *noter* sur cette boîte de quelle paire il s'agit, par exemple *(a,b)* ou $a + b$, le signe "+" étant proposé par le maître.

Nous venons de faire l'introduction du signe "+" pour répondre au besoin des enfants.

4ème phase :

Catastrophe : la réunion et l'équipotence sont incompatibles.

Maintenant le maître place dans les boîtes des dessins d'ensembles qui ne sont plus disjoints.

Les enfants réalisent la réunion. Dès la première série de vérifications, les enfants sont obligés de reconnaître, non pas qu'ils se sont trompés, mais que l'algorithme mis au point précédemment pour classer les réunions ne convient plus : la réunion d'un ensemble de cardinal 5 et d'un ensemble de cardinal 9 peut avoir comme cardinal 9, 10, 11, 12, 13 ou 14 suivant les cas.

On peut avoir A équipotent à B et C équipotent à E et aussi $A \cup C$ non équipotent à $B \cup D$. Pourquoi ? Les enfants découvrent bientôt que certains objets figurent deux fois, par un dessin dans A, un dessin dans B alors qu'ils ne figurent qu'une seule fois dans l'ensemble réunion. Ils reconnaissent d'autant mieux ce fait qu'ils ont déjà manipulé et désigné des intersections d'ensembles.

Conclusion : Ou bien il faut vérifier chaque fois et s'assurer qu'il s'agit d'une réunion d'ensembles disjoints, ou bien il faut compter chaque fois les éléments de la réunion.

6 Conclusion.

Ainsi dans un premier temps le processus de formalisation directe introduit l'emploi du signe "+" qui permet simplement d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels. Notre boîte sans nom de tout à l'heure (14) s'appellera pendant quelque temps 8 + 6. Ce nom suffit amplement à désigner et à définir la boîte en question.

En procédant à des partitions les enfants peuvent comparer et dénombrer des collections comportant jusqu'à une centaine d'objets en n'utilisant que les tout premiers naturels, par exemple l'écriture "8 + 7 + 8 + 6 + 4 + 9 + 11" est une parfaite désignation provisoire de "53". Quelle puissance tout à coup ! Les enfants, à la conquête du nombre, ont le plus grand désir de manier des naturels aussi grands que possible. Suivons-les dans cette voie : *les naturels et l'addition servent à construire de nouveaux naturels.*

L'enfant utilise toutes ses connaissances non pour réciter mais pour bâtir. Nous avons constaté combien cette motivation puissante favorise les découvertes et les apprentissages.

Dans les méthodes traditionnelles les enfants n'écrivaient 8 + 6 que lorsqu'ils connaissaient 14. L'addition servait à décomposer ce que l'on connaissait déjà et, de ce fait, perdait de son intérêt, d'autant plus que l'on s'arrangeait pour que les enfants manipulent en suivant ce qu'ils énoncaient. A quoi peut bien servir de s'arrêter après avoir compté jusqu'à 8, recommencer à compter jusqu'à 6, écrire 8 + 6 et enfin recommencer à compter les mêmes objets mais cette fois, sans s'arrêter, de 1 à 14 ? Il suffisait de commencer par là.

B Relations numériques : syntaxe de l'addition

Dans un premier temps, l'emploi du signe "+" permet d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels ; mais bientôt les enfants constatent qu'ils ont ainsi plusieurs signes pour un même naturel : ils s'en aperçoivent par des comparaisons d'ensembles : 6 + 3 + 5 est le nom d'une boîte, 8 + 6 aussi mais, si l'on a marqué de ces signes deux boîtes différentes, tout ensemble appartenant à l'une appartient aussi à l'autre : il faut une seule boîte pour laquelle nous avons deux signes : "8 + 6" et "6 + 3 + 5". S'il y a lieu de communiquer à quelqu'un cette information nous savons déjà écrire :

"8 + 6 = 6 + 3 + 5".

Ainsi par l'addition on obtient trop de noms de naturels : nous allons tenter de dominer la situation en écrivant des égalités et des inégalités puis en essayant de réduire les écritures.

Il s'agit maintenant de *réaliser des ensembles* dont le cardinal est donné sous forme d'une somme, de *comparer ces ensembles* en nombre, *d'écrire la conclusion* de ces comparaisons.

Un autre but de ces activités est de faire découvrir aux enfants que l'on peut parfois comparer des cardinaux écrits sous forme de sommes et cela *directement d'après les écritures*, c'est-à-dire en utilisant ces messages comme des modèles.

Cette activité est importante car elle met pour la première fois en évidence le rôle d'une représentation en mathématique au cours de la comparaison entre des manipulations d'objets et la formalisation de cette activité.

1 Egalité de cardinaux.

a) 3 groupes doivent fabriquer des ensembles dont les cardinaux sont les suivants :

— Pour le 1er groupe : $9 + 9 + 8 + 3 + 6$ (avec des jetons);

— Pour le 2e groupe : $4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6$ (avec des bouchons);

— Pour le 3e groupe : $5 + 2 + 8 + 8 + 6 + 4 + 2$ (avec des bûchettes).

b) Comparaison de ces ensembles : Le premier travail se fait sur les écritures de cardinaux ci-dessus. Une remarque est faite immédiatement par une enfant : 8 se trouve dans toutes ces écritures.

Puis, invités à comparer les deux premiers cardinaux, les élèves procèdent comme suit :

$$9 + 9 + 8 + 3 + 6$$
$$4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6$$

On souligne ensuite les chiffres non reliés : 9 d'une part, 4 et 5 de l'autre.

Une élève affirme alors, sans pouvoir l'expliquer, que les deux ensembles sont équivalents. La classe vérifie le bien-fondé de cette supposition en appariant bûchettes et jetons.

Ceci amène à supposer que $4 + 5$ et 9 pourraient désigner une même boîte. On le vérifie en comptant le nombre d'éléments de la réunion de deux ensembles pris l'un dans la boîte 4, l'autre dans la boîte 5.

L'institutrice rappelle l'emploi de = et la notation : $4 + 5 = 9$ est proposée. Un enfant propose alors de relier 9 à $4 + 5$ par une flèche dans les expressions de cardinaux du schéma ci-dessus.

On exprime ensuite le fait que les deux ensembles vont dans la même boîte :

$$9 + 9 + 8 + 3 + 6 = 4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6.$$

Remarque : La comparaison des cardinaux du 1er et du 3e ensemble devrait se faire de la même manière. La vérification a échoué, les enfants ayant égaré quelques bûchettes. On peut éviter cet inconvénient en utilisant des dessins d'ensembles au lieu d'objets.

2 Inégalités.

De la même façon, les enfants concluent :

$$4 + 3 + 5 + 7 < 3 + 5 + 8 + 4$$

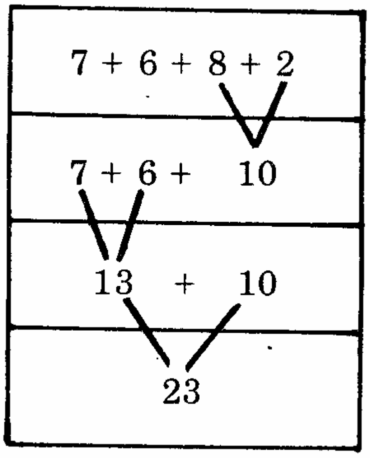
3 Réduction d'écritures et substitutions formelles

Jeu des télégrammes : course de relais.

Les enfants vont se transmettre de l'un à l'autre des messages : le premier reçoit l'information (sur le nombre de bijoux du trésor par exemple) ; c'est 3 + 4 + 6 + 8 + 2. Il le recopie et le transmet au second. Celui-ci recopie l'information et la transmet au troisième. Celui-ci recopie l'information et la transmet, etc... Mais il est entendu que l'on peut modifier l'écriture du message pourvu que le naturel indiqué reste le même. S'il y a course de relais, les enfants ont intérêt à réduire le message : par exemple les télégrammes successifs portent

$$7 + 6 + 8 + 2,\ 7 + 6 + 10,\ 13 + 10,\ 23,\ 23$$

mais il faut montrer ce que l'on fait, justifier. C'est ce qu'indique le schéma :



Si l'équipe choisit l'élève le plus fort comme premier messager, il saura peut-être exécuter l'opération et transmettre un naturel unique. Mais il y a risque d'erreur ; on peut convenir que chaque messager n'a le droit d'additionner que deux naturels.

Les enfants peuvent vouloir vérifier en opérant sur des collections d'objets ou des ensembles dessinés : en général, on vérifie le résultat et on ne se préoccupe pas des intermédiaires, ce qui n'est guère fructueux. Par contre les enfants acceptent immédiatement l'aide offerte d'afficher un répertoire d'égalités reconnues vraies que l'on retrouve à plusieurs reprises. (Ce sera l'objet de l'étude suivante).

Une expérience : Le jeu se poursuivant à l'aide d'un répertoire, la maîtresse a proposé de réduire l'écriture suivante :

$$432 + 128 + 545 + 237 + 841 + 528$$

en utilisant le répertoire :

$$432 + 128 = 560 \qquad 545 + 237 = 782$$
$$841 + 528 = 1369 \qquad 560 + 1369 = 1929$$

Les enfants savent copier ces naturels sans savoir les lire. Ils ont pourtant compris l'algorithme et aboutissent à l'écriture

$$1929 + 782$$

qui les satisfait. Ils n'essaient aucunement de donner une signification à cette écriture, estiment le message court et ne souhaitent pas mieux.

4 Conclusion.

Nous avons donc créé un langage avec l'alphabet

$$a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, +\}$$

nous aurions pu le faire avec $\{0, 1, 2, 3, 8, 9, 13, +\}$.

a) Ce langage doit être utilisé par les enfants : nous avons donc recherché les occasions d'étudier les partitions, les sommes, la relation d'ordre dans les sommes, les sommes de sommes, etc... Et, pour multiplier les constatations, nous nous gardons bien de nous limiter aux cas de la recherche de l'écriture canonique d'un naturel $(7 + 8 = 15)$ pour écrire à l'occasion par exemple $7 + 8 = 6 + 9$.

b) Il faut que les enfants aient toujours le *choix* du langage utilisé pour décrire la situation : montrer trois doigts, tracer trois barres, ou utiliser le langage du modèle : opérer avec le signe "3", penser à la "boîte 3".

c) S'il s'agit de compter, nous cherchons à les conduire à préférer le langage des naturels aussi souvent que possible comme plus commode pour eux que le langage des collections. Il faut éviter à la fois la rupture avec le sens pour qu'ils n'oublient pas de quoi ils parlent, mais aussi la lourdeur qui risquerait de les engluer dans les signifiés corrects.

Progressivement, les enfants devront pouvoir faire confiance au modèle pour prévoir, obtenir des résultats, opérer rapidement.

Dans cette phrase la syntaxe a été construite comme règle implicite de construction et d'emploi des assemblages. Il reste à l'expliciter et à préciser ses règles de validité. C'est l'objet de la phase suivante qui correspond à la dialectique de la validation.

C Etude des répertoires d'égalités : Début d'axiomatisation

1 Constitution du répertoire.

La maîtresse affiche les égalités découvertes pas les enfants au fur et à mesure qu'elles apparaissent : elles peuvent servir à faire des calculs numériques, à comparer des résultats et, grâce à des *substitutions formelles,* à établir de nouvelles égalités.

On peut par exemple instaurer une sorte de *concours de découvertes :* l'équipe qui propose une égalité nouvelle et qui prouve qu'elle est vraie gagne un point. Une équipe qui prouve qu'une égalité proposée par l'autre équipe est inexacte en gagne deux.

Il faut vérifier : la preuve, c'est le retour à la situation. On contrôle en prenant des objets pour réaliser les ensembles et en comptant.

Mais bien vite certains enfants découvrent des procédés qui fournissent une nouvelle égalité à partir de celle proposée par l'équipe adverse sans recourir à l'examen de la situation :

Par exemple à l'aide de	$3 + 4 = 7$
on construira	$3 + 4 + 1 = 7 + 1$ directement
ou encore	$3 + 4 + 5 = 7 + 5$
ou bien au contraire, à l'aide de	$7 + 9 + 3 = 3 + 11 + 5$
on affirme pas simplification	$7 + 9 = 11 + 5.$

Pour justifier de telles transformations d'écriture, les enfants finissent par énoncer des règles relatives à l'équivalence d'égalités ou quelque chose d'approchant.

2 Réduction du répertoire.

Devant la prolifération des égalités, les enfants proposent :

a) De n'en écrire que quelques-unes, les autres s'en déduisant facilement.

b) De classer celles que l'on garde de façon à les retrouver vite. C'est le début de la constitution des tables d'addition. La mise en tableau de Pythagore sera une application de l'étude d'ensembles produits d'ensembles.

c) D'effacer du tableau certaines égalités à mesure qu'on est certain de bien les connaître : il s'agit d'une convention entre tous les enfants qui doivent savoir ce qu'ils ont mémorisé ; cette pratique encourage donc l'apprentissage.

La réduction du répertoire d'égalités à un minimum d'axiomes et de schémas de constructions constitue en fait *un début d'axiomatisation de la théorie des naturels.*

Nous n'exposons pas dans cet article les exercices qui relèvent d'un autre processus de mathématisation que nous utilisons cependant dans la pratique concurremment à celui-ci.

Il s'agit du processus d'abstraction par l'emploi successif de différentes interprétations du même modèle mathématique.

Ainsi les enfants manipulent un jeu de baguettes logico-arithmétiques dont la conception arithmétique remonte à Mlle Haudemars (1927) et à Cuisenaire. Ces baguettes sont, comme des ensembles, classées dans des boîtes qui sont désginées par des lettres. Une "somme" est définie dans l'ensemble des assemblages de baguettes, et par passage au quotient une addition qui permet de désigner de nouvelles boîtes.

L'emploi de poids, et d'objets classés suivant leur prix, permet de mettre en évidence des isomorphismes pour (N, +) et de préparer la notion de mesure. Dienes a beaucoup étudié cet aspect du processus de mathématisation. Ce type d'abstraction joue sans doute un rôle important dans la dialectique de l'action et dans les parties sémantiques des processus de formulation. Mais il s'agissait ici de donner un aperçu d'un autre aspect, moins familier, de ce processus de mathématisation.

Je remercie mon ami L. Duvert de m'avoir signalé quelques erreurs et omissions et d'avoir sensiblement amélioré la présentation de ces textes.

Bibliographie.

(1) PORTE (J.). – Recherches sur la théorie générale des systèmes formels. Gauthier Villars, 1965.
(2) BOUDON. - Vocabulaire des Sciences Sociales.
(3) Logique et Connaissance Scientifique. Ouvrage collectif sous la direction de J. PIAGET. – Encyclopédie de la Pléïade, 1967, N.R.F.
(4) Le langage. – Ouvrage collectif sous la direction de A. MARTINET. Encyclopédie de la Pléïade, 1968, N.R.F.
(5) LORENZEN P. – Métamathématique.
(6) BOUDON (R.) et LAZARSFELD. – Analyse Empirique de la Causalité. Mouton, 1966.
(7) BROUSSEAU et autres auteurs. – Documents pour la formation des maîtres. I.R.E.M. de Bordeaux.
(8) WITTWER (J.). – Fonctions symboliques et intellectuelles. Les Sciences de l'Education, n° 3, Didier.
(9) L'essentiel de cet article est extrait d'un ouvrage publié en 1970 à l'I.R.E.M. de Bordeaux pour la formation des Maîtres :
Mathématiques pour l'Enseignement Elémentaire
Tome I. – G. BROUSSEAU
à la suite d'expériences menées entre 1964 et 1969. Un premier exposé de la méthode figure dans un ouvrage rédigé lors du stage de Varadéro (Cuba) en juillet 1970 et publié à l'I.R.E.M. de Bordeaux en octobre 1970 sous le titre "30 leçons".