Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques[1]

Guy Brousseau
Pr. Emérite (IUFM d'Aquitaine)

Introduction

J'ai accepté l'aimable invitation de la commission Inter IREM « Rallyes Mathématiques, Jeux, compétitions, clubs, etc. » à l'instigation expresse d'André Antibi. Il a pu constater le rôle central de la théorie des jeux dans la constitution de la théorie des situations didactiques, il a d'autre part apprécié que l'application de cette théorie conduise à insérer de nombreux « jeux » dans l'enseignement scolaire des connaissances mathématiques fondamentales et il souhaitait que je vous en parle.

J'avoue que j'ai beaucoup hésité avant d'accepter. J'avais l'impression que mon discours serait forcément en décalage avec le vôtre : aussi décalé que pourrait l'être - toutes proportions gardées – la lecture du « rire » de Bergson au milieu d'une comédie.

Il me semble que dans le jeu, ce qui vous intéresse est plutôt l'activité, l'amusement, il est synonyme de récréation, de liberté, de gratuité, par opposition à quelque chose d'autre qui serait le travail, l'ennui, la contrainte, l'engagement dangereux. Ainsi ce colloque est tout vibrant du désir de faire profiter les élèves des « conditions motivantes et instructives » offertes par les divers types de jeux et d'activités que vous présentez. Mais j'ai pu observer qu'ils se déroulent presque tous hors du temps de classe, et que lorsqu'ils sont proposés en classe, il s'agit toujours d'une parenthèse à côté du processus d'enseignement. Bien que l'intention didactique soit fortement affirmée, elle repose presque toujours sur l'hypothèse que quelque chose de positif va se transférer vers les élèves : des connaissances, le plus souvent de la motivation ou au moins une représentation améliorée des mathématiques.

Je n'ai pas effectué les recherches qui me permettraient d'émettre une opinion sérieuse à propos de cette hypothèse, mais je ne peux m'empêcher de me poser la question suivante : comment pourrait-on faire bénéficier l'enseignement de quoi que ce soit de positif dans un dispositif où fondamentalement il joue le rôle négatif de plastron et de « mauvais objet » ? Je ne voulais pas venir ici et paraître vous reprocher des actions qui m'intéressent et dont j'ai pu constater qu'elles intéressent beaucoup d'enfants et de professeurs. La détestation des mathématiques est une sorte d'incendie social et culturel et je ne veux pas tirer sur les pompiers, d'autant plus que votre désir ne m'est pas étranger, que je l'ai partagé et que je le partage encore, et que j'ai apporté ma contribution à votre cagnotte de jeux mathématiques – contribution modeste certes mais que je crois toujours utile -. Mais ne s'agit-il pas de notre part d'une nouvelle reculade devant la nécessité d'affronter les problèmes de l'enseignement de notre discipline ? Et devant la nécessité d'étudier les réponses directes que nous devons produire.

Car ce qui me préoccupe c'est l'enseignement des mathématiques ; et plutôt dans la classe que hors de la classe. Je n'ai pas cru que les mathématiques, leur apprentissage et leur enseignement soient

---

[1] BROUSSEAU Guy. "Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques", (2002), p 83-155, *Questions éducatives, l'école et ses marges : Didactique des mathématiques,* n° 22-23 décembre 2002 Centre de recherches de l'Université Jean Monnet Saint Etienne.
Ce texte avait servi de base et de référence à la conférence – beaucoup plus courte - qui a été prononcée au cours du Colloque International « Rallyes Mathématiques, jeux, compétitions, clubs, et leurs retombées sur l'enseignement et l'image des mathématiques » organisé par la commission Inter-IREM « Rallye » à Toulouse 15-17 Juin 2001

fatalement ce qu'on prétend ni qu'elles étaient si étrangères à la notion de jeu. Au contraire, dans les années 70, j'ai fait de la notion de jeu, la base de leur analyse. Au lieu de faire reposer uniquement l'étude de l'enseignement des mathématiques sur l'étude de la matière, sur l'étude des élèves et sur celle des professeurs, j'ai montré dès cette époque

- l'importance essentielle des *conditions* des activités,
- le caractère spécifique de ces conditions relativement à une connaissance précise
- et l'importance de considérer l'ensemble de ces conditions spécifiques comme des systèmes – que nous avons appelés situations - et non pas comme une simple collection amorphe.

J'ai alors commencé à modéliser ces systèmes en termes de « jeux mathématiques formels », et leurs évolutions en termes d'automates.

Pour éprouver cette théorie il fallait produire de vrais jeux, de vraies situations utilisables par les professeurs dans des classes et les étudier expérimentalement. Beaucoup parmi les premiers membres des IREM se sont attelés à cette tâche car nous espérions faire directement profiter les enseignants et les mathématiciens soucieux de la diffusion de leur discipline de ces progrès. Ces études nous ont conduits à élaborer de nombreux concepts, des méthodes d'études, et à « découvrir » nombre de phénomènes liés à l'enseignement des mathématiques. Elles ont aussi injecté dans le milieu des enseignants un certain nombre de moyens d'enseignements et beaucoup de suggestions intéressantes. Le résultat de tous ces efforts est aujourd'hui un peu mitigé. Je soupçonne que nous les avons inscrits auprès d'institutions : les enseignants et les mathématiciens qui ne sont pas en mesure de les recevoir. Rien ne prouve qu'il existe des institutions plus adéquates.

Pour en revenir aux raisons de mes réticences, j'ai craint que faire du jeu un objet d'analyse ne pourrait que rebuter les amateurs de jeux que vous êtes. Il est bien connu qu'un jeu analysé est un jeu mort.

Puisque nous avons en commun notre intérêt pour les mathématiques, pour leur enseignement, pour les IREM et pour les jeux mathématiques, j'ai finalement accepté de relever le défi, c'est pourquoi vous allez devoir me supporter. Nous allons nous demander à quoi nous jouons quand nous faisons des mathématiques, quand nous en apprenons, quand nous les enseignons, et quand nous étudions leur didactique, ambition excessive et même prétention penseront certains. Je demande votre indulgence, voulez-vous jouer un peu avec moi ?

Notre premier travail devrait consister à éliminer des malentendus liés aux divers usages du mot « jeu ». Dans la vie courante, le contexte permet d'éliminer les significations parasites d'un mot. Il est donc possible d'en utiliser tour à tour des acceptions différentes et même contradictoires. Le mot « jeu » évoque une certaine liberté, ce qui n'exclut pas l'existence de règles : elles déterminent exactement de quelle liberté il s'agit ; il évoque une certaine gratuité, ce qui n'empêche pas la plupart des jeux de supposer un enjeu ; il est synonyme de divertissement, mais toutes les occurrences d'un jeu ne sont pas divertissantes pour tout le monde… Nous avons besoin de poser qu'un jeu peut ne pas être amusant pour découvrir à quelles conditions il pourrait le devenir.

Dans un premier temps, il faudra donc abandonner la mythologie et préciser ce que sont ces « jeux » qui serviront de modèle pour décrire et expliquer les activités qui nous intéressent. Il ne m'a pas été possible de créer d'emblée un modèle spécifique aux mathématiques. Il a fallu d'abord envisager le jeu comme un modèle général des activités humaines afin d'obtenir une définition de ce qu'est une manifestation de connaissance ou une manifestation d'apprentissage.

Dans un deuxième temps, il faut envisager le jeu comme modèle de *l'activité mathématique*, d'individus : celles des mathématiciens et celle, a priori différente, des enfants ou des professeurs.

> En confidence je peux vous dire que l'idée de modéliser des activités humaines à l'aide de diverses théories mathématiques et notamment la théorie des jeux, était largement répandue dans les années 50-60 et qu'un enseignant d'Aquitaine ne pouvait guère ignorer à l'époque les travaux de Jean Château sur le jeu chez l'enfant[2], Mes premiers travaux concernaient d'ailleurs l'ergonomie du calcul humain et malgré l'importance du sujet, la précision de l'étude et la netteté des preuves, ils n'ont intéressé

[2] • J. CHÂTEAU, *Le Réel et l'imaginaire dans le jeu de l'enfant* , Vrin, Paris, 1946, 5e éd. 1975 ; *L'Enfant et le jeu* , Scarabée, Paris, 1950

> personne. J'aurais déjà dû me méfier ! La deuxième étape : envisager l'activité mathématique des élèves comme des jeux spécifique nous a toujours occupés depuis, et exclusivement, jusque dans les années 75-80.

Dans un troisième temps, nous pourrons envisager l'activité d'enseignement des mathématiques et les assujettissements multiples des actants : un enfant doit s'assujettir au problème qu'on lui pose et qui le détermine comme actant, à un projet d'apprentissage qui fait de lui un apprenti, à sa relation avec le professeur qui fait de lui un élève. Les mathématiques ne fonctionnent absolument pas de la même manière dans ces trois composantes d'une situation. Le modèle des jeux du professeur avec ce système est encore plus complexe. Et ce jeu ne peut pas être détaché entièrement des assujettissements du professeur à sa société, et à ses institutions d'appui en particulier les mathématiciens, institutions qui ne se soucient guère de déployer les efforts nécessaires pour *comprendre* les problèmes qu'il affronte. Les interactions entre ces différents jeux forment ce que j'appelle des doubles jeux.

La théorie des situations n'est pas une idéologie pédagogique. Elle n'est qu'un instrument pour analyser des rapports complexes et pour débusquer les inconsistances des approches plus négligentes. Elle vise essentiellement l'analyse de n'*importe quelle* situation d'enseignement effective ou imaginée, c'est-à-dire de faire ressortir les choix du professeur et de les hiérarchiser en fonction de leurs conséquences. Les questions qu'elle permet de poser peuvent provoquer l'émergence de situations didactiques « nouvelles », en particulier sous forme de jeux, mais cela ne leur attribue aucune vertu particulière. Comme tous les objets techniques, elles ont des propriétés, bonnes ou mauvaises, et sont plus ou moins adaptées dans des circonstances réelles d'emploi.

Elle est très certainement insuffisante à tous les points de vue. Elle est très lourde et très complexe. Elle est difficile à comprendre et à manier parce qu'elle a dû vulgariser ses modélisations sous forme de métaphores. Elle ne coïncide pas souvent avec les opinions des professeurs. Elle ne leur fournit pas de baguette magique pour résoudre la plupart de leurs problèmes difficiles. Si elle n'est contredite par aucune discipline connexe (mathématiques, psychologie, sociologie, linguistique etc.), elle ne fait pas bon ménage avec les extrapolations hasardeuses que certains en tirent abusivement pour inféoder l'enseignement à leur discipline. Enfin je ne vois guère d'autre moyen d'obliger les conjectures sur l'enseignement à s'incarner en éléments à la fois observables et manipulables.

Un tel sujet ne peut pas entrer dans les limites d'un article de conférence, mais je souhaite vous donner une idée de la cohérence, de la puissance et de la validité de cette approche. C'est pourquoi vous voudrez bien me pardonner de ne traiter, dans les deux premiers points, que ce qui est indispensable pour aborder le troisième, et parallèlement, de laisser la trace du traitement de certaines questions sous forme de plans. Ces questions sont traitées dans d'autres textes, mais différemment et j'ai voulu les replacer par rapport à mon propos.

Je propose en annexes 5 textes qui présentent de façon concrète divers usages de la théorie des situations pour produire des situations d'apprentissage ou d'enseignement ou pour étudier certaines questions théoriques. L'usage de la théorie pour analyser des leçons « *ordinaires* » donnera lieu à d'autres publications.

I.
Le Jeu comme modèle de l'activité humaine

L'homo ludens

Johan Huizinga[3] a soutenu[4] que le jeu est un facteur fondamental de tout ce qui se produit au monde, au point qu'il a proposé de substituer au nom d'homo sapiens et d'homo faber celui d'homo ludens. Ainsi nous sommes tous des homo… ludens Le présentateur de la traduction précise.

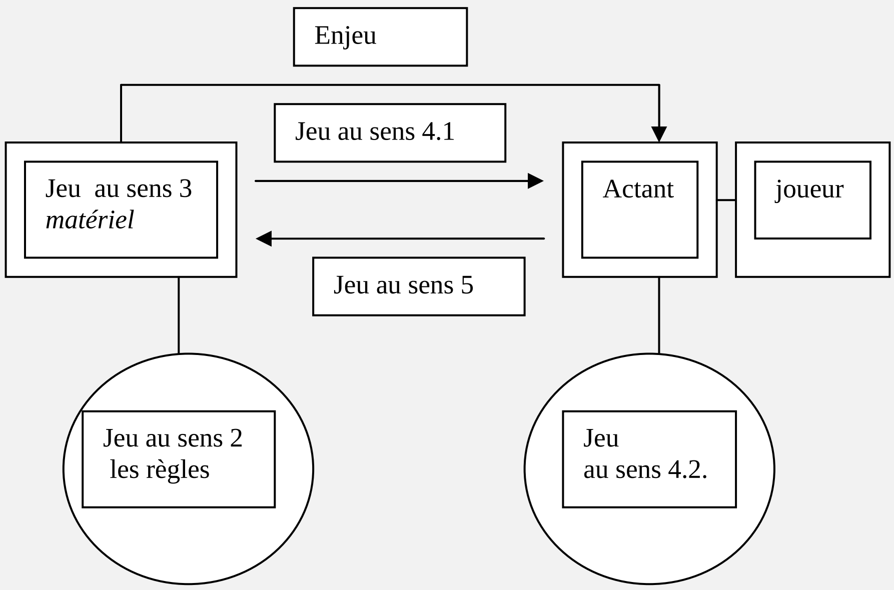
[3] Grand historien néerlandais 1872-1945,

[4] Johan Huizinga « homo ludens » essai sur la fonction sociale du jeu (1938) Tel Gallimard 1951

« Après avoir défini le jeu comme une action libre, sentie comme fictive et située en dehors de la vie courante, capable néanmoins d'absorber totalement le joueur – une action dénuée de tout intérêt matériel et de toute utilité, qui s'accomplit en un temps et dans un espace expressément circonscrits, se déroule avec ordre selon des règles données, dans une ambiance de ravissement et d'enthousiasme, et suscite, dans la vie, des relations de groupes s'entourant volontiers de mystère en accentuant par le déguisement leur étrangeté vis à vis du monde habituel -, il montre la présence extrêmement et féconde de ce jeu dans l'avènement de toutes les grandes formes de la vie collective : culte, poésie, musique et danse, sagesse et science, droit combat et guerre. »

Nous allons prolonger la proposition de Huizinga vers l'enseignement. Il néglige, pourtant la caractéristique la plus discriminante de l'espèce humaine est peut-être sa capacité à transmettre à sa descendance une quantité énorme d'informations et de pratiques par « enseignement ». Et l'instrument de ce prolongement sera d'abord la théorie des jeux. En recherche opérationnelle, la théorie des jeux est surtout sollicitée pour étudier les situations concurrentielles. Or, lorsqu'il s'agit d'apprendre ou même d'enseigner les mathématiques, cet aspect apparaît a priori comme plutôt mineur. C'est pourquoi, au lieu de ne considérer que les formes canoniques des jeux nous examinerons leur forme développée, de façon à pouvoir analyser par d'autres instruments mathématiques d'autres caractères des jeux et des stratégies, tels que la complexité, la fiabilité etc.

Le mot « jeu » est utilisé dans de nombreux sens différents, nous n'en avons retenu ici que quelques uns où il s'agit toujours d'une certaine activité : « Action de se livrer à un divertissement, à une récréation (ce qui est le sens propre du latin jocus, d'où vient jeu). (Le Littré). Mais pour qualifier ou déterminer cette activité, l'accent est mis sur ses divers aspects, soit :
1. sur la personne qui s'y livre : le joueur. Le jeu est alors défini par les sentiments qu'il éprouve :
- « Activité physique ou mentale, purement gratuite, généralement fondée sur la convention ou la fiction, qui n'a dans la conscience de celui qui s'y livre d'autre fin qu'elle même, d'autre but que le plaisir qu'elle procure » (Le Robert) **(sens 1.1).** C'est une activité libre, sans règles et sans enjeu : Celle que l'on trouve chez de nombreux vertébrés, essentiellement mammifères.
- « Amusement soumis à des règles, où il s'agit de se divertir sans qu'il y ait aucun enjeu. » (Le Littré) Les règles limitent et déterminent la liberté exigée au sens précédent **(sens 1.2)**
- « Amusement soumis à des règles, ou au contraire dans lesquels on hasarde ordinairement de l'argent ». (Le Littré) La gratuité à son tour disparaît au profit d'un enjeu déterminé donc limité **(sens 1.3.)**
2. sur les règles d'après lesquelles il faut jouer, l'organisation convenue de l'activité d'un joueur, qui se trouve alors réduit à des possibilités d'actions et à des intentions bien déterminées. Le jeu est "l'organisation de cette activité sous un système de règles définissant un succès et un échec, un gain et une perte" (LALANDE). **(Sens 2)**
3. sur "ce qui sert à jouer, les instruments du jeu", le matériel, **(sens 3)** Exemple : un jeu de cartes (sans préciser les règles).
4. sur l'activité effective du joueur :
- les conditions précises dans lesquelles se détermine l'activité du joueur, un assemblage particulier des instruments du jeu, obtenu à une étape donnée en suivant les règles, qui permet de réfléchir aux décisions possibles du joueur **(sens 4.1).** Assemblage des cartes qui, données à chacun des joueurs, lui servent à jouer le coup. Ex. le bridgeur étudie son jeu.
- l'ensemble des positions entre lesquelles le joueur peut choisir dans un état donné du jeu **(sens 4.2)**
- et par extension, en mécanique par exemple, l'ensemble des positions possibles et donc des mouvements d'un système, d'un organe, d'un mécanisme que l'on a par ailleurs assujetti à respecter certaines contraintes **(sens 4.2).** Cette charnière a du jeu.
- la décision du joueur à un instant donné (le joueur joue son jeu) (**sens 5**)



1. Les éléments fondamentaux du modèle général

Il n'est donc pas inutile de préciser d'abord les éléments des modèles retenus[5] que nous trouverons représentés sur le schéma 1

a) Comme en logique, où il faut bien distinguer le langage construit du langage du constructeur, nous distinguerons les joueurs (au moins un) de leur observateur (lequel ne fera pas l'objet de l'analyse). Cette précaution est nécessaire car le joueur ne possède pas toujours les mêmes informations ni les mêmes connaissances que l'observateur.
b) Ce joueur se trouvera face à un milieu, un système matériel ou non, qui lui offrira le choix entre des (un jeu de) positions possibles « permises ». Dans l'ensemble des positions permises – ou états du jeu - se trouveront la position initiale et les positions terminales. Certaines positions concevables sont exclues par les règles du jeu.
c) Le joueur déterminera une position du milieu en excluant les autres par la mise en œuvre de ses *connaissances*, de ses *réflexions*, de sa *ruse*, et/ou en s'en remettant plus ou moins au *hasard*. Chaque terme correspond à des types de jeux différents selon la classification de De Possel (1936)[6], mais en didactique, un critère très important consistera à distinguer si le joueur a en face de lui un système inconnu mais dénué d'intention - analysable en schéma de causalité -, ou un système doué d'intention, analysable en schémas de finalité.
d) Suivant les cas nous pourrons considérer que le joueur possède toute l'information ou non sur les positions qui lui sont permises. Une suite déterminée de choix de positions permises commençant par la position initiale et s'achevant par une position terminale sera dite « stratégie ».
e) Ce choix du joueur sera « motivé » dans le modèle par une fonction de préférence définie sur tous les états, et éventuellement engendrée par un gain ou un enjeu

Ces éléments sont des objets mathématiques parfaitement définis qui pourront entrer dans des raisonnements et des calculs dès que des questions mathématiques pourront être posées à leur sujet.

Le joueur et l'actant

a) Il apparaît toutefois déjà que le modèle ne correspond déjà pas très bien aux usages ordinaires du terme « Jeu », lesquels sont d'ailleurs dans la langue ordinaire, assez divers[7]. Par exemple tous les dictionnaires insistent sur les caractères *libres, gratuits* et *ludiques (au sens du divertissement)* du jeu, or ici il est indispensable de déterminer des règles et de représenter des préférences. De sorte que notre modèle ne pourrait pas représenter le jeu des animaux[8], ou le « fort da » game[9] du bébé observé par Freud. Chiffrer une préférence est un moyen très pauvre de représenter un plaisir, une distraction ou une motivation. Or, si le rire est le propre de l'homme, le jeu serait le propre des mammifères et de ce fait exigerait peut être un modèle plus profond et plus universel de l'activité. Alors pourquoi, en retour, le jeu ne serait-il pas un modèle général de l'activité ou même de la vie ? Vouloir rendre compte de la transmission des connaissances dans les sociétés humaines n'est-ce pas s'intéresser à la caractéristique principale de l'espèce ? l'homme est un animal didactique !
b) Cette observation nous a amené à distinguer à l'occasion le *joueur* de l'*actant*. L'actant est le sujet du jeu tel que nous l'avons défini plus haut, le joueur est un sujet qui décide ou non d'être l'actant d'un jeu déterminé. Par exemple des jeux comme la bataille, ou le pile ou face en solitaire, n'entrent pas dans notre schéma : l'actant n'a aucune décision à prendre, les règles ne lui laissent aucun choix ni aucune stratégie. Seul le joueur prend une décision : celle de jouer ou pas, de lancer la pièce ou non, pour savoir s'il a de la chance, pour passer le temps sans réfléchir etc.

Par exemple dans le jeu « qui dira vingt », un élève, après avoir gagné successivement quatre parties (ce qui montre dénote qu'il sait que l'actant doit jouer « 17 » s'il le peut), sent son partenaire en train

[5] Ils ont fait l'objet d'un cours du DEA de Didactique de Bordeaux en 1976
[6] De Possel : « Sur la théorie mathématique des jeux de hasard et de réflexion »
[7] On retrouvera dans notre schéma, comme composantes, cinq des acceptions principales du terme « Jeu »
[8] Joëlle PAYEN et Georges THINES, *Le jeu des animaux* in Encyclopædia Universalis (1995)
[9] Guy Brousseau et Michael Otte : « *The fragility of knowledge*» in Mathematical knowledge : its grows through teaching, Kluwer academic press (1991)

de se décourager, et pour avoir le plaisir de jouer encore, il perd volontairement la partie en répondant 16 à 15.

c) Pour le joueur, le jeu n'est pas la vie, mais une activité en quelque sorte théâtrale Pour l'intéresser, le jeu doit ressembler suffisamment à la vie, au moins par certains aspects, et pour cela solliciter ses ressources et ses sensations en tant qu'actant, il doit permettre ainsi au joueur de mettre en jeux ses émotions suffisamment mais sans trop de risques. Lacan explique à propos du fort-da game comment la chaîne du sens se nourrit des frustrations qu'un jeu tend à équilibrer, lequel jeu crée nécessairement des frustrations nouvelles – en particulier parce qu'il est un jeu, qui nécessitent l'entrée dans un nouveau jeu dans lequel l'ancien entre comme symbole etc. Parmi ces processus se trouvent les apprentissages. Ainsi apparaît le rôle d'un des paramètres principaux des jeux : l'incertitude du joueur, composante essentielle de l'ouverture du jeu. Lorsque l'actant est capable à coup sûr de mettre en œuvre une stratégie gagnante, ou lorsque l'enfant prend conscience que la bobine qu'il fait disparaître et apparaître ne fait qu'obéir à ses mouvements, le jeu perd ses propriétés d'ouverture et d'équilibration, donc sa signification pour le joueur.

Ces observations ont guidé les recherches bordelaises sur les situations à usage didactique et sur les processus d'apprentissage dans les années 75-80[10].

d) Le joueur pourrait être le sujet « universel » de la structure du milieu [Brousseau- Margolinas.] Mais lorsqu'il faut décomposer une situation réelle en ses composants plus simples il y a autant d'actants que de sous situations, et a priori autant de joueurs que d'actants.
e) Le modèle ne précise pas si l'actant est un *sujet isolé* ou une *institution*, dès lors que les états du système, les décisions et les gains sont observables. L'élaboration de la décision dans une institution par exemple fera l'objet d'un autre modèle. La modélisation d'un système social complexe s'opèrera ainsi par décomposition de l'activité réelle en éléments modélisables séparément qui seront ensuite recombinés. Un sujet pourra être assujetti simultanément à plusieurs « jeux » avec des systèmes de priorité. Par exemple il faut supposer que deux actants en communications sont engagés en coopération dans une action commune de façon à donner du prix à la qualité de l'expression de l'un et aux efforts de compréhension de l'autre, mais en cas de difficulté, s'il faut attribuer la faute à l'un ou à l'autre ils se retrouvent concurrents.
f) De même l'actant n'est pas forcément un élève ni même un apprenant. La vocation de ce type d'analyse à expliquer des phénomènes uniques comme l'apparition *historique d'une connaissance* mathématique reste donc entière.

Le primat de la spécificité des connaissances

a) En didactique des mathématiques, ces « modèles » sont utilisés essentiellement comme des instruments de recherche, comme des moyens de mettre à l'épreuve la consistance des analyses et des explications des phénomènes de didactique. Même lorsqu'ils ont servi à construire de l'ingénierie didactique, ils n'ont jamais été donnés comme des « exemples » à reproduire, a fortiori comme des principes à utiliser directement pour guider la décision des professeurs et à enseigner aux futurs professeurs. Bien au contraire ce qui suit montrera la complexité du système société / professeur / élève et les dangers des extrapolations improvisées qui ignorent le champ de validité des modèles et abusent des métaphores.
b) En particulier l'interprétation des activités en termes de jeux n'a de valeur et d'utilité que si on spécifie la *connaissance* à laquelle on s'intéresse et le jeu ou la *situation* qui lui est spécifique. Par exemple la connaissance de l'espace et celle de la géométrie[11] ne sont pas des réponses aux mêmes conditions, que ce soit dans l'histoire ou dans le développement d'un enfant, même si elles semblent avoir un objet commun. On ne joue pas au même jeu pour construire l'une et l'autre, il n'y aucune raison d'imaginer a priori des nécessité « idéales » de trouver ces processus semblables ou même uniformément complémentaires.

[10] voir entre autres Fulgence Koné, « Analyse des situations didactiques à l'aide de la théorie du jeu » DEA de l'IREM de Bordeaux, 1980
[11] voir G. BROUSSEAU « *Les propriétés didactiques intrinsèques de la géométrie* » à paraître et plus anciennement l'ouvrage de R. Berthelot et M. H. Salin «L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire » IREM de Bordeaux 1992

c) Par contre, si les mauvaises connaissances conduisent souvent à des erreurs - ou à des apprentissages -, il n'y a pas de raison de supposer que les erreurs sont toutes produites par des « mauvaises » connaissances ou par des dysfonctionnements spécifiques du sujet. Les grandes extrapolations qui font abstraction des particularités des situations et des connaissances sont souvent trompeuses. C'est pourquoi les connaissances du sujet ne seront pas classées par l'observateur en bonnes ou mauvaises au motif qu'elles sont conformes ou non aux siennes. Leur valeur est estimée en situation. Une connaissance fausse peut exister chez un sujet dès lors qu'elle a dans sa situation un domaine d'efficacité.

d) Reconnaître ainsi que chaque institution peut avoir un choix, un usage, un langage, une organisation particulière et une validation spécifique de SES connaissances, différent de ceux que propose une autre institution – celle des savants par exemple – est indispensable pour expliquer le fonctionnement et l'évolution de ces institutions. Ce n'est en aucun cas établir une espèce de relativisme généralisé (du moins tant que l'observateur respecte la consistance rationnelle et de la rigueur scientifique et honore les exigences de son appartenance effective à la communauté).

e) Mais la conséquence est aussi le refus d'extrapoler sans précaution des conclusions d'une situation à un autre, d'une branche à une autre, d'une discipline à une autre. En particulier, nous pouvons parfois étendre à l'étude de la connaissance de l'algèbre, certaines conjectures validées pour celle de la géométrie, mais seulement sous réserve de nouvelles validations. Certaines de nos conclusions sont probablement vraies pour d'autres connaissances non mathématiques et nos méthodes peuvent s'y révéler utiles, et inversement, nous n'hésitons pas à emprunter ce qui est vrai ou utile à notre propos, mais toujours sous réserve d'un contrôle spécifique. Notre réticence à étendre à notre champ, certains résultats établis dans d'autres, ou certains principes « généraux » est légitime, justifiée. La psychologie peut se révéler précieuse pour expliquer les comportements du joueur, elle n'offre aucune ressource pour expliquer ceux de l'actant. La plupart des importations de ce typent relève de la métaphore. Mais de simples raisons de proximité sociale ou professionnelle ou même épistémologiques sont insuffisantes.

2. L'apprentissage comme adaptation spontanée à un jeu

a) La régularité des décisions ou des stratégies peut témoigner d'une certaine connaissance. Chaque connaissance pertinente détermine
   - une incertitude de l'actant,
   - une plus ou moins grande adéquation des décisions qu'elle permet d'envisager,
   - un coût des actions ou des efforts, une fiabilité
   - et une espérance de gain, (une utilité), …

qui peuvent être estimés ou calculés et confrontés à l'observation.

Les changements du système de décision témoignent d'une modification des connaissances. Certains changements diminuent l'incertitude de l'actant, d'autres au contraire l'augmentent (par exemple il envisage des possibilités qu'il ignorait auparavant).

Certains changements améliorent l'adéquation des réponses de l'actant (augmentent ses gains ou son espérance de gain, ou diminuent ses efforts) d'autres non. Toutes les modifications peuvent marquer un apprentissage, mais l'usage tend à réserver ce terme pour les « améliorations » au sens du rapprochement avec les connaissances de l'observateur.

b) L'hypothèse générale est que par des procédés qu'il n'est pas nécessaire ici de préciser, l'actant tend à retenir les modifications avantageuses (c'est-à-dire celles qui améliorent le gain et qui minimisent les coûts de ses actions) et à les rechercher. L'apprentissage est ainsi « expliqué » par le modèle. Il existe de nombreux exemples d'études de ce type.[12] Il n'y a pas lieu ici de discuter les rapports entre la vérité et l'utilité, mais il est important de distinguer le choix d'une croyance en raison de son utilité, et la validité de cette croyance. Le principe pragmatiste de Ramsey[13] (1927) posait que « la vérité des croyances garantit la réussite des actions ». Il est facile

[12] L'apparition spontanée de « théorèmes en actes », puis de théorèmes effectifs au cours d'un jeu de Nim (la course à 20) a été étudiée et calculée par ces méthodes. Cahiers de l'IREM n°11, 1972

[13] Ramsey : facts and propositions cité par J. Dokic « l'action située et le principe de Ramsey » in *La logique des situations* Michel de Fournel et Louis Quéré éditions de l'EHESS 1999.

de montrer que ce n'est vrai que dans certaines conditions et de construire des situations effectives qui le contredisent.

c) Il faut remarquer ici le rôle d'un paramètre important le *laps de temps* sur lequel portent les comparaisons de stratégies ou de connaissances, ou, ce qui revient au même, la capacité de mémoire et d'anticipation de l'actant. D'autre part, il est réaliste de supposer que l'actant possède une capacité de représenter le milieu, en particulier pour anticiper ses réponses, et pour y projeter des *fréquences d'emploi* des connaissances utilisées (fréquences observées ou estimées).

La considération

- des coûts d'utilisation de deux connaissances - disons à titre d'exemple, de deux algorithmes - pertinentes et également adéquates dans une même situation,
- de leur fréquence de rencontre dans laps de temps assez long,
- et d'un certain coût à l'apprentissage qui représente les efforts à faire pour passer d'une connaissance à l'autre, …

permet d'énoncer quelques relations (essentiellement des inégalités) qui sont supposées conditionner l'apprentissage

La considération de l'augmentation de l'adéquation dans un champ plus vaste, de la fiabilité et de l'espérance de gain, conduit en général à envisager des fonctions assez complexes dont les paramètres sont difficiles à déterminer. Nous avons pu obtenir des résultats intéressants avec des modèles numériques[14], mais la plupart du temps il a fallu se satisfaire de comparaisons qualitatives (de modèles topologiques).

d) Les modèles d'apprentissages évoqués ci-dessus sont jusqu'ici totalement empiriste, leur évolution est basée sur des conditions « locales ». Or rien n'oblige une amélioration substantielle à être la somme d'améliorations locales, au contraire. Nous avons pu montrer comment des adaptations à certaines conditions locales peuvent contribuer au développement de connaissances inappropriées dans des conditions plus générales, et faire *obstacle* à des apprentissages ultérieurs[15]. (c'est un des résultats qui contredisent le principe de Ramsey).

e) Les positions de l'actant et du joueur peuvent être opposées : par exemple le goût excessif du joueur pour l'incertitude du jeu peut le conduire à refuser ou à se désintéresser d'un apprentissage qui le priverait de son plaisir. Nous avons observé des phénomènes de ce genre chez des enfants chez qui apprendre signifiait faire le deuil de leur innocence, grandir, quitter le confort de l'enfance[16].[17] Bernard Sarrazy rapporte des anecdotes qui illustrent mon propos :

- une élève : - « demande au maître », l'autre : - « non, lui il sait, on ne pourra plus chercher »
- Quand tu ne sais pas que fais-tu ? réponse de la fillette – je demande à Noémie parce qu'elle ne sait pas non plus

3. Situations et automates

Plusieurs théories mathématiques permettent de considérer le fonctionnement des situations de différents points de vue.

Une stratégie est un *algorithme* de décision. Un actant qui, dans un jeu, suit une stratégie déterminée, forme avec ce jeu un *automate*. Si la stratégie, ou la réponse du milieu est aléatoire l'automate est un automate stochastique. Certains automates peuvent aussi être considérés comme des *canaux* en théorie de l'information…

Les « résultats » du fonctionnement d'un automate peuvent être considérés comme des mots provenant d'un langage généré par un répertoire (une syntaxe et un vocabulaire). Les langages et les

[14] Par exemple les résultats sur l'efficacité des méthodes de calcul humain des multiplications ou des divisions de naturels, « Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?» dans les actes du congrès « *l' apport des sciences fondamentales aux sciences de l'éducation* ». Tome 1 pp 364-378. épi

[15] Ce phénomène repéré dans l'histoire de la physique et analysé par Bachelard sous le nom d'*obstacles épistémologiques* a été étendu, au prix de quelques modifications aux mathématiques, par les didacticiens.

[16] Guy Brousseau : « The case of Gael » *in Journal of mathematical Behavior* 18 (1), 7 –52

[17] Certains ont cru observer le même phénomène chez des mathématiciens et chez des professeurs à l'égard de la didactique

automates peuvent être classés suivant leurs propriétés (modèles s-r, automates finis, C-langages, automates à piles de mémoire etc.) et cette classification permet de distinguer leurs propriétés évolutives respectives.

L'étude des automates abstraits et des grammaires formelles parait très éloignée des jeux et de l'enseignement qui nous intéressent. C'est pourtant par ce moyen qu'on a pu se convaincre que le jeu du professeur n'est pas réductible au jeu du mathématicien ou de l'élève. Le plus souvent l'étude en termes de jeux d'une situation mathématique ou didactique relève de mathématiques beaucoup plus modestes et de calculs élémentaires qu'il faut oser faire.

4. Conclusions

Il est inutile de rappeler ici les schémas auxquels conduit la modélisation : les situations d'action, de communication, de validation et de preuve, les différents types de connaissances qui s'y manifestent, et les schémas propres d'évolutions spontanées qui leur correspondent. Cette partie de la théorie est assez répandue sinon bien connue.

Il doit être clair que la modélisation en termes de jeux des situations d'usage, d'apprentissage et plus loin d'enseignement des mathématiques n'a pas pour objet de déterminer directement certaines catégories de situations qu'il faudrait impérativement préférer à d'autres. Au contraire, toute situation où se manifeste un usage, un apprentissage ou un enseignement des mathématiques, qu'il soit correct ou non, efficace ou non, amusant ou non – ou même soit seulement une intention - est susceptible de faire l'objet d'une modélisation en termes de jeux dans la théorie des situations. La réticence de nombreux scientifiques à utiliser des modèles mathématiques pour étudier des phénomènes humains est compréhensible à cause de nombreux mésusages qu'ils ont pu constater. Mais les erreurs ne résident pas dans les modèles – et encore moins dans leur caractère mathématique ou non -, elles résident dans leur emploi sans précaution et sans rigueur. Parmi ces erreurs on peut relever principalement leur emploi comme métaphores - i. e. hors de leur domaine de validité -, et l'utilisation concomitante de modèles incompatibles etc.

II
Les mathématiques comme Jeux

1. Généralités

Par nature, le champ des mathématiques est infini. Chaque partie, chaque élément est susceptible de se combiner avec d'autres pour créer des questions et des objets nouveaux et les résultats sont toujours différents, par leur objet, par leur présentation, par leur fonction etc. De plus chaque partie est susceptible de devenir le métalangage d'une autre (en s'y appliquant). Elles se prêtent par conséquent à une infinité d'interprétations. D'ailleurs s'il existait réellement un modèle générateur des mathématiques, elles n'existeraient plus. Il n'existe pas de générateur automatique de la pensée mathématique ni dans les mathématiques ni a fortiori hors d'elles.

Ces remarques rassureront ceux qui auraient pensé que j'avais l'outrecuidance de proposer un modèle général de l'activité mathématique. Mais je me permettrai en retour d'opposer cette observation à ceux qui voudraient rejeter nos modèles locaux dans le « no-maths land » pour nous en imposer d'autres au motif qu'ils représentent l'opinion commune des experts. Une opinion commune des experts *sur leur travail* – à supposer qu'il en existe en dehors de ce qui est spécifiquement mathématique - est éminemment respectable et digne d'intérêt, mais elle ne fait pas partie en général de leur domaine de savoir.

Ceci dit, les descriptions et les analyses ne manquent pas :

- que ce soit en métamathématique (en logique mathématique) où l'essentiel consiste à déterminer, engendrer, construire, reconnaître les *textes valides* de mathématiques,
- que ce soit en épistémologie où il est accepté de prendre en considération l'ensemble des discours de mathématique avec des catégories rhétoriques plus larges,
- que ce soit plus modestement par l'introspection sur les heuristiques
- que ce soit en psychologie, même élargie aux sciences cognitives

Les types de modèles que nous avons retenus avec la théorie des situations ne rejettent pas les apports de ces différents domaines, au contraire ils permettent de préciser les conditions dans lesquelles ces domaines peuvent intervenir. Mais ils les plongent dans une perspective plus large où la sociologie et l'anthropologie interviennent aussi.

2. Premiers modèles de situations mathématiques

Il n'est pas possible de rentrer dans le détail de cette modélisation dans le cadre de cet article. Nous donnons dans l'annexe quelques exemples de situations.

La première (**Qui dira vingt ?)** fait apparaître chez les élèves des théorèmes en actes où s'illustre bien le rôle complémentaire des processus fondamentaux (action, formulation, preuve) dans le début d'une étude de la division.

Toutefois l'attention portée aux milieux et aux conditions spécifiques de l'apparition des connaissances mathématiques fait émerger des phénomènes originaux étrangers à chacun de ces domaines. Ces modèles permettent de rapprocher des processus apparemment très particuliers et très spécifiques, soit d'un individu, soit d'une connaissance soit d'un moment de l'histoire, et de les interpréter, de les expliquer comme des phénomènes reproductibles, c'est-à-dire susceptibles d'être enseignés.

La représentation des mathématiques la plus répandue est celle d'un système complètement déductif. Elle consiste en gros à considérer la logique mathématique et l'ensemble des énoncés constituant la connaissance actuelle d'une théorie mathématique comme un répertoire de règles. Le jeu consiste alors, *conformément à ces règles*, à construire de nouveaux énoncés valides portant sur les objets de la théorie.

Dans un modèle simplifié : chaque joueur reçoit une collection de signes, et, comme au rami doit s'en débarrasser en posant sur la tables des formules d'un genre convenu (des expressions bien formées, des énoncés fermés valides, etc.) il peut, soit disposer de nouvelles formules, soit transformer ou utiliser les énoncés déjà disposés sur le tapis.
Il est clair qu'ici, les connaissances nécessaires doivent être *préalablement* connues des joueurs et acquises ailleurs que dans le jeu, où elles ne trouvent même pas de justification (sinon la consistance).
Si un joueur avait posé en 1993, la formule

$$« \exists\, n > 2,\ \exists x, \exists y, \exists z \in N\ :\ x^n + y^n = z^n »$$

Les autres joueurs n'auraient pas pu décider d'accepter ou de rejeter sa proposition.

Ce jeu simule l'activité mathématique de façon excessivement superficielle. Il ne rend compte que d'un certain mode de génération de certains de ses résultats : *les parties formelles des textes de mathématiques*. Les textes mathématiques se présentent, sous leur forme canonique, comme s'ils étaient générés par l'effet (par le jeu) de raisonnements logiques, à partir d'axiomes et de résultats déjà établis. Bien qu'on ait pu imaginer des automates qui accomplissent ce type de travail, les parties des mathématiques qui peuvent être engendrées par cette combinatoire aveugle sont encore infimes et peu pertinentes, mais cette représentation très générale du fonctionnement des mathématiques joue un grand rôle, en particulier hors du milieu mathématique.

Nous trouverons en 2ème annexe « **le Jeu de la preuve** ». Sur la même représentation théorique, il met en scène la production de certains théorèmes et axiomes de logique comme moyen de régler des conflits entre un proposant et un opposant. C'est exactement ce « jeu » proposé par P. Lorenzen en 1967 dans son ouvrage « Métamathématique » qui est à l'origine de la théorie des situations. Ce que nous proposons quelques années plus tard est assez bien représenté par le troisième exemple en annexe : « **le nombre le plus grand** » tend à *montrer aux élèves* à quoi jouent les mathématiciens en le leur faisant faire.

.

3. L'activité mathématique

La didactique s'intéresse autant à l'activité mathématique qu'à ses résultats : la création et l'apprentissage de mathématiques. Car la simple récitation de textes ne sauraient être tenue pour de la connaissance. Il faut donc déterminer quels sont les problèmes et les exercices qui, dans le cadre de règles admises (l'énoncé et les connaissances supposées « acquises ») vont exiger l'exercice des connaissances voulues.

Tous les problèmes et tous les exercices sont susceptibles d'être modélisés par des jeux au sens que nous avons présenté plus haut, quand ce serait par le Quiz le plus fermé et le moins ludique.

Ce point souligne la différence entre le point de vue des professeurs et celui des didacticiens : si *toutes* les questions de mathématiques peuvent être considérées comme des jeux, la notion de jeu ne peut plus servir aux professeurs pour opposer certaines formes d'exercices à d'autres. Par contre, pour l'analyse de ce qui fait la différence entre une situation et une autre, il est nécessaire de les embrasser dans un même concept. Mais cela ne légitime pas l'usage assez fréquent des professeurs qui devant leurs élèves appellent « jeu » des situations qui ne correspondent pas à l'usage ordinaire de ce mot. Les simples questions, les situations qui ne sont pas reproductibles, celles dont la consigne est floue et constamment modifiable, celles au cours desquelles l'élève n'a, de fait, aucune décision à prendre, bref des situations où il ne joue pas, ne doivent pas être appelées « jeux ». Il vaut mieux avoir avec les élèves un vocabulaire didactique simple, pratique, précis mais surtout honnête.

De plus tout énoncé de mathématique peut être converti en un assez grand nombre de problèmes. De sorte que le champ des exercices susceptibles d'être proposés est immense. L'enseignement « doit » choisir un sous-ensemble minimal de ce champ dont la fréquentation permettra de générer une probabilité raisonnable de répondre aux autres questions (Heureusement la plupart de ces problèmes n'ont pas un intérêt primordial pour la compréhension des mathématiques).

Le problème central de la didactique est donc de produire les connaissances nécessaires. Comment les conditions dans lesquelles une connaissance est produite dans une certaine situation, la rend-elle susceptible ou non d'apparaître dans une autre ? Quelles conditions rendent cette capacité optimale ? Il est clair que certaines résident presque entièrement dans la matière elle-même et dans son organisation alors que d'autres sont plus spécifiques des situations ou des sujets.

La « situation est la seule chose sur laquelle le professeur peut agir pour susciter chez ses élèves les *activités* dont il espère qu'elles produiront les *résultats* voulus. La théorie des situations examine les effets des situations sur un actant rationnel et « économique », mais elle fait apparaître que le résultat – le comportement - seul ne contient jamais toute l'information nécessaire pour augurer des comportements futurs : les circonstances et notamment les activités qui l'ont accompagné jouent un rôle important. Par conséquent, l'examen des rapports entre l'activité mathématique du sujet, l'accroissement de son répertoire de connaissances et ses possibilités de résoudre de nouveaux problèmes sont l'objet essentiel de la modélisation. Il est ensuite possible de confronter les prévisions à des expériences effectives.

La détermination des connaissances se fait évidemment par les mathématiques, mais pas nécessairement par la seule culture mathématique des mathématiciens. L'utilisation des regroupements en théories, en branches, en secteurs, pratiquée à un moment donné par (une partie majoritaire de) la communauté mathématique est évidemment soumise à certaines conditions : il est nécessaire de pouvoir concevoir les situations nécessaires et qu'elles satisfassent les conditions didactiques qui commandent leur mise en œuvre. Mais le débat n'est pas seulement technique et praxéologique, la didactique propose des conditions épistémologiques qui lui sont propres.

4. Mathématiser

La considération des situations conduit à envisager de nombreux critères de classification des activités mathématiques.

Elle tend à justifier par des arguments d'ergonomie le regroupement de connaissances en entités cognitives composées d'une collection d'objets, d'énoncés, de questions, de démonstrations rapprochées à la fois par divers facteurs, entre autres :

- proximités logiques, les énoncés se déduisent les uns des autres, ou se réfèrent à une même théorie,
- proximités sémiologiques, les connaissances s'expriment dans le même système linguistique
- proximités sémantiques, les énoncés se rapportent à des mêmes types d'objets
- proximités pragmatiques, les énoncés et les objets sont « souvent » co-présents dans les problèmes, mathématiques ou non, effectivement familiers ou envisagés.

Ces regroupements peuvent être des notions, des théories, des concepts, des cadres, etc. Ils peuvent être culturels, relatifs à une institution particulière, ou personnels. Ils ne sont évidemment pas disjoints et une même situation en mobilise souvent plusieurs.

En considérant les rapports possibles de deux de ces groupements, on obtient diverses classifications classiques : identifier, reconnaître, réorganiser, axiomatiser, appliquer, généraliser, théoriser etc. Il est plus commode d'évoquer leur appartenance ou non aux mathématiques mais en fait les relations sont du même ordre.

Par exemple, mathématiser peut consister à mobiliser des moyens mathématiques connus pour traiter d'un groupement non mathématique, ou au contraire créer un moyen mathématique de traiter un objet d'un groupement non mathématique, ou réorganiser un groupement mathématique en un autre groupement mathématique. La transformation en problèmes ou la production de réponses font partie des activités auxquelles se livrent les mathématiciens, qui pourraient s 'interpréter en termes de jeux aux motivations très variées. Thurston résumait ces motivations par une seule « Améliorer la compréhension humaine des mathématiques »

5. Faire des mathématiques

Il reste à savoir s'il y a une différence entre l'activité d'un mathématicien qui « pense » un énoncé et celle d'un utilisateur, d'un professeur ou d'un élève qui « pense » le même énoncé. Quelle différence y a-t-il entre « faire » des mathématiques nouvelles pour l'humanité, « utiliser » des mathématiques connues de l'actant pour résoudre un problème, et « penser » des mathématiques dont on ignore si elles ont été « faites » précédemment ? Il est important de le savoir pour réduire la distance, si elle existe, entre l'activité des uns et des autres. Postuler que toutes les activités sont « naturellement et nécessairement » identiques (psychologiquement ? socialement ? didactiquement ?) à la production initiale n'avance pas le débat.

La différence entre la citation, la récitation, et la production « autonome » n'est-elle que psychologique ? La première et la millième occurrence d'un théorème présentent-elles des différences autres que simplement psychologiques ?

Une institution peut-elle produire ses propres mathématiques, et peut-elle réorganiser les mathématiques de la culture selon ses besoins ? Une institution d'enseignement peut-elle le faire ? Peut-elle éviter de le faire ?

C'est probablement dans ce genre d'analyse où l'on admet l'existence de transformations des mathématiques pour mieux les étudier – des transpositions, volontaires ou non-, que la didactique et notamment la théorie des situations se révèlent utile.

Le professeur essaie d'obtenir que les comportements attendus de ses élèves – la réponse exacte à un exercice par exemple- soit le fruit d'une « activité mathématique » effective aussi « riche » que. Si son ambition est excessive, les élèves ne produisent rien et leur activité est vide. Si son ambition est trop modeste, le résultat n'a demandé et produit aucune « activité mathématique » non plus. Il s'agit donc d'un problème de conduite optimale d'une situation appropriée.

Que veut dire « une activité mathématique riche » ? C'est une activité :

- effective, personnelle de la part de l'étudiant
- importante en quantité et en complexité,

- portant sur des énoncés, eux-mêmes considérés comme importants dans la culture mathématique, c'est-à-dire producteurs de questions et de réponses dominants dans la discipline
- susceptible d'enseigner « quelque chose à l'élève », c'est-à-dire assez nouvelle par rapport à son répertoire de connaissances mais assez facilement productible dans ce répertoire
- susceptible de rendre plus facile à mémoriser, à utiliser, à reproduire, une connaissance déjà enseignée
- ou enfin capable de rendre plus facile l'apprentissage futur d'une connaissance importante, impossible à aborder directement.

Pour organiser une activité mathématique, le professeur doit posséder une situation où les élèves, en tant qu'actants, peuvent revivre une aventure incertaine dans laquelle les connaissances se manifesteront « nécessairement » comme des éléments déterminants d'une issue souhaitée. La question de savoir dans quelle mesure cette situation doit être similaire – bien que transposée- à celles qui ont cours dans les institutions réelles ou dans l'histoire est un des objets de la didactique. Comme Socrate dans le dialogue du Menon, tous les professeurs savent déployer la démonstration d'un théorème difficile en une longue suite de questions faciles auxquelles les élèves peuvent répondre avec un répertoire mathématiques réduit et une activité pauvre. La facilité et même la complaisance avec laquelle nous assimilons cette démarche avec l'établissement du théorème sont la mesure exacte de notre ignorance en didactique. (Subie ou voulue, cette ignorance est bien commode).

III
Le Jeu de l'enseignement des mathématiques

1. Modélisations : à quoi jouent les professeurs ?

Il s'agit donc maintenant d'observer les jeux du professeur et de son environnement, et pour cela déterminer les institutions différentes auxquelles il doit s'assujettir. Elles définiront autant de jeux distincts qui structurent le milieu de l'enseignement[18] :

La situation où l'élève sera un sujet autonome, « faisant des mathématiques, c'est-à-dire agissant, communiquant et/ou résolvant un problème comme cela a été évoqué au chapitre précédent, est d'abord connue du professeur comme « jeu personnel ». Il la connaît en tant que mathématicien, en tant qu'actant, que communicant ou que résolvant, lui-même.

Mais elle doit être aussi connue de lui comme moyen didactique. La capacité pour un professeur de considérer cette situation comme le feront ses différents élèves et de prévoir leurs réactions est sans doute une des tâches les plus difficiles de l'enseignement. De plus, la résolution des meilleurs problèmes ne produit pas nécessairement des apprentissages. L'élève doit entrer dans un projet et dans un « jeu de l'apprentissage » que le professeur doit préparer, proposer et gérer.

La conception et la mise au point des situations dans lesquelles les élèves vont pratiquer les mathématiques constituent la partie la plus simple des jeux de l'enseignant. Celle en tout cas qu'il peut concevoir comme un jeu sans « ruse » et où il peut le plus facilement bénéficier de la culture. Ces jeux »simples ne feront ici l'objet que d'un rapide inventaire dans le paragraphe suivant. .

Mais avant et après avoir été un actant ou un apprenant autonome, le sujet doit être un élève. Il doit entrer dans un rapport didactique spécifique avec son professeur. L'étude de la répartition des responsabilités techniques (spécifiques du contenu), entre l'enseignant et l'apprenant permet de distinguer toute une série de « jeux » didactiques. Les situations faiblement didactiques peuvent se dérouler de façon régulière, c'est-à-dire avec des règles qui restent fixes tout au long de l'activité d'enseignement. Mais la mise en place de tous ces jeux, et surtout la mise en place et le déroulement des situations fortement didactiques, soulèvent des difficultés qui relèvent de modèles différents des

[18] Guy Brousseau « le contrat didactique, le milieu » in RDM, Vol. 9/3 pp309-336. La pensée Sauvage

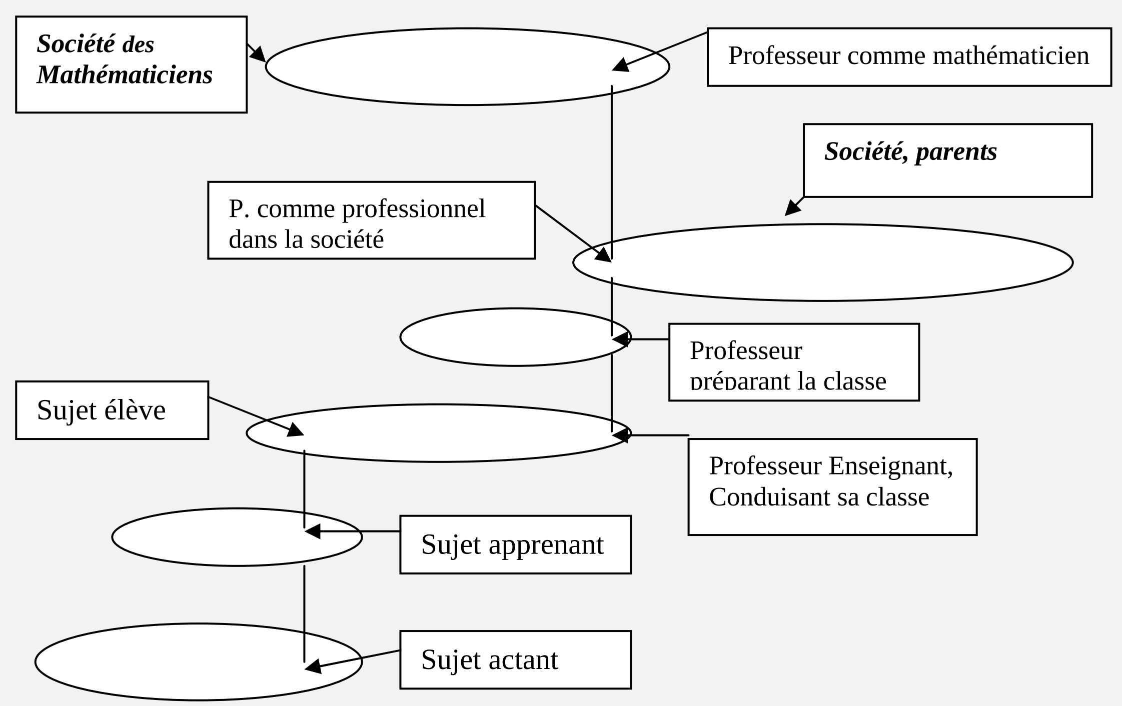
précédents. Dès qu'il s'agit d'articuler l'action autonome du sujet avec la dépendance incontournable de l'élève, dans un rapport qui renvoie au professeur une certaine obligation de résultats, des contradictions apparaissent. L'enseignement se mue en une sorte de négociation autour de supposés contrats, jamais explicitables, mais toujours nécessaires et jamais tenus. Les modèles de jeux sont alors très différents, ils comprennent une part non négligeable de « ruse » de pari, de bluff, et finalement de « théâtre ». L'étude du « contrat didactique » sera esquissée dans le deuxième paragraphe. Nous les signalons comme des doubles jeux parce que les situations paradoxales naissent de la conjonction d'assujettissements : l'actant et l'élève, l'actant et l'apprenti, l'apprenti et l'élève, suivant les moments, coopèrent ou sont concurrents, le professeur est assujetti à son rapport aux élèves, mais aussi à la société et à la communauté des mathématiciens. Le jeu avec chacun d'entre eux peut être « simple », mais les combinaisons ne sont pas nécessairement exemptes de contradictions. Ce qui conduit à des évolutions dialectiques où les situations les plus simples ne peuvent plus être jouées.

Les deux derniers exemples présentés en annexe sont, en fait, des suites de situations qui constituent des processus didactiques.

Le premier présente ce qui pourrait être le premier contact des élèves avec la pensée algébrique. Passer du traitement (établissement, exécution, interprétation) d'algorithmes et des calculs d'expressions mathématique à celui d'énoncés clos, de relations, présente une rupture suffisamment importante pour rendre difficile l'établissement de la nouvelle situation didactique. L'exemple proposé montre une suite de jeux par laquelle l'élève va pouvoir investir la recherche du terme inconnu d'une somme (en première ou deuxième année de primaire). Il montre pourquoi la dévolution à l'élève de ce nouveau type d'activité mathématique est bien un problème de didactique et beaucoup moins une question de psychologie.

Le second exemple sert à plusieurs fins : il montre comment la théorie des situations permet de distinguer (et de faire distinguer aux élèves) la connaissance de l'espace et l'étude de la géométrie. Accessoirement, il montre un exemple de la duplicité nécessaire du professeur et de l'importance pour lui de se considérer aussi comme un acteur : avoir un beau rôle est une chose, avoir un bon texte en est une autre, le faire vivre à l'élève comme *son* aventure ici et maintenant, même après 200 représentations est indispensable.

a) Structure des modèles : les assujettissements



b) Les différents « contrats didactiques »
Ils fixent la nature et la répartition des enjeux de la relation entre l'émetteur et le récepteur des connaissances
Contrats faiblement didactiques :
Diffusion de connaissances sans intention didactique
- Contrat d'émission
- Contrat de communication
- Contrat d'expertise
- Contrat de production
- Contrats d'information (dialectiques, dogmatiques, axiomatiques)
- Contrat d'utilisation des connaissances
- Contrat d'initiation et de contrôle
- Contrat d'instruction et de direction d'études

Contrats fortement didactiques
- Contrat de familiarisation
- Contrat d'ostension
- Contrat de conditionnement (behaviorisme)
- maïeutique socratique
- contrat d'apprentissage empiriste
- contrats constructivistes
- contrat de reprise des savoirs anciens

Réf. Cours n°2 Ecole d'été 1995 et « Théorie des situations didactiques » à paraître.

2. Les jeux « simples » de l'enseignement des mathématiques

Simple énumération pour mémoire …

a) L'organisation du jeu des élèves dans les contrats fortement didactique : avant la leçon,

Elle consiste à :

- Déterminer la situation a-didactique (ce qui doit provoquer une décision ou une adaptation spontanée de l'élève) et évaluation de ses caractères ;
- Déterminer « la » connaissance à apprendre, la placer dans une genèse didactique ;
- Déterminer les règles d'un jeu spécifique de la connaissance à apprendre, (conditions, question, enjeu), c'est-à-dire la situation
- Evaluer les paramètres de cette situation correspondant aux divers types de décisions :
    - la part de réflexion, de hasard ;
    - le jeu des possibilités de décision ;
    - l'incertitude totale et l'incertitude liée à chaque répertoire de connaissances ;
    - les informations spécifiques modifiant cette incertitude (l'augmentant ou la diminuant), le classement de ces informations suivant qu'elles laissent ou non à l'élève une possibilité d'exercer personnellement la connaissance en question et les modes possibles d'obtention de ces informations : milieu (non intentionnel), milieu intentionnel (autre élève, ou professeur) ;
    - les caractéristiques didactiques qui en découlent : le temps d'obtention d'une première réponse correcte dans une population d'individus isolés donnée ; les possibilités de percolation offertes par la situation (communications), les possibilités de contrôle et d'acceptation des solutions communiquées, le jeu résiduel pour celui qui reçoit une solution, la possibilité et le temps maximal d'obtention d'une réponse correcte par chaque élève dans les conditions strictement a-didactiques etc. ;

- Evaluer la possibilité pour les élèves de saisir la situation comme un jeu c'est-à-dire quelque chose qui peut être rejoué ou retrouvé ailleurs. Caractère plus ou moins fondamental de la situation ;
- Evaluer la possibilité de la situation
  - de provoquer des questions pertinentes, et surtout adéquates à une acquisition « rationnelle » de nouvelles connaissances,
  - et d'enclencher ou de poursuivre une « dialectique » constituant une genèse de la connaissance qui pourra être institutionnalisée.
- Evaluer les difficultés et les obstacles que la situation peut présenter ou développer

b) La détermination des modalités de la mise en situation des élèves :

Elle consiste à :

- déterminer la consigne finale, les conditions initiales de la mise en jeu des joueurs
- déterminer les étapes de la dévolution (mise en jeu a-didactique : voir l'exemple 4 de l'annexe)

c) La détermination des caractères didactiques de la situation d'enseignement

Elle comprend :

- L'évaluation des paramètres de la situation didactique : temps disponible, durée de la phase adidactique disponible, nombre de reproductions – de parties - compatibles avec le jeu lui-même et avec le temps d'enseignement disponible, probabilité d'acquisition a-didactique par un nombre « suffisant » d'élèves, modalités des interventions didactiques pour la régulation du processus
- L'évaluation du rendement didactique de la situation adidactique, par comparaison avec un contrat didactique « de base »

d) La « conduite » et la régulation du jeu des élèves par le professeur pendant la leçon

Le jeu de la gestion des situations consiste à maintenir l'incertitude des élèves et à la faire évoluer par

des interventions selon les règles,
des interventions sur les règles,

en se guidant sur des indices : comportements, erreurs, observation, réactions affectives, etc.
selon diverses stratégies : pragmatiques, logiques, rhétoriques. Ces dernières produisent différents effets tels que effet Topaze, Jourdain, analogie sur lesquels nous reviendrons plus bas.

e) Conclusions

La méthodologie évoquée ci-dessus est complexe mais séduisante. Elle fournit des éléments précieux pour l'ingénierie didactique. Mais les jeux « simples » tels que nous venons de les évoquer sont-ils des modèles convenables pour représenter la relation entre le maître et les élèves ? Peut-on penser que les rapports du professeur avec ses élèves suivent le modèle général des jeux de réflexion que nous avons utilisés jusqu'à présent ?

3. Les doubles jeux de l'élève :

a). Actant et Joueur

L'actant accepte la règle du jeu et cherche à gagner suivant cette règle, le joueur lui recherche à travers le jeu un plaisir non nécessairement défini par les règles du jeu. Par exemple dans la phase initiale du "qui dira 20" on voit des élèves qui ont la possibilité de gagner pour la quatrième fois consécutive, perdre volontairement pour éviter que leur partenaire ne se décourage et refuse de continuer à jouer. Ainsi chez ces enfants, l'actant cède le pas au joueur... qui est évidement la même personne. Autre exemple, beaucoup de joueurs s'intéressent plus à l'incertitude du jeu qu'au gain : s'ils découvrent une martingale ou une stratégie décisive, ils sont satisfaits mais aussi déçus et ils cessent de jouer, de même s'ils y a une explication, elle leur gâche le plaisir en "tuant le jeu". Certains enfants jouent l'ignorance pour continuer à vivre dans une confortable incertitude etc.

A propos d'une même situation le joueur et l'actant jouent en même temps à deux jeux différents qui se contrarient souvent.

B). Actant et Apprenant

Si, dans une situation l'actant a échoué, l'apprenant cherche des alternatives et tente de modifier son répertoire pour une nouvelle action. Le choix entre persister avec le même répertoire (agir) ou changer de répertoire (apprendre) est toujours le lieu d'un antagonisme douloureux. C'est la raison pour laquelle certains élèves répugnent souvent à entrer dans un jeu "auto-éducatif" : ils savent qu'il leur faudra engager des façons de connaître qu'il faudra abandonner par la suite. Certains enfants détestent cette expérience. Apprendre exige un certain détachement de l'action en cours, c'est au fond un autre jeu. Choisir d'apprendre c'est perdre l'innocence de l'enfance de l'art...

b). Apprenant et élève

Si l'actant ne voit aucune alternative à ses décisions, on serait tenté de penser que l'apprenant a tout intérêt à chercher ailleurs la connaissance qui lui a manqué ; C'est à dire de disqualifier l'actant dans sa démarche empirique autonome (de cesser le jeu de l'actant) et se faire "élève" de quelqu'un qui sait. On voit souvent des enfants qui, très jeunes, s'acharnent à la tâche et refusent systématiquement d'être aidés même après plusieurs échecs, puis qui, moins jeunes (après une scolarisation par exemple), deviennent des consommateurs effrénés de solutions toutes faites : "apprends moi !" et qui enfin renoncent à tout effort d'apprentisage : "ne m'enseigne pas... dis moi ce qu'il faut faire !"

c). Actant et Elève

L'action effective est coûteuse pour tout le monde, pour l'enseignant qui met en place la règle ouverte, et les moyens matériels, cognitifs et affectifs etc. de la jouer, et pour l'élève qui doit investir un concret inconnu, complexe, souvent peu attractif, peu fertile en expériences exaltantes, peu rentable en compréhension et en apprentissages et finalement même pas propre à être retenu comme paradigme d'une connaissance clairement identifiée. L'action insignifiante, l'action pour l'idéologie pédagogique de l'action est pire. En tout cas le va et vient entre le jeu de l'actant et le jeu de l'élève est le moteur toujours instable et essentiel de la relation didactique.

d) Le jeu didactique : un jeu avec des jeux

Le passage d'un jeu à l'autre est indispensable : convertir des savoirs en connaissances et en décisions dans l'action est aussi nécessaire que la transformation inverse de l'action à la connaissance, puis à la "compréhension", et au savoir... et aussi difficile ou plutôt comporte des risques de toutes sortes: il n'y a pas de voie assurée, pas de voie royale :

Reproduire une décision dans des conditions qui paraissent similaires entraîne le risque d'échec lorsque les circonstance diffèrent par des variable insoupçonnées, conserver la mémoire de "toutes" les circonstances fera qu'on ne retrouvera pas de situation identique et que l'exploration d'une nouvelle situation sera trop coûteuse, se satisfaire d'une représentation approximative ou d'un modèle hardi et le risque d'échec "s'opposera" à l'économie recherchée... S'exercer facilite l'action mais peut rendre difficile une autre adaptation, comprendre économise des exercices mais ne les remplace pas entièrement et peut même en cas d'échec compliquer l'action, se faire enseigner économise des expériences mais peut contrarier sévèrement les capacité d'adaptation etc. et ainsi chaque avantage à son inconvénient et chaque jeu son aide et son antagoniste entre lesquels les équilibres sont difficiles et instables :

Dans une situation une stratégie paraît avantageuse, l'actant l'utilise... l'apprenant doit-il alors prendre le relai de l'actant et "apprendre" cette stratégie, c'est à dire modifier son répertoire de connaissances pour rendre cette stratégie plus disponible ou plus facile dans une action future?

On serait tenté de dire "oui". Mais, si l'élève-actant résout le problème qui lui est proposé avec ses connaissances actuelles, il semble qu'il n'ait pas besoin d'apprendre de connaissance nouvelle au risque de surcharger son répertoire de considérations superflues ou même fausses.

Certes il faut "apprendre" ce que l'on sait" mais jusqu'à quel point?

Les idées exposées dans ce paragraphe ont été souvent sinon traitées, du moins exemplifiées dans de nombreux travaux de didactique des mathématiques.

4. Les « doubles jeux »[19] du professeur

1. La dévolution

Envisager l'enseignement comme la dévolution par le professeur à l'élève d'une situation d'apprentissage a permis de repérer certains phénomènes. La tentative de modéliser cette dévolution comme la négociation d'un « contrat » permet de les expliquer en grande partie et d'en prévoir d'autres.

L'aboutissement de cette démarche fera considérer le maître comme un joueur face à un système formé lui-même d'un couple de systèmes : l'élève et, disons pour l'instant, un "milieu" dénué d'intentions didactiques à l'égard de l'élève (même s'il est porteur des intentions didactiques du professeur).

Dans le "jeu" de l'élève avec le milieu, les connaissances sont les moyens d'appréhender les règles et les stratégies de base – celles qui sont nécessaires pour comprendre les règles), puis des moyens d'élaborer des stratégies gagnantes et d'obtenir le résultat cherché.

Dans le jeu du maître avec le système élève-milieu nous avons évoqué ce qu'il doit faire pour établir les règles et stratégies de base ainsi que les adaptations aux changements prévus de jeux de l'élève au fur et à mesure de son apprentissage. Nous avons vu qu'à chaque connaissance, et peut-être à chaque fonction d'une connaissance, doivent correspondre des situations (des problèmes) spécifiques et probablement des contrats didactiques. L'évolution des joueurs et du jeu — à l'encontre des jeux à règles fixes — conduit à des remises en causes des connaissances et du contrat didactique.

L'approche fournie par la théorie des situations met ce processus à la base même de la constitution des savoirs et permet de modéliser la façon dont ils articulent le spécifique et le général.

La reconstruction du savoir en situations didactiques conduit à divers paradoxes, à des contradictions apparentes. Il n'est pas lieu ici de développer cette modélisation, connue des spécialistes, mais la mise à l'épreuve de sa *cohérence* présente de l'intérêt : elle a permis de *préciser* les fonctions ou les relations qu'il convient de représenter par des règles dans les différents jeux et les difficultés de l'entreprise de modélisation du partage des responsabilités entre le professeur et l'élève et plus généralement entre le « décideur » et « l'exécutant » des « tâches » d'éducation.

La dévolution n'est pas une espèce de préparation psychologique de l'élève pour le rendre plus coopératif. Nous avons vu que l'élève devait être coopératif, mais que l'apprenant et l'actant devaient « s'opposer » à certaines intrusions du professeur dans la mesure où ils en sentaient la nécessité. Un exemple fera comprendre les rudiments de l'ingénierie de dévolution.

2. le paradoxe de la dévolution des situations[20].

a) L'enseignant a accepté de la société la mission de faire apprendre les mathématiques à ses élèves. Or personne ne sait comment on « fait » des mathématiques et encore moins comment on fait faire des mathématiques à quelqu'un.

> Lucienne Félix me racontait que Lebesgue acceptait de se hasarder à « faire des mathématiques » devant ses élèves c'est-à-dire à improviser des démonstrations au risque de plonger dans des calculs inutilement compliqués, mais qu'il refusait de diriger un thésard, au motif que s'il lui posait des questions que lui Lebesgue savait résoudre, l'étudiant n'aurait aucun mérite, et qu'au contraire ce serait un bien mauvais cadeau de lui poser des questions que lui même ne savait pas résoudre.

L'enseignant doit obtenir in fine que l'élève résolve les problèmes qu'on lui propose, afin de constater et de pouvoir faire constater qu'il a accompli sa propre tâche d'enseignant.

Mais si l'élève « copie » à ce moment sa réponse, c'est-à-dire s'il la produit sans avoir à faire lui-même aucun des choix qui caractérisent le savoir convenable, et qui différencient ce savoir de connaissances insuffisantes, l'indice d'apprentissage est faussé, l'élève semble avoir appris, mais n'a pas exercé de connaissance:

[19] Plusieurs des textes qui suivent sont extraits de mon livre « Théorie des Situations Didactiques » La pensée sauvage éditions (1998). Cet ouvrage a d'abord été publié en anglais chez Kluwer (1997) «Theory of didactical situation in mathematics » édité et traduit par N. Balacheff, Martin Cooper, Rosamnd Sutherland et Virgina Warfield. Curieusement, et à mon insu, la référence aux mathématiques a disparu dans l'édition française. Les extraits seront en retrait et signalés par « TSDM ». Certains sont ici remaniés et complétés et notés « NTSDM ».

[20] Ce paragraphe est un remaniement complet du texte correspondant de NTDSM pages 302- 303

L'élève doit pouvoir jouer seul et non pas simplement reproduire un algorithme ou exécuter une tâche complètement dictée[21]. Ceci se produit en particulier dans le cas où le professeur est conduit à dire à l'élève *comment* résoudre le problème posé ou quelle réponse donner; l'élève n'ayant alors à effectuer ni choix, ni essais de méthodes mais seulement à exécuter un ordre. Il n'a pas donné la preuve attendue de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion.

L'alternative est claire, ou le professeur ne dit pas quelle réponse il attend de l'élève ou bien il ne peut pas vérifier l'apprentissage. Il est évident qu'au cours d'une évaluation finale l'élève ne doit pas « copier », mais il est difficile d'y distinguer une réponse directe apprise (bas niveau taxonomique) d'une réponse produite par l'exercice d'une connaissance plus générale ou plus profonde (haut niveau taxonomique).

b) Mais le paradoxe s'étend à l'apprentissage lui même. Le professeur ne peut pas se contenter de rechercher la simple mémorisation d'un texte, ni l'apprentissage d'une collection de questions et de leurs réponses. Qu'en est il au moment d'une situation d'apprentissage par adaptation ?

Pour que l'élève ait une chance de s'adapter à la situation, par une modification adéquate et spontanée de ses propres connaissances ou de ses convictions, pour qu'il doive produire la connaissance attendue de son propre mouvement, le professeur ne peut pas lui fournir la réponse. S'il le fait, quelle que soit la raison, l'occasion de l'adaptation personnelle est perdue et l'acquisition de la connaissance visée devra se produire dans une nouvelle tentative ou selon un autre processus. Les façons plus ou moins cachées de réduire l'incertitude des élèves ou de fournir la réponse aux élèves sont connues comme « effet Topaze », « effet Jourdain », « abus de l'analogie », etc. qui ne sont pas le plus souvent des « erreurs » didactiques, mais qui mettent fin à la tentative d'apprentissage par adaptation.

Toutes les situations d'apprentissage effectives, du conditionnement le plus étroit aux « découvertes les plus inattendues supposent la dévolution d'une situation plus ou moins ouverte. Les caractères essentiels de ces situations sont les mêmes que ceux des jeux et s'analysent par les mêmes moyens.

Le professeur se trouve devant une alternative

- s'il dit directement à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, l'élève n'a pas besoin d'apporter d'autre connaissance que celle du « comment faire » et doit donc l'avoir appris avant. Il n'a aucune chance de s'exercer à chercher ce qu'il convient de faire, ni par conséquent d'apprendre à recherche la moindre alternative.
- s'il ne veut pas dire directement à l'élève la réponse attendue ou ce qu'il veut qu'il fasse pour résoudre le problème posé, il prend le risque ne réponde rien et ne fasse rien non plus.

Le professeur doit donc dissimuler ce qu'il veut sous un artefact didactique : choisir des questions dont les réponses peuvent être construites par l'élève, utiliser des analogies, suggérer des méthodes etc.

Le professeur, à la fois

- désire que les élèves donnent les réponses qu'il leur enseigne parce que c'est son métier

- mais en même temps que les élèves donnent cette réponse par eux mêmes, en raison de l'adéquation de la réponse à la question et non pas parce que c'est le désir ou la connaissance du maître

Cette alternative a pris en philosophie[22] la forme suivante : Si un sujet veut être aimé par un autre sujet, il ne peut pas dire quelles manifestations d'amour il en attend comme preuve. S'il le fait, les manifestations obtenues lui apparaîtront comme la production d'un individu assujetti par quelque contrainte et non celle d'un sujet capable de l'aimer librement donc de le reconnaître comme sujet lui même.

c) Les causes conjoncturelles qui peuvent produire l'échec de la dévolution des situations sont nombreuses : les difficultés « excessives » de la situation, la représentation que s'en font les élèves etc.

---

[21] Miller et Chomski ont montré que l'apprentissage d'une langue naturelle ne peut pas être le fait d'un « stimulus response model » mais nécessite au moins un automate fini. Ce résultat peut être considéré comme le premier de la T. S. D. M

[22] Introduit peut être par Kierkegaard dans « Ou bien…Ou bien », le journal d'un séducteur ?, et par Hegel

Mais la première cause est structurelle : le professeur doit faire dévolution d’une situation pas trop fermée pour permettre les adaptations nécessaires à l’apprentissage, l’élève ne peut pas accepter la « responsabilité » de la réussite ou de l’échec dans une situation que, par définition, il ne sait pas résoudre a priori. Il s’attend à ce que le professeur lui enseigne préalablement les moyens de le faire. Le professeur a l'obligation sociale *d'enseigner* tout ce qui est nécessaire à propos du savoir. L'élève — surtout lorsqu'il est en échec — le lui demande.

Ainsi donc,

- plus le professeur cède à ces demandes et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève *ce* que celui-ci doit faire,
- plus il risque de perdre ses chances d'obtenir les apprentissages visés.

C'est le premier paradoxe : ce n'est pas tout à fait une contradiction, mais le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque : Dans des sociétés qui imposent à l’enseignement des exigences de résultats (en ne s’appuyant que sur des connaissances scientifiques insuffisantes et sur des méthodes de gestion industrielles et commerciales), le professeur « doit assurer » la société et les élèves, qu’il est en mesure d’obtenir les apprentissages désirés[23].

Ce « contrat » didactique met donc le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.

Ainsi la didactique consiste à étudier les ruses à l’aide desquelles le professeur dissimule ses intentions tout en les laissant deviner. La « distance » entre les deux est le moyen et la mesure de l’activité mathématique possible ou effective de l ‘élève. L’enseignant gère de façon continue cette distance pour optimiser le rendement du temps scolaire.

d) Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter.

La solution de ces dilemme passe par des processus plus complexes où les intentions affichées et les objectifs réels, sont dédoublés. Le professeur doit s’occuper du jeu du joueur pour le faire entrer dans celui de l’actant.

Techniquement, les modèles de jeux a-didactiques envisagés jusqu’ici étaient des jeux de réflexion, qui conduisent à « remplacer » les modèles stimulus-réponses du behaviorisme par des modèles correspondant au moins à des automates finis. Le fait de refuser que le modèle général de l’acquisition de connaissances soit le modèle empiriste skinérien n’interdit nullement de l’utiliser dans quelques circonstances particulières. Le discrédit général de ces méthodes est aussi dommageable que leur universalisation.

L’obligation pour le professeur de reconstruire une lecture « didactique » des évènements passés survenus dans la classe, nous a conduits ensuite à recourir à des modèles au moins aussi complexes que des automates à pile de mémoire.

Maintenant les modèles du type dit « jeux de réflexion » doivent être plongés dans des modèles du type dit « jeux de ruse », où l’information n’est plus totale.

3. L’institutionnalisation et ses dérives

Bien que de nombreux textes étudient les situations de ce type (cf. bibliographie), très peu l’ont fait en produisant des modèles en termes de jeux.

[23] La société semble vouloir gérer l’enseignement comme Gengis Khân utilisait les astrologues pour connaître la météo ! Elle interroge une collection « d’experts » : tantôt elle suit la majorité, et tantôt, n’obtenant pas ainsi de bons résultats, elle suit quelques marginaux et attend tout d’ innovations magiques. Mais en aucun cas elle n’envisage de préparer l’avenir par des recherches véritables dans ce domaine qu’elle ne conçoit que comme pratique.

4. Le paradoxe du comédien[24]

Le fait de concevoir, d'organiser et de mettre en œuvre une situation a-didactique fait du professeur une sorte d'auteur et de metteur en scène ; dans la situation didactique où il assure personnellement la gestion de cette « pièce de théâtre », et il devient acteur lui même ; Et dans la mesure où ses élèves, eux, ne sont pas des acteurs professionnels déclarés, il devient une sorte de manipulateur, d'organisateur de « loft story »[25]. L'idée que le professeur serait un manipulateur des élèves est difficile à accepter. Celle qu'il serait seulement un comédien jouant un rôle a quelque chose de révoltant pour certains professeurs. D'autres accepteraient cette idée mais seulement à la condition d'être des comédiens à l'italienne, c'est-à-dire de créer leur texte au fur et à mesure du déroulement du canevas. Mais l'idée qu'ils pourraient être des acteurs « donnant » un texte déjà écrit, et qui plus est écrit par d'autres, les révulse totalement. Une raison évidente est bien sur qu'il faudrait dépenser une énergie considérable, excessive, pour préparer 6h de spectacle différent par jour selon la formule théâtrale actuelle. Mais il y a d'autres raisons, les professeurs cherchent une authenticité de leur travail et de leurs rapports avec leurs élèves qui exclut la représentation et même le jeu.

Au contraire, conscients de l'impossibilité d'assumer « sérieusement » des contrats fortement didactiques, certains professeurs de mathématiques ont pensé que le mieux qu'ils pouvaient faire était de faire des mathématiques, si possible *avec* leurs élèves, mais au moins devant eux. Plancher, chercher, se tromper éventuellement et se reprendre devant leurs élèves leur paraissait le message le plus honnête et le plus vrai, donc peut-être le plus efficace qu'ils pouvaient délivrer (ce qui correspond au contrat de familiarisation parfois dit « de frayage »).

Mais cette décision ne fait pas échapper la situation au modèle théâtral. Il s'agit de toute façon d'une re-présentation de mathématiques : les élèves savent bien qu'il s'agit d'une simulation, que ce soit avec ou sans leur participation. Que la représentation soit sérieuse, comique ou tragique, tient dans l'influence qu'elle exerce sur le public.

Dans son texte « le paradoxe sur le comédien », Diderot a dénoncé l'illusion de confondre le théâtre avec la vie. Plus le comédien veut éprouver directement les sentiments qu'il doit représenter, moins il est capable de bien les exprimer, de les perfectionner, de les reproduire professionnellement dans toutes les circonstances. Assassiner effectivement les Curiaces dans les coulisses ou sur la scène d'Horace n'ajouterait rien à la pièce. L'influence du théâtre sur le public, comme celle des mathématiques sur les élèves passe par des opérations culturelles et psychologiques plus complexes.

La résolution de ces paradoxes au même titre que l'explication des phénomènes observés, est l'un des buts d'une théorie des situations en même temps qu'un moyen de mettre à l'épreuve sa consistance.

5. les autres doubles jeux : ceux des « mathématiciens » avec les « enseignants » et de la société avec l'enseignement

Le rôle des institutions et de la communauté mathématique, comme celui de la société en général est très important. La gestion et les accidents de la transposition didactique (de la mathématisation et dé-mathématisation des textes, des activités, des situations, par exemple) peuvent être étudiés du point de vue de la théorie des situations. Nous ne discuterons pas ici cette possibilité car la complexité et l'étendue des phénomènes exigerait le concours d'autres approches : historiques, épistémologiques, sociologiques, anthropologiques. Qu'un phénomène comme celui des « mathématiques modernes » n'ait fait depuis trente ans l'objet que de pamphlets et d'ouvrages d'opinion (à l'exception de la thèse d'Evelyne Beaulieu) montre, à l 'évidence, de quelle façon nous voulons continuer à traiter les questions d'enseignement[26].

[24] Ce sujet est traité dans TSDM page 78-79 et dans Fragility of knowledge

[25] Cette observation m'a amené à m'interroger sur l'enseignement des mathématiques en utilisant les analyses de cet autre jeu qu'est le théâtre. (la métaphore en vaut d'autres et notre étude du jeu comme modèle de l'activité humaine peut inversement être utilisée pour analyser le théâtre.

[26] Il est vrai que des événements aussi importants que la guerre d'Algérie ont subi le même sort.

Conclusions

Dans ce texte, trop court pour l’article de fond qu’il semble vouloir être par moments, et beaucoup trop long et trop technique pour être celui d’une conférence, nous avons essayé de montrer qu’il y a une possibilité de concevoir les situations didactiques sur le modèle de toutes sortes de jeux.

Cette possibilité n’est pas que théorique. Parmi les principales retombées de la modélisation utilisée en théorie des situations, figurent au premier plan les situations « fondamentales » des principales connaissances de la scolarité obligatoire et leur utilisation répétée dans des classes vivantes.

Certes, pour les utiliser il faut les reconnaître, les pratiquer avec les enfants et les leur faire reconnaître aussi. Il faut donc considérer différemment les actes d’enseignement. Aujourd’hui chaque exercice et chaque leçon sont considérés comme des évènements didactiques inattendus, nouveaux, inventés spontanément et produits par le professeur comme des œuvres d’art personnelles ou comme des jeux pour lui-même.

Pour les élèves, la situation doit avoir les caractéristiques d’un jeu au sens ordinaire. Le fait que le professeur joue lui-même n’a d’importance qu’à proportion du bonheur ou de l’efficacité que cela produit pour les élèves.

Il n’y a pas lieu de juger le caractère ludique des situations d’enseignement trop localement. Dans la plupart des vrais jeux il y a des efforts, des difficultés, des moments de concentration, de passion, d’espoir et de déception. Le tout est de rendre possible, pour le plus grand nombre, un investissement qui ressemble suffisamment à ce que présente la vie, tout en permettant d’y éviter ou d’équilibrer ce qu’elle peut avoir de trop dangereux ou contondant. L’étude est parfois un refuge aussi.

Il n’y a pas lieu de vouloir enfermer ces jeux dans des normes uniformes si elles sont inférées par des raisonnements qui font fi des détails. Comme pour tous les objets techniques, c’est la perfection de tous les détails qui assurent aux meilleurs jeux leurs principales vertus. Changez les règles de façon anarchique et vous découvrez vite la faille qui anéantit les vertus du jeu initial.

Il n’y a pas lieu non plus de vouloir inconsidérément remplacer des activités didactiques en classe par des « jeux » directement importés de l’extérieur. Le plus souvent, la réputation de didacticité de ces jeux est purement hypothétique ou au moins largement surévaluée. C’est pourquoi je crois qu’il ne faut pas surévaluer les transferts de motivation et de connaissances – disons l’influence - des activités ludiques périscolaires, comme celles que nous voyons ici, vers les résultats et les comportements scolaires.

L’opinion répète que la pratique du jeu d’échec développerait les qualités mathématiques de ceux qui s’y livrent. Mais je ne connais aucun sujet de mathématique qui serait mieux connu, pratiqué ou aimé après quelques heures de ce jeu, qu’après quelques heures de travail mathématique spécifique. L’intérêt, pour elles-mêmes, des activités mathématiques périscolaires est assez grand pour qu’on les souhaite à nos jeunes gens. Leurs vertus éducatives sont évidentes et leurs effets sur la représentation populaire des mathématiques ou sur les relations de l’école avec son environnement sont bénéfiques. Il n’est pas utile de les parer en plus de vertus didactiques qu’elles n’ont probablement pas et de porter ainsi des armes aux détracteurs de l’école.

L’affirmation répétée que « l’on apprend mieux hors de l’école », « sur le terrain », ou par les vertus de quelque « orviétan », aussi mythique que mystérieux, est une habitude qui se répand de plus en plus. Elle n’a aucun fondement. Elle est motivée par son utilité pour une foule d’intérêts dont aucun ne concerne vraiment les élèves et la culture mathématique. Elle conduit directement les professeurs à éliminer leurs pratiques les plus sûres au profit de méthodes magiques.

Je regrette beaucoup l’accueil complaisant la communauté des mathématiciens et aussi celle des professeurs offre à ces rumeurs.

Par contre, je crois que nous pouvons espérer faire bénéficier les enfants, dans la classe, des avantages que vous recherchez et obtenez hors de la classe à la condition de considérer plus sérieusement, plus professionnellement, et de façon plus authentique notre travail commun et aussi d’encourager les recherches nécessaires en les utilisant en les « contrôlant » et en y participant

Bibliographie

Articles de l'encyclopaedia Universalis (1995): Jeu (Jean CAZENEUVE) Jeu et rationalité (Jacques EHRMANN). Le jeu des animaux (Joëlle PAYEN et Georges THINES. Le jeu chez l'enfant (Jean Château), Le jeu dans la société (Jean CAZENEUVE). Théorie des jeux (Jean BOUZITAT)

Revue « La Recherche » N° spécial Juin 2000 « Jeux mathématiques »

C. AVELINE *Le code des Jeux* Livre de Poche Hachette (1961)
R. BERTHELOT et M. H. SALIN «L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire » IREM de Bordeaux (1992)
G. BROUSSEAU « Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?» *in les actes du congrès « l'apport des sciences fondamentales aux sciences de l'éducation* ». Tome 1 pp 364-378. Épi (1972)
G. BROUSSEAU « le contrat didactique, le milieu » in RDM, Vol. 9/3 pp309-336. La pensée sauvage (1990)
G. BROUSSEAU et M. OTTE « Fragility of Knowledge » in *Mathematical Knowledge : Its growth through teaching* Kluwer Academic Publisher (1991)
G. BROUSSEAU. *Théorie des Situations Didactiques* La pensée sauvage éditions (1998).
Ouvrage a d'abord publié en anglais chez Kluwer (1997) sous le titre «Theory of didactical situation in mathematics » édité et traduit par N. Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield.
G. BROUSSEAU « The Case of GAEL » *in Journal of mathematical Behavior* 18 (1), 7 –52 (1999)
G. BROUSSEAU « *Les propriétés didactiques intrinsèques de la géométrie* » à paraître
J. CHÂTEAU, *Le Réel et l'imaginaire dans le jeu de l'enfant* , Vrin, Paris, 1946, 5e éd. 1975 ; *L'Enfant et le jeu* , Scarabée, Paris, 1950
N. CHOMSKI & G.A. MILLER, Finite state langages. *Information and control*, 1958 1, 91-112
N. CHOMSKI & G.A. MILLER *l'analyse formelle des langues naturelles* Gauthier Villars Paris (1968)
D. DIDEROT *Le paradoxe sur le comédien* 1773
J. DOKIC « l'action située et le principe de Ramsey » in *La logique des situations* Michel de Fournel et Louis Quéré éditions de l'EHESS 1999.
I.EKELAND, *La Théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique*, P.U.F., Paris, 1974
M. de FORNEL et L. QUERE. *La logique des situations* Editions de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales (1999)
J. HUIZINGA, *Homo ludens. Essai sur la fonction sociale du jeu* (*Homo ludens*, 1938), trad. C. Seresia, Gallimard, 1951
F. KONE *Analyse des situations didactiques à l'aide de la théorie du jeu* DEA de l'IREM de Bordeaux (1980)
H. MOULIN *Fondation de la théorie des jeux* avec un texte de R. De POSSEL « Sur la théorie Mathématique des jeux de Hasard et de réflexion » Hermann (1979)
A. RAPOPORT, *Combats, débats et jeux* (*Fights, Games and Debates*, 1960), trad. J. de La Thébeaudière, Dunod, Paris, 1967
G. RAUZY, *Nombres et jeux selon J. H. Conway*, I.R.E.M., Villetaneuse, 1980

ANNEXE
Cinq jeux

Parmi les très nombreuses situations fondamentales spécifiques que j'ai élaborées ou étudiées dans le cadre de la Théorie des Situations pour introduire des connaissances mathématiques parmi lesquelles la désignation des objets et des propriétés, les connecteurs logiques, l'énumération, le dénombrements, la numération, les différentes opérations élémentaires, les grandeurs, la mesure de grandeurs, les décimaux, les rationnels, la géométrie, les statistiques, les probabilités… j'ai retenu cinq exemples que

je vous propose en annexe. Le premier est le plus connu, les deux derniers ont été présentés à maintes reprises
1. La course à vingt (production de théorèmes en actes, nécessité, limites et insuffisances)
2. Le jeu de la preuve (de Paul Lorenzen), origine de la théorie des situations
3. Le jeu du nombre le plus grand (sur une suggestion de Georges Glaeser) : théorèmes et contre exemples
4. introduction à l'algèbre : la recherche du terme inconnu d'une somme (exemple d'une ingénierie de dévolution)
5. Introduction à la géométrie : le jeu de la connaissance de l'espace (étudié dans les thèses de Grécia Galvez, Marie Hélène Salin et René Berthelot, Dilma Fregona) et le jeu du géomètre (présenté dans la thèse de Marie Hélène Salin et de René Berthelot)

1. Qui dira 20 ?

a) C'est **un jeu à deux joueurs** A et B qui choisissent alternativement des nombres. Chaque joueur n'a le droit d'ajouter que 1 ou 2 au nombre précédemment dit par son adversaire. Le premier dit 1 ou 2. Celui qui dit 20 a gagné la partie. (Il s'agit d'une version simplifiée du jeu de Nim)

b) Le système est composé d'un ensemble d'états de la forme (θ , n) où θ représente l'un ou l'autre des joueurs et n le nombre naturel qu'il annonce. Quand le jeu se trouve dans un certain état (θ ; n) l'ensemble des états permis suivants sont

$\Gamma((\theta ; n)) = \{(\theta' ; n+1) ; (\theta' ; n+2)\}$

où $n \in [0,20]$; $\Theta = \{ A; B \}$;

θ et $\theta' \in \Theta$; et où $\theta' \neq \theta$

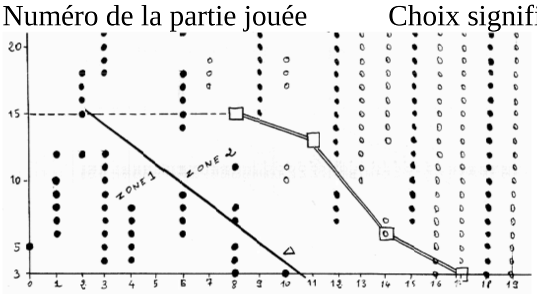
L'état initial est (θ ; 0) et l'état final (θ'' ; 20)

c) Du côté de la théorie, l'ignorance d'un joueur est représentée par le choix au hasard de l'un des deux états permis. Une tactique se manifeste par une certaine distribution de probabilité sur les choix ouverts dans certaines conditions. Une stratégie détermine tous les choix dans toutes les conditions. Le couple des stratégies choisies par chaque joueur détermine l'issue de la partie. Une connaissance pertinente modifie une tactique ou une stratégie.

d) Du côté de la contingence, une tactique se manifeste soit chez un sujet unique par des décisions stables, ce qui suppose des répétitions de parties, soit chez un ensemble de sujets par des décisions significativement fréquentes.

e) Voici l'évolution des fréquences des choix manifestés par une centaine de paires de joueurs de 9 à 10 ans au cours de 30 parties. Les ronds blancs correspondent à l'addition significative de 1, les noirs à l'addition significative de 2, l'absence de signe indique des choix équilibrés.

Numéro de la partie jouée Choix significatif de 1 ou de 2



Nombre précédent le choix

figure 1. L'apparition des théorèmes en situation d'action

On y voit apparaître l'axiome “ il faut jouer 20 ” dès la première partie, la tactique “ jouer 17 si l'autre a dit 16 ” à la deuxième et le théorème “ Il faut jouer 17" ” (à partir de 15 ou de 16) dès la quatrième partie. Impossible de dire ici si chaque élève développe une meilleure probabilité de choix ou si une certaine partie des élèves est déterminée et l'autre joue de façon équiprobable.

f) La connaissance qui détermine la stratégie gagnante est celle qui consiste à prendre dès qu'on le peut la suite gagnante 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. Le savoir qui correspond à cette connaissance est celui du calcul du reste de la division par 3 du but. En fait, cette situation peut être utilisée pour introduire l'étude de l'algorithme de la division.

g) Théorèmes. Nous avons remarqué que les "théorèmes" apparaissent au cours des suites de parties de ce jeu, mais qu'ils disparaissent ensuite comme si l'élève renonçait à tirer parti de ses « connaissances » devant la complexité de la tâche. Les théorèmes disparaissent dans l'ordre inverse de leur apparition. Ceci montre certaines limites des situations d'actions comme celle-ci où le sujet agit sans avoir l'occasion de prendre ses décisions comme objet de formulation ou d'étude.

h) Théorèmes en acte. A la troisième partie, si l'adversaire dit 16, les élèves choisissent 17 (de préférence à 18), mais s'il dit 15, les choix se répartissent également entre 16 et 17. Il faut attendre la sixième partie pour que les enfants choisissent 17 de préférence à 16 dans ce cas. A partir de ce moment tout se passe comme s'ils savaient le “ théorème en acte “ “ il faut dire 17 ”, ou comme s'ils avaient une tactique “ complète ” (les deux sont alors indiscernables). Mais en fait au moyen d'entretiens nous avons pu observer que plusieurs étapes sont nécessaires avant qu'ils soient capables de formuler cette tactique, puis de la justifier, et enfin d'en tirer des conséquences.

i) Stratégie intermédiaire. On observe aussi que les élèves, lorsqu'ils ont acquis un théorème, ont tendance à ajouter 2 en début de partie et qu'ils ne commencent à “ essayer ” 1 ou 2 que sur les quelques nombres qui précèdent ce théorème (6 ou 7). Il s'agit d'une tactique de recherche, elle n'a jamais été explicitée par aucun élève. Certains “ modèles implicites d'action ” sont formulables par le sujet ou le deviennent, d'autres non.

j) **Le jeu par équipes** (Formulation) L'occasion de formuler des tactiques va être donnée aux élèves en les groupant en équipes qui doivent se concerter entre les parties. Les parties font s'affronter des “ champions ” de chaque équipe, mais ces champions ne sont pas connus à l'avance de sorte que tous les membres de l'équipe doivent s'informer de ce qui est convenu. On a observé que la simple formulation n'avait aucune action sur les connaissances et les convictions des élèves mais qu'elle empêchait l'évanouissement des théorèmes en actes.

k) Comme précédemment, l'ingénierie didactique doit produire diverses sortes de situations : celles qui rendent nécessaire, pour le contrôle d'un milieu, la communication de telle connaissance choisie à l'avance alors que les répertoires auxquels il est fait appel sont connus, et celles qui exigent l'adaptation du répertoire ou la création d'un nouveau.

l) **Le concours de théorèmes** réalise les conditions d'une situation de « validation ». Chaque équipe élabore puis propose a tour de rôle un énonce “ utile pour gagner au qui dira 20 ” ou essaye d'établir que l'énoncé des autres est en défaut.

m) Dans ce nouveau type de situation, les élèves organisent des énoncés en démonstrations, construisent des théories - des ensembles d'énoncés de référence -, et apprennent comment convaincre les autres ou se laisser convaincre sans céder aux arguments rhétoriques comme l'autorité, la séduction, l'amour propre, l'intimidation etc.

n) **Les dialectiques**. La situation d'action dure environ 10 minutes, le jeu de la formulation encore 10 minutes. Ensuite en moins de 40 minutes du concours de problèmes, une classe d'enfants de 10 ans parvient à établir la stratégie gagnante et à savoir prouver sa valeur par un raisonnement par exhaustivité[27].

---

[27] L'action, puis la formulation puis la validation culturelle et l'institutionnalisation semblent constituer un ordre raisonnable pour la construction des savoirs. Cet ordre est souvent observé dans la genèse historique des notions où nous voyons des formes proto-mathématiques, puis para-mathématiques se succéder et précéder leurs formes mathématiques proprement dites. Il semble s'opposer à l'ordre inverse où les savoirs sont d'abord réorganisés en discours communicables selon le destinataire puis seulement “ appliqués ” à des situations personnelles et “ convertis ” en décisions. En fait, il n'y a pas de loi générale qui qualifierait ou disqualifierait l'un ou l'autre de ces processus. Il faut examiner les propriétés de chacun dans chaque cas.

o) La séance “ qui dira 20 ? ” est la première d’une série qui se poursuit par “ qui dira 25 ? ”, puis “ qui dira 37 ? ”... Ensuite “ qui dira 354, en ajoutant des nombres compris entre 1 et 13 ” ? etc. Les élèves sont ainsi conduits à construire une méthode pour trouver le reste de soustractions successives avant de s’apercevoir qu’ils ont réinventé la division qu’ils connaissaient déjà.

2. Le jeu de la preuve

Lorenzen (op. cité, p21), propose un modèle de situation de preuve :

> "Imaginons deux personnes dont la première affirme $\forall x \in N$, P(x). La seconde est alors en droit de choisir à volonté un nombre naturel n. Si la première personne peut alors fournir la preuve qui correspond à P(n), elle a gagné. Sinon elle a perdu.
> L'issue du dialogue est ainsi toujours déterminée et c'est pourquoi on peut considérer les propositions universelles comme d-définies. D'une façon générale, une proposition sera dite *d-définie* si, pour la soutenir dans un dialogue, les règles des deux partenaires sont déterminées de telle sorte qu'on peut décider à chaque instant
> (1) si le dialogue est terminé et
> (2) qui, dans ce cas, a gagné.
> "Je passe" n'est pas autorisé.
> Partons de propositions p-définies. Toutes les compositions qu'on peut former à l'aide d'un nombre fini ou non de conjonctions et d'adjonctions sont, comme il résulte de ce qui précède, d-définies. On reste encore dans le même champ de propositions en introduisant une négation $\neg$ de la façon suivante. Si le premier des deux partenaires affirme "$\neg$a" à partir d'une proposition d-définie a, le second a le droit (1) d'accepter l'affirmation (il dit quelque chose comme « non dubito», en symbole «~~?~~[28]» et le premier a gagné ou (2) d'affirmer "a" de son côté.
> Alors, selon que le second gagne ou perd ce dialogue commencé par a, le premier a perdu ou a gagné. Ainsi $\neg$a ne peut être gagné que si le partenaire a pu être contraint à perdre a. En conséquence, il serait préférable de traduire $\neg$a par « a est réfutable » plutôt que par «non-a».

Exemple

Il donne alors un exemple de débat sur la non contradiction $\neg$ (a $\neg$a) résumé ci près[29].

- Le proposant affirme $\neg$ (a $\neg$a)
- L'opposant peut alors
  soit accepter la proposition et alors le proposant a gagné
  soit prendre le parti contraire et affirmer a $\neg$a

- Dans ce cas le proposant met en doute "a"
- et l'opposant doit affirmer "a" ou qu'il détient une preuve de a (d'après la définition de),
- le proposant met alors en doute $\neg$a.
- L'opposant doit affirmer $\neg$a (pour la même raison),
- Il suffit alors au proposant d'affirmer à son tour a
- L'opposant ne peut qu'accepter, et s'il demande une preuve le proposant lui fournit celle qu'il a lui même donnée dans les deux cas il a perdu. .

Par conséquent celui qui affirme $\neg$ (a $\neg$a) gagne toujours.

---

[28] un point d'interrogation barré.

[29] Le tableau représente la stratégie de gain pour le proposant P. La division des colonnes, à partir de la ligne (2), est due au fait que O [l'opposant] peut choisir entre ~~?~~ et a $\neg$a. A la sous colonne de droite, Le proposant déclare « ? 1 » *(dubito: 1)* et O doit répondre par le premier terme a de la conjonction. [Le proposant] met ensuite en cause le second **terme** et peut, à son tour, répondre a à la riposte $\neg$a de l'opposant. Si maintenant O réclamait une preuve de a, P pourrait d'abord l'exiger de O, puisque celui-ci a déjà affirmé a plus haut. P dispose donc toujours d'une stratégie de gain, s'il a soin de n'affirmer que des propositions qui ont été préalablement soutenues par O.

La stratégie de Proposant consiste à n'affirmer que des propositions qui ont été préalablement soutenues par son opposant. Lorenzen présente les débats dans des tableaux

Ce modèle vaut-il pour la démonstration de tous les théorèmes?

> « Pour la proposition, logiquement vraie en logique classique, a V¬a, le tableau a l'allure suivante :

	Opposant		proposant	
1			a V¬a	
2	?		a	¬a
3	?	A		

> Ici, à la ligne (2), *P* a le choix entre a et ¬ a. S'il choisit a et ne peut en apporter la preuve, il perdra. En revanche s'il choisit ¬ a, il perdra si 0 peut prouver la thèse a.
> Donc P ne peut gagner a v ¬ a que s'il sait
> - soit (1) comment prouver a,
> - soit (2) que l'opposant ne peut pas prouver a.
>
> En conséquence P ne peut pas, en général, gagner cette thèse. »

Lorenzen commente alors

> « On voit apparaître ici une différence entre les deux formes propositionnelles ¬ (a ¬a) et a V¬a, qui sont toutes deux logiquement vraies au sens classique des joncteurs (c'est-à-dire par rapport aux propositions v-définies). On peut toujours, dans un dialogue, gagner les propositions de la forme ¬ (a ¬a), mais pas les propositions de la forme a V¬a. Dans le second cas il faut en effet se décider effectivement entre a et ¬ a et on ne peut le faire que sur la base du contenu de a et non sur celle de sa seule forme.».

Commentaire. Il est très important de remarquer que l'interprétation opératoire de Lorenzen conduit à introduire une sémantique - ce qu'il appelle un contenu - à côté des écritures formelles et que cette introduction conduit elle même à une restriction intuitionniste.
Le projet de la théorie des situations de *mettre en scène le fonctionnement* des connaissances conduira naturellement à accepter cette logique comme règle des interactions observées. Ceci par conséquent tend à exonérer les commentateurs de la théorie des situations qui l'ont qualifiée de théorie logiquement constructiviste. Il faut cependant remarquer que ce n'est pas la théorie qui est constructiviste, c'est le comportement des acteurs et la logique qu'ils construisent. Ceci ne signifie pas qu'il n'est pas possible de chercher une modélisation d'un logique plus large, avec les méthodes de la théorie des situations.
Nous avons montré d'autre part qu'il serait erroné d'en inférer que la théorie des situations appuie les thèses dites "constructivistes" pour l'enseignement. Au contraire nous avons montré qu'il n'est pas possible, théoriquement et matériellement, à un apprenant de donner aux connaissances qu'il construit le statut de savoir, nécessaire à leur usage habituel.

3. Le nombre le plus grand :

Une initiation à la recherche de théorèmes et au jeu des mathématiques au cours moyen : l'apparition de contre exemples

Nous racontons ci-après une expérience de didactique qui s'est déroulée en 1988 dans un CM2 de l'école Michelet sur une suggestion de Georges Glaeser. .
Il s'agissait de proposer aux élèves une situation, qui, non seulement provoquerait de leur part une activité mathématique, mais aussi qui les initierait explicitement à l'activité sociale des mathématiciens : la production et la critique de théorèmes.

Plusieurs tentatives du même genre avaient précédé cette expérience notamment à propos des rationnels et des décimaux, de la division (qui dira 20 ?), du concours de problèmes, ou de la logique des classes etc. Elles avaient donné lieu à des tentatives de modélisations inspirées de celles de P. Lorenzen (qui sont rappelées ci-dessus), et qui sont typiques de la théorie des situations.
Nous montrons ci-après les détails de l'ingénierie didactique : d'abord la présentation « classique » de la solution mathématique du problème choisi, puis la construction des situations, puis l'organisation et le déroulement effectif du processus. Nous laisserons volontairement de côté, dans cet article, la question de la détermination des paramètres du modèle que nous utilisons comme situation fondamentale de la société mathématique (gains et des enjeux). Cette étude est en cours.
Ce texte laisse voir les différences qui existent entre une démonstration mathématique et la genèse d'une connaissance. Il permettra par la suite d'analyser la transposition didactique dont il donne un bon exemple. Nous pourrons voir aussi les contre exemples reprendre leur rôle et de montrer que les élèves peuvent apprendre à les utiliser. Le processus est inspiré de celui que décrit I. Lakatos dans « proof and refutation ».

1. Le choix du théorème et sa démonstration

Enoncé

[Cinq] nombres naturels sont donnés. Trouvez le nombre le plus grand que l'on peut obtenir en utilisant tous les nombres donnés, mais une seule fois chacun, dans des opérations arithmétiques simples, c'est à dire choisies dans la liste : {+ , - , × , / }, la même opération pouvant être choisie autant de fois qu'on veut.

> Commentaire, les crochets indiquent que le « 5 » est une valeur d'une variable cognitive, et didactique.

Le 5-théorème

Soit a, b, c, d, e, les cinq nombres proposés et supposons $a \leq b \leq c \leq d \leq e$.
Soit g_5 (a, b, c, d, e,) le nombre le plus grand que l'on peut obtenir avec ces 5 nombres
alors
Si $2 \leq a$, le nombre le plus grand que l'on peut obtenir est $g_5 = a \times b \times c \times d \times e$
Si a = 1, avec $2 \leq b$ le nombre le plus grand est $g_5 = (a + b) \times c \times d \times e$ explicitement $(1 + b) \times c \times d \times e$
Si a = b = 1 avec $2 \leq c$, alors $g_5 = (a + b) \times c \times d \times e$ explicitement $2 \times c \times d \times e$
Si a = b = c = 1 avec $2 \leq d$ alors $g_5 = (a + b + c) \times d \times e$ explicitement 3xdxe
Si a = b = c = d = 1 avec $2 \leq e$ alors $g_5 = (a + b) + (c + d) \times e$ explicitement $4 \times e$
Si a = b = c = d = e = 1 alors $g_5 = (a + b + c) \times (d + e)$ explicitement $3 \times 2 = 6$
Si a = 0 le nombre le plus grand que l'on peut obtenir est le même que celui que l'on peut obtenir avec b, c, d, e, il suffit d'ajouter 0 (puisqu'il faut utiliser « tous » les nombres donnés).

Les démonstrations

a) Elle peut évidemment s'établir par exhaustivité, mais la méthode utilisée par les enfants est déjà supérieure, car ils admettent des théorèmes implicites indépendants du nombre de termes d'un produit
$(\ldots \times a \times b) \times 1 \leq (\ldots \times a \times b) + 1$
$(\ldots \times a \times b) + 1 \leq (\ldots \times a \times (b+1))$
$(\ldots \times a \times (b+1)) \leq (\ldots \times (a+1) \times (b))$ dès lors que $a \leq b$
Ils argumentent explicitement ces croyances avec deux conjectures explicites :

i) « Si un nombre est « plus multiplié », multiplié par un nombre plus grand, le résultat est plus grand » autrement dit : si $a < b$ alors $n \times a < n \times b$

ii) il vaut mieux multiplier qu'additionner : $a + b < a \times b$

Mais si ces conjectures sont vraies pour tous les nombres « vrais » pour les enfants, c'est-à-dire « nombreux » (supérieurs à 1), et si tous les nombres sont distincts ou et les inégalités strictes, elles ne le sont plus dans certains cas, en particulier pour les naturels non réguliers pour l'une ou l'autre des opérations : 1 et 0, ou dans ces conditions si a = b ou si n = 0…

Ces conjectures reçoivent un démenti avec l'apparition du 0 et du 1, mais cela ne leur donne pas leur domaine de validité et encore moins un algorithme de calcul.

b) Les démonstrations de base ne sont pas immédiates :

Lemme 1 : Soient et a et b deux naturels tels que $0 \leq a \leq b$,
Alors $a + b \geq a \times b$ est équivalent à $a \geq 2$ et $b \geq 2$

Démonstration algébrique

$$a \times b = ((a-1)+1) \times ((b-1)+1)$$

$$a \times b = a + b - 1 + (a-1) \times (b-1)$$

Donc $a \times b \geq a + b$ si et seulement si $(a-1) \times (b-1) \geq 1$

On en déduit que

$a \times b \geq a + b$ si et seulement si $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

Démonstration « arithmétiques »

Les preuves qui ne font pas appel à la manipulation algébrique et qui n'utilisent que des inégalités strictes sont plus complexes comme d'habitude :

i) Par exemple dans le sens $a \times b \geq a + b$ implique $a \geq 2$ et $b \geq 2$ un raisonnement par l'absurde permet une étude de cas : la contraposée : $a < 2$ ou $b < 2$ implique $a \times b < a + b$ vient bien :

$a < 2$ équivaut à $a = 0$, ou $a=1$,

si $a=0$, alors quel que soit b non nul, $a \times b = 0$ et $a + b = b$; donc $a \times b < a + b$

si $a=1$ alors quel que soit b, $a \times b = b$ or $a + b = b+1$, donc $a \times b < a + b$

Note : le cas limite : si $a = 2$ alors $b = 2$ puisque $a \leq b$ et $b \leq 2$ donc $a + b = a \times b$ ($= 4$) n'a pas besoin d'être examiné:

ii) Dans le sens réciproque, le plus intuitivement « évident » : $a \geq 2$ et $b \geq 2$ impliquent $a \times b \geq a + b$,

On a directement $a = 2 + n$ et $b = 2 + m$ (avec n et m entiers éventuellement nuls) sont tels que :

$a \times b = (2 + n) \times (2 + m) = 4 + 2 \times (n + m) + n \times m = 4 + (n + m) + (n+m) + nm$ or

$a + b = 4 + n + m$

donc $a \times b$ surpasse $a + b$ de la quantité $(n + m) + n \times m$, nulle si $a = 2$ et $b = 2$

L'examen des inégalités strictes étant inutile celui de la contraposée « $a \times b < a + b$ implique $a < 2$ ou $b < 2$ » l'est aussi.

La loi de construction des solutions

Les paramètres qui permettent de déterminer la formule, ou plutôt l'algorithme approprié à chaque cas sont : n, le nombre de nombres proposés et u le nombre de 1 parmi ces n nombres. Pour l'instant il y a autant de théorèmes que de couples (n, u) , $n \geq u$, des (n,u)-théorèmes.

La démonstration d'un théorème général pour un nombre quelconque de naturels présente de nouvelles surprises : par récurrence, il est nécessaire d'étudier les diverses décompositions lorsque le n-uplet commence par une séquence de un. On peut penser qu'à sommes égales, le produit de regroupements des 1 par somme de deux, produit le plus grand nombre.

Exemple : soit g_{10}, le groupement optimal du n-uplet (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). Il s'agit de comparer $g_2 \times g_2 \times \ldots \times g_2$ avec $g_5 \times g_5$ c'est à dire $2^5 = 32$ avec $5^2 = 25$

La décomposition par sommes de deux 1 paraît meilleure. Mais est-ce toujours le cas ?

Contre exemple : avec g_6 , il s'agit de comparer g2 x g2 x g2 avec g3 x g3,

soit 2^3 et 3^2 or $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$

Le problème choisi suggère donc assez facilement des lois, qui sont vérifiées pour les « vrais » nombres (supérieurs à deux) mais qui souffrent chaque fois des contre exemples pour les « faux » nombres que sont 0 et 1 (quand on est 1 on n'est pas nombreux !). Le lecteur peut établir un algorithme universel.

2. Les situations motrices du processus

Les trois textes suivants décrivent le *principe* de trois jeux qui ont été proposés successivement à une classe de cours moyen deuxième année et se sont prolongés par petites séances de 15 minutes pendant une quinzaine de jours Evidemment dans la présentation aux élèves, les règles ont été introduites progressivement, « en situation plus vivantes », avec des mises en scène qui les rendaient presque évidentes, en tout cas naturelles. Elles ont été formulées en des termes plus accessibles. En particulier les règles du troisième jeu n’ont pas toutes été explicitées

Jeu 1 : Le concours du nombre le plus grand

M. Je vais écrire au tableau cinq nombres (naturels).
En vous servant de *tous* ces nombres, mais *une seule fois chacun*, et en utilisant les opérations simples que vous connaissez (+, -, x, /), et que vous choisirez comme vous voudrez, vous allez essayer d’obtenir le nombre le plus grand possible.
Auront gagné le concours

- ceux qui auront indiqué comment ils ont fait,
- qui auront calculé juste
- et qui auront obtenu le nombre le plus grand (plus grand que ceux de leurs camarades).

Jeu 2 : Le jeu des marchands de méthodes

M. *L’ingénieur qui a inventé un produit ou un matériel nouveau ou une nouvelle méthode de fabrication fait une description précise de son invention. Par la suite, tous ceux qui veulent utiliser ce produit, cette invention ou ce procédé doivent payer des droits à l’inventeur.*
Aujourd’hui, ceux qui ont l’impression qu’ils savent comment il faudra faire pour gagner la prochaine partie vont pouvoir faire breveter leur méthode. Il leur suffit de l’écrire. Comme vous ne savez pas encore quels nombres je vais vous proposer, vous pouvez, en attendant, les désigner par des lettres : A désigne le premier nombre que je dirai, B le second et ainsi de suite… Vous pouvez vous associer par groupes pour décrire votre méthode.
Lorsque les groupes d’inventeurs auront affiché leur méthode, avant de recommencer à jouer, vous choisirez chacun la méthode que vous voulez suivre. Le groupe d’inventeurs de cette méthode recevra un point par choix. Mais si vous perdez en utilisant correctement une méthode, l’inventeur remboursera les points et paiera une amende. A moins qu’il ne prouve que les utilisateurs n’ont pas bien suivi la méthode, ou qu’ils ont fait des erreurs de calcul.
Le gagnant du concours des marchands de méthodes est celui qui gagne le plus de points, comme joueur ou comme inventeur.

Jeu 3 : Le concours de théorèmes ou le jeu des mathématiciens

Lorsqu’un inventeur propose sa méthode c’est comme s’il déclarait
« Le nombre le plus grand est obtenu de telle et telle manière ».
Ce qu’il dit peut être vrai pour certaines parties, pour certains nombres, mais faux pour d’autres. La méthode peut alors être utile mais elle peut aussi faire perdre.
Ce que demande l’acheteur de méthode c’est que l’inventeur lui dise
« Quels que soient les nombres proposés, le nombre le plus grand est obtenu de telle et telle manière ».Si cette déclaration est vraie on l’appelle un théorème. La méthode est alors infaillible, l’acheteur est content et l’inventeur a gagné son argent.
Les participants au concours de théorème marquent des points

- en écrivant des déclarations (pour faire gagner les parties)
- en convaincant leurs camarades que leur déclaration est juste
- en critiquant les déclarations des autres et en montrant qu’elles sont fausses.

De temps à autres le professeur propose des parties de jeu 1. En particulier lorsque tous les participants sont arrivés à un accord pour un théorème.
La formalisation du jeu des mathématiciens dans son ensemble est assez complexe, surtout s’il s’agit de donner une valeur en nombre de points aux différents enjeux.

Les participants peuvent proposer une déclaration, cela correspond à engager un pari.
Les enjeux vont évoluer au cours des débats et suivant les réactions des autres, des preuves et des mises à l’épreuve. Le premier engagement ne coûte ni ne rapporte aucun point.
Les participants peuvent ensuite :

- soit accepter la déclaration et payer un droit à son auteur chaque fois qu’ils l’utiliseront

- soit la refuser sans affirmer sa négation mais alors ils ne doivent pas l’utiliser
- soit la contredire : ils deviennent alors un nouveau proposant, mais pour cela il faut déposer un enjeu.

Une déclaration acceptée rapporte des points à son auteur
- suivant le nombre d’utilisateurs de la déclaration proposée,
- et suivant le succès de ces utilisateurs,

Mais elle en coûte en cas d’échec (montant de garanties)

Dans le cas où une proposition a de A est contredite par un opposant B,

- B peut exiger de A qu’il utilise sa stratégie ou sa déclaration sur *une partie particulière que B choisit librement* (dans le champ déclaré par A) de façon à lui faire perdre les enjeux de ces parties (ou à lui produire un contre exemple). Il peut réitérer cette exigence jusqu’à ce que A retire sa proposition. Si A retire sa proposition il paie le montant des paris sur les jeux et la mise pour la proposition. Le prix des paris peut être croissant.

- B peut proposer à A une preuve de « non a ». Par exemple dans le cas où il craint que A ne retire trop vite sa proposition ce qui diminuerait les gains de B. Si A se rend aux arguments de son opposant, il paie la démonstration, sinon B peut exiger que A réengage à nouveau son pari dans de nouvelles parties. A a intérêt à examiner la preuve de B s’il n’est pas sûr de son fait.

Dans la confrontation, une preuve doit coûter moins cher et « rapporter » plus qu’une épreuve, qu’elle est destinée à remplacer.

L’entêtement contre l’évidence ou contre une preuve est possible mais risque de coûter cher, par contre il est possible de changer d’opinion ou de se retirer d’un pari à tout moment. Le retrait motivé, la reconnaissance de son « erreur » coûte moins cher que le retrait simple.

Toute la difficulté de la situation réside
- pour le professeur dans le choix des enjeux, des gains et des pertes,
- pour les élèves dans la connaissance exacte du statut des déclarations au cours du débat : de quoi est-il question ? qui a dit quoi ? qui contredit quoi ? Pour faciliter cette tâche nous avons essayé d’utiliser un « tapis de débat » sur lequel le déplacement de jetons permettait de suivre les changements de rôle entre proposants et opposants. Ce tapis est décrit dans « Rationnels et Décimaux » mais n’a jamais fonctionné de façon effective.

Heureusement, la culture et les réactions spontanées des enfants semblent suppléer naturellement à un exposé de ces règles et suppléer à leur insuffisance. Le sens du vrai et du faux, les conséquences qu’il faut tirer d’un raisonnement, d’un exemple ou d’un contre exemple s’imposent plus facilement qu’on ne le croirait a priori ou que ne semble le permettre le modèle.

Le concours de Théorèmes tend à simuler l’activité de production des connaissances dans le milieu des mathématiciens. Il a été utilisé dans plusieurs exemples pour provoquer des processus générateurs et établir des théorèmes très divers (voir Rationnels et Décimaux de Nadine et Guy .Brousseau). S’il paraît susceptible de provoquer un processus où vont apparaître successivement divers contre-exemples, il est peu probable qu’il permette d’établir une démonstration formelle du théorème ou même d’une partie du théorème visé (dont nous avons vu la complexité). Il n’est pas établi, loin de là, qu’il puisse se dérouler de façon suffisamment a-didactique : l’intervention du professeur est constante et indispensable, non seulement pour maintenir l’appétence des élèves mais aussi pour assurer un déroulement signifiant.

3. Le processus et son déroulement

1ère Séance

1ière phase le concours du nombre le plus grand

[0 - 3’ 15] énoncé. La maîtresse présente le jeu. Les élèves pensent au jeu télévisé « le compte est bon ». La maîtresse précise les différences.

1er concours

a) [(3’ 15 - 7’30] La maîtresse donne les nombres : 3, 8, 7, 5, 4. Les élèves cherchent et calculent.
b) [7’30 – 8’30] Les premiers résultats tombent : 4215. La maîtresse demande à l’élève d’effectuer – au tableau - publiquement son calcul qui se révèle faux.
c) [8’30 – 9’50] Un élève propose 3360 aussitôt approuvé par plusieurs autres. La vérification montre que ce calcul est exact. La maîtresse représente les calculs effectués à l’aide d’un arbre. Le procédé n’est pas nouveau pour les enfants mais il n’est pas systématiquement utilisé en temps normal.
d) [9’50 – 10’30] Un autre propose un nombre plus grand : 4895 mais il se révèle faux.
e) [10’30 – 11’20] brouhaha, propositions peu audible réprimées par des élèves qui relèvent immédiatement des erreurs… Observations de la part d’élèves à quelques élèves qui ont utilisé des additions
f) [11’20 – 13’00] La maîtresse prend acte qu’il n’y a pas de proposition sérieuse supérieure à 3360,
g) [13’00 – 13’40]La maîtresse résume les calculs en utilisant parallèlement l’arbre et les parenthèses. Elle demande aux élèves quelle représentation ils préfèrent (l’arbre)

Scolie sur l’usage de l’arbre et l’utilité des parenthèses.

h) [13’40 - 14’21] Elle conclut et attribue 2 points aux vainqueurs

2ième concours

a) [15’ - 18’40] La maîtresse donne les nouveaux nombres : 7, 3, 2, 5, 8. Les élèves cherchent et calculent.
b) [18’40 – 19’40] Plusieurs élèves donnent d’emblée la réponse : 1680 mais d’autres proposent 2240 ou 2250
c) [19’40 – 21’50] L’excitation monte. Une élève s’avance imprudemment, se dit sure et certaine mais la vérification tourne à sa confusion : la règle a été violée (le même nombre a été utilisé deux fois. Aucun élève n’a plus utilisé d’autre opération que des multiplications.
d) [21’50 24’00] De plus en plus d’élèves sont convaincus que 1680 est le nombre le plus grand, mais ils ne savent pas dire pourquoi. La maîtresse constate que personne n’a trouvé mieux.
e) [24’00 – 26’30] Beaucoup d’élèves présentent leurs calculs et s’exercent au tableau à l’usage de l’arbre. La maîtresse commente la disposition des calculs. Mais d’autres élèves sortent du concours et demandent si on n’aurait pas pu trouver mieux. Ils ont la conviction que non. D’autres en sont à se demander pourquoi on n’essaie pas de changer l’ordre des nombres pour les calculs (Intervention intempestive de l’observateur).
f) [26’30 - 27’30] Le nombre 1680 est déclaré vainqueur. Deux points dit la maîtresse… bof ! répondent les élèves qui ne les comptabilisent même pas.

2ième phase : le jeu des marchands de méthodes

a) [29’45 – 30’00] La maîtresse propose de changer de jeu. Les élèves protestent : ils doivent avoir l’impression de n’avoir pas suffisamment exploré celui là, et puis les concours et la compétition les embêtent…
b) [30’00 – 31’30] Exposé de la consigne : Vous allez essayer de prévoir les calculs que vous allez faire AVANT DE CONNAÎTRE LES NOMBRES QUE JE VOUS DONNERAI ! Autrement dit vous allez écrire à quelqu’un la suite des calculs qu’il devra faire.

Scolie : La description d’une suite de calculs qui peuvent s’appliquer à des nombres différents s’appelle une méthode Ensuite nous mettrons vos méthodes à l’épreuve en demandant à des camarades de l’appliquer.

c) [31’30 – 41’30] Dans la réalisation observée la complexité du projet proposé aux élèves avait échappé aux préparateurs de la leçon : les élèves n’envisageaient pas du tout qu’il était possible de décider à l’avance des calculs à faire et surtout de l’ordre dans lequel ils peuvent être faits. Il aurait fallu qu’ils aient déjà « découvert » au moins implicitement certaines « propriétés » telles que l’inutilité d’utiliser une autre opération que la multiplication (du moins dans les cas proposés !) et la commutativité de la multiplication, par exemple.

Il en résulte que l'observateur doit se manifeste impromptu, pendant quelques minutes pour faire admettre le projet (ce qui constitue à la fois un effet Topaze et un effet Jourdain). L'intervention prend la forme d'une maïeutique dont l'analyse sort du cadre de cet article et qui ne constitue pas une solution idéale. L'étude de l'introduction de cette phase est à reprendre. Toutefois il n'est pas scandaleux de faire admettre certains projets et certaines techniques, même si les élèves n'étaient pas en mesure de les « inventer » et a fortiori de les justifier, à la condition que l'usage immédiat les justifie et les intègre dans l'action. C'est le cas ici.

Les élèves consentent à écrire des méthodes, par groupes. La maîtresse explique la règle du commerce des méthodes.

d) [41'30 - 43'24] Hélène fait sa proposition. Les élèves se lancent oralement dans des explications sur les moyens de décrire les méthodes de calcul. Ils n'ont pas à leur disposition les lettres pour désigner les nombres non encore déterminés. Et l'arbre, qui serait équivalent, se révèle en fait trop « abstrait ». Hélène utilise la taille des nombres comme descripteur : « les deux plus grands », « le plus petit », « celui du milieu » etc. ce qui pose immédiatement la question de savoir si la taille des nombres joue ou non un rôle.
e) [43'20 – 45'00] La méthode est expérimentée sur les deux premiers concours.
f) [45'00 – 47'00] Mais Hélène trouve quelques « acheteurs ». D'autres veulent débattre sur l'ordre dans lequel on devra prendre les nombres (que l'on ne connaissent pas exactement les nombres soit, mais est-ce que la taille des nombres importe ou non ?)
g) [47'00- 49'30] La maîtresse relance le commerce des méthodes et propose un nouveau concours.
h) [49'30 – 51'20] Après diverses discussions une nouvelle méthode est proposée : l'ordre dans lequel on prend les nombres n'a pas d'importance, il faut tout multiplier.
i) [51'20 - 54'30] La méthode est décrite par une phrase écrite au tableau. L'accord général se fait. Est-ce qu'on peut utiliser cette phrase pour faire le calcul ? est-ce qu'on trouve le nombre le plus grand possible ?
j) [54 '30 – 57'] Application de la méthode à un nouveau concours : les nombres donnés sont 2, 5, 3, 2, 4.

Scolie : Au cours de la séance les élèves doivent utiliser les termes « nombres » et « chiffres ». Le professeur peut en profiter pour surveiller sa propre formulation et faire rectifier les usages fautifs : les chiffres sont les signes : le chiffre 8 est composé de deux petits cercles superposés, les nombres sont ce qui est désigné par les chiffres, le nombre 8 est la somme des nombres 6 et 2. Il faudrait de même distinguer le « chiffre » « 253 » qui est écrit avec les chiffres 2, 5 et 3 concaténés et le nombre, désigné en numération décimale par le chiffre 253, et qui est la somme de deux centaines, cinq dizaines et trois unités, qui est impair, etc.

2^ième^ Séance (résumé)

1^ère^ Phase

Dans cette séance le professeur commence par rappeler le concours du nombre le plus grand et reprend la méthode de la veille.

Elle organise un concours, mais elle glisse parmi les nombres proposés le nombre 0.

Protestation des élèves qui trouvent cette pratique déloyale. La maîtresse rappelle les règles.

Les élèves par petits groupes cherchent une nouvelle formulation correspondant à la méthode qu'ils imaginent sans peine : ajouter le nombre 0 au produit des autres nombres.

La maîtresse va maintenant pouvoir formaliser le commerce des méthodes, mais déjà les critiques et les idées qu'échangent les élèves anticipent sur le concours de théorèmes. : Les deux iront de pair

Un premier concours conforte les élèves dans l'idée qu'ils ont une bonne méthode, à des détails de formulation près. La maîtresse introduit le mot théorème. Si ce qu'ils ont écrit est toujours vrai, ce sera un théorème.

2^ième^ Phase : Le concours de théorèmes

Un second concours contient un « 1 » et ruine la carrière de la méthode précédente comme théorème. Les élèves se mettent à la recherche d'une méthode.

Malgré la mise en scène imaginée par les préparateurs de la leçon, les élèves se passionnent plus pour les problèmes intellectuels que pour la gloire de vendre une méthode. Une élève explique qu'au lieu d'ajouter le 1 au produit des autres (comme ils l'avaient fait avec le 0) ce qui ne le fait compter qu'une fois, il vaut mieux ajouter le 1 au nombre le plus grand (sic) « parce qu'étant multiplié par les autres il sera alors compté plusieurs fois ». L'idée prendra plus d'une séance pour gagner l'ensemble des élèves.

Au cours du débat les élèves commencent à évoquer non seulement l'exemple des parties qu'ils ont jouées mais aussi « inventent » des parties possibles pour éprouver leurs méthodes ou critiquer leurs opposants. La complexité des raisonnements mis en œuvre par les élèves croît sensiblement mais des phases de jeu ou de concours organisées par le professeur maintiennent une bonne cohésion de l'ensemble des élèves.

A l'occasion d'un de ces échanges, la maîtresse introduit le terme de contre exemple et l'explique.

Séances suivantes

Au cours des séances suivantes beaucoup plus courtes, le professeur demandera les méthodes proposées par les élèves, les laissera discuter un moment puis renverra la suite au lendemain. De temps à autres, elle organisera des concours, ou des ventes de méthodes et elle introduira des « 1 » en nombres croissants si les élèves ne songent pas à évoquer d'eux mêmes ces parties comme contre exemples.

Angoisse de certains élèves : Madame est-ce qu'il existe des théorèmes qui n'ont pas de contre-exemple ?

4. Introduction à l'algèbre : la recherche du terme inconnu d'une somme[30]

L'enseignement d'une opération arithmétique est souvent essentiellement fondé sur la communication d'une procédure [31] de calcul associée à un petit univers de problèmes qui est supposé en présenter le sens. Les problèmes de dévolution se posent de façon plus impérieuse et plus évidente pour un enseignement fondé sur l'étude d'une relation.[32] Il s'agit d'introduire de cette manière, la soustraction avec des enfants de
7-8 ans (CE1).

Habituellement les enseignants présentent les savoirs qu'ils veulent enseigner comme des réponses à des questions, peut-être pour éviter le dogmatisme. Mais ils se focalisent habituellement sur l'enseignement des réponses, les questions n'étant là que pour les introduire et les justifier. De plus ces réponses sont rarement des relations ou des assertions, qui pourraient garder un sens même en étant isolées, ce sont essentiellement des procédures dont les questions introductives sont étroitement assujetties à accompagner l'acquisition progressive. Détachés de leur contexte, les algorithmes deviennent des réponses acquises pour des questions à venir sur lesquelles on ne sait pas grand chose.

L'enseignement décrit ci-après a pour ambition de faire passer les questions du domaine de l'enseignant à celui de l'élève, d'enseigner les questions autant que les réponses, et autant que possible d'enseigner les connaissances avec leur sens.

Tout l'apprentissage s'organisera autour d'une même situation de base, qui se répètera en évoluant : ‹‹le jeu de la boîte ››. L'enseignant a sur son bureau une boite cubique en plastique opaque, assez grande. Elle contient des pièces de type "blocs DIENES" (entre une dizaine et une centaine, il peut y avoir plusieurs pièces

---

[30] Extrait de Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques ch 5

[31] R. Kemp oppose ces deux aspects de la pensée mathématique : le procédural et le déclaratif. En fait la théorie des situations permet d'échapper à cette espèce de dichotomie sommaire en montrant les rôles que tiennent ces deux aspects dans les rapports "mathématiques" d'un sujet avec son milieu.

[32] Un programme de recherches à long terme conduit dans le COREM de Bordeaux a permis dans un premier temps de produire et d'étudier de nombreuses situations didactiques efficaces reposant sur la recherche d'un objet satisfaisant une condition exprimée par l'élève. L'exemple le plus connu est celui des rationnels, introduits par la commensuration ("3/4 est la grandeur qui, multipliée par 4, est égale à 3 unités") à la place de la conception habituelle du partage de l'unité ("c'est la grandeur obtenue en partageant l'unité en 4 et en prenant 3 de ces parts").

identiques). Il s'agit toujours de dire combien cette boîte contient de pièces d'un type donné mais par moments ce nombre ne peut être connu sans un comptage effectif, alors qu'à d'autres moments il est possible de le prévoir par un calcul sur les renseignements connus. Bien sûr, la plupart du temps, les élèves ne savent pas dans quel cas ils se trouvent. Le signe d'une certaine connaissance de la soustraction sera justement de savoir finalement quand et comment ‹‹on ›› peut déterminer ces nombres, et de repérer des situations que "le jeu de la boîte" peut modéliser.

PREMIER JEU : LA DEVINETTE

L'enseignant présente la boîte pour la première fois. Il demande aux élèves "combien pensez-vous qu'il y a de pièces dans cette boîte ?" puis "combien de pièces rondes ?" "Combien de pièces qui ne sont pas rondes ?". Le jeu va se répéter: "je remets tout dans la boîte, combien y en a-t-il maintenant ?" "J'en enlève une poignée, combien en reste-t-il ? Combien dans la poignée ?" "Combien de pièces rouges? combien de pièces qui ne sont pas rouges ?" etc. A chaque question les élèves produisent une réponse sur leur cahier de brouillon, puis l'un d'eux vient compter les pièces dans la boite pour connaître la solution de la devinette posée. "Ceux qui ont deviné juste ont gagné les autres ont perdu.

Tant que l'élève n'envisage pas une possibilité de prévoir la solution, et donc imagine un moyen pour cette prévision, le professeur ne peut pas lui faire comprendre qu'il lui pose un problème où il y a quelque chose à comprendre et à apprendre.

La situation se présente donc comme une situation d'action dont la stratégie de base est la réponse au hasard.

Mais la situation se "reproduit", les enfants apprennent ce qu'ils ont à faire, comment ils savent qu'ils ont gagné et qui le décide... Tous les élèves doivent et peuvent produire une réponse. Tous ou presque à ce moment là pensent qu'il faut toujours compter, sinon "on ne peut pas savoir". Un des plaisirs de la devinette réside dans le fait qu'on ne sait pas très bien si on va réussir ou non. La répétition du jeu permet aux élèves d'en comprendre la consigne et le vocabulaire technique minimal.

Mais pour passer à un vrai problème faudra-t-il donc enseigner une méthode de solution ? Ou plutôt plusieurs puisqu'il se présente plusieurs cas ?

Les enseignants ont des difficultés à accepter le jeu de la devinette : "nous avons tant de mal à obtenir que les élèves ne répondent pas n'importe quoi !". Certains élèves aussi : ils sont gênés et refusent de répondre, voyant bien qu'ils ont les plus grandes chances de "perdre" ils craignent d'être mal jugés pour cela. Ceux qui "gagnent" pensent que "c'est triché". Cette situation rompt complètement avec le contrat didactique habituel où il faut obtenir la réponse par l'exercice, le truchement d'un savoir repérable. Or, ce premier contrat de base est ici nécessaire, justement pour permettre à la prévision rationnelle d'émerger d'elle-même et de se définir contre la réponse au hasard.

DEUXIEME JEU : L'ANTICIPATION DE LA SOLUTION

Certaines questions sont si simples que les élèves n'envisagent qu'une réponse. Par exemple, on vient de compter toutes les pièces en les mettant dans la boite : 52 puis on a sorti, pour les compter, toutes les pièces qui ne sont pas grandes rondes, rouges et épaisses : 50. L'enseignant : " combien y a-t-il de pièces maintenant dans la boite ?" Beaucoup d'élèves pensent que la solution sera 2. Leur réponse est une anticipation de la solution, mais elle s'impose à eux sur le mode de la contingence (de l'évidence).

En proposant ainsi des petits nombres ou des nombres présentant une petite (ou une très grande) différence, l'enseignant rencontre des cas intermédiaires où la conviction n'est pas aussi grande, mais où toutes les réponses n'apparaissent pas aux enfants également plausibles. Ils entrent ainsi dans une nouvelle position (celle d'un sujet cognitif), plus réflexive par rapport à la situation d'action précédente, puisque leur réponse peut être l'objet, de leur part, d'une appréciation sinon d'un calcul ou d'un raisonnement.

La formulation des questions varie mais garde toujours les caractères d'une conversation courante : "ce qui est dans la boite", "tels objets","ce qui manque", "ce qui reste", "les autres" etc. Par contre le " jeu", son organisation et ses termes sont maintenant bien identifiés et institutionnalisés. Un élève peut faire jouer ses camarades et exiger le bon déroulement.

TROISIEME JEU : LA DÉCLARATION ET SA MISE À L'ÉPREUVE

Cependant l'enseignant s'enquiert de plus en plus souvent avant d'accepter le comptage "tu penses que tu vas gagner ?" "Pourquoi ?" "Êtes-vous sûrs ?".

Dans certains cas assez simples, certains élèves expliquent une méthode: Il y avait 37 cubes, il en reste 31, combien le maître en a-t-il caché dans sa main ? "J'ai compté sur mes doigts les cubes cachés 32, 33...jusqu'à 37". Plus rare : "Il y avait 21 cubes il en reste 2, le 21ème et le 20ème, alors on a enlevé jusqu'au dix-neuvième."

Ainsi la réponse peut changer subtilement de statut, le couple : ‹‹ terme “33” / résultat : “gagné”›› va devenir ‹‹l'assertion : “je dis qu'il y a 33 cubes dans la boîte”/ épreuve : c'est vrai ››.

Bien sûr, l'enseignant reste très neutre et accepte aussi bien : "j'ai bien regardé de ma place et j'ai pu compter qu'il y en avait 5." Il n'anticipe pas sur la signification des réussites : le fait de faire un raisonnement et de trouver la solution ne prouve pas que le raisonnement est bon, même s'il est effectivement correct ! Le comptage est alors le moyen institutionnel de la mise à l'épreuve de la réponse et pour certains déjà un moyen —mental et privé — d'anticipation de l'épreuve et d'obtention de la réponse.

QUATRIEME JEU: L'APPRENTISSAGE

À ce moment, l'enseignant peut déclarer qu'il s'agit :

- pour chacun, d'apprendre à répondre en étant sûr de sa réponse ou de savoir qu'on ne peut pas être sûr ;
- pour la classe, de trouver sans que ce soit le maître qui l'enseigne et de dire quelles méthodes on peut employer ;
- pour chacun, d'apprendre en réitérant des essais, en profitant des idées des autres si on les croit bonnes.

"Peut-on améliorer ses prévisions ?" En favorisant les descriptions de stratégies et les mini-débats sur des réponses ou des tactiques, qu'il évite d'institutionnaliser prématurément, le maître s'attache à entretenir l'espoir qu'on peut apprendre à gagner, et le plaisir d'y parvenir avec un peu de difficulté — (juste ce qu'il faut de difficulté pour optimiser le plaisir) — afin d'obtenir le maximum de transferts vers le niveau de contrôle par la connaissance privée, celle qui sollicite le plus une activité intellectuelle assez noble. La conduite didactique d'une telle situation a pour objet d'assurer des équilibres fondamentaux :

- Équilibre (oscillations autour d'une position) entre incertitude et certitude, désordre et ordre, difficulté et facilité...
- Équilibre entre les niveaux de contrôles : l'esprit ne peut pas manier en même temps trop de conditions trop incertaines. La maîtrise de l'incertitude passe par une bonne répartition des charges entre les différents niveaux d'adaptation. Suffisamment de savoir bien connu, un peu de savoir en voie d'acquisition, une activité cognitive publique et privée juste suffisante pour justifier mais permettre aussi les interactions etc.
- Équilibre temporel et rythme : Si les savoirs et les algorithmes ne viennent pas assez vite soulager les modèles implicites et les connaissances, par conversion, par information ou par enseignement, la recherche personnelle s'essouffle (se complexifie, se sclérose et échoue), le contrat didactique se vide de son objet. Si, au contraire, ils viennent trop vite, la compréhension peut n'avoir pas eu le temps de donner du sens à ces savoirs etc.
- Équilibre ente le plaisir de se définir par son activité intellectuelle et celui d'obtenir une sécurité reconnue de façon rapide et efficace, sans activité intellectuelle excessive par l'usage d'un savoir reçu.
- Équilibre entre le désir consommé (par des tâches difficiles ou peu gratifiantes ou simplement par l'accomplissement d'un projet...) et le désir produit (par des succès, des épreuves surmontées...).
- Équilibres sociaux et culturels dans la classe entre le nombre de producteurs et de consommateurs d'idées, de réussites et d'échecs...

La gestion de ces équilibres exige de nombreuses qualités pédagogiques et psychologiques mais elle repose d'abord sur des choix didactiques. Dans l'exemple que nous donnons le choix de la suite des valeurs numériques liées à des stratégies probables à proposer aux élèves au moment opportun est décisif.

"La découverte et l'emploi du savoir" est une pièce de théâtre mise en scène par l'enseignant, où chaque élève va se hasarder dans un rôle assez délimité mais c'est aussi un milieu qui doit lui laisser de la liberté à l'endroit où il doit s'exprimer. La juxtaposition de ces saynètes constitue son histoire.

5ième JEU : L'ANTICIPATION DE LA PREUVE

Cette étape est racontée dans « le cas de Gaël»[33]. Il y avait 52 objets dans la boîte, on en a retiré dix huit qui sont visibles, un élève a répondu qu'il en reste 30 dans la boîte. Au moment où un élève va contrôler le résultat par comptage, l'enseignant l'arrête. Tu es sûr ? Tu veux parier ? Bon, avant de conclure le pari, tu peux compter et tester ta réponse. L'enseignant fait compter l'élève : 30 dans la boîte, montrant un des 18 objets hors de la boîte, 31, un autre 32... L'enfant finit de compter : 48.

M : Tu trouves qu'il y a 48 objets en tout ?
E : Oui.
M : Et c'est vrai ?
E : Non, il y en a 52 !
M : Alors tu tiens le pari ?
E : Non.
M : Ouf, tu n'as pas perdu. Alors tu peux essayer encore, avec un autre nombre.

Le maître enseigne donc une méthode pour améliorer les chances de deviner juste. Elle n'est pas très performante mais elle va permettre de nombreuses découvertes et par des perfectionnements variés elle aboutira à la méthode standard encadrée de nombreuses autres méthodes.

Cette étape marque le début du passage, pour l'élève, de l'emploi d'une vérité contingente à celui d'une vérité nécessaire. L'élève est conduit à prévoir la valeur de sa réponse en simulant la vérification par comptage. Ce raisonnement apagogique n'est pas spontané mais l'usage le rend familier et il permet des recherches tout en donnant une sécurité a ceux qui commençaient à s'essouffler.

Cette phase transforme les "réponses" écrites par les élèves sur leur cahier en "essais". Après avoir choisi un nombre les élèves peuvent l'examiner - en fait ils doivent le faire, car cela est présenté à l'intérieur du rite — chercher s'il convient, c'est-à-dire s'il satisfait la relation connue— et le rejeter au besoin. Une distance temporelle et réflexive très importante s'introduit ainsi afin de permettre le passage de l'exécution d'algorithmes à l'examen d'une situation, à la considération d'hypothèses etc.

La situation simule un milieu qui détient des secrets que l'on peut lui arracher en les déduisant d'informations adéquates que l'on tire de lui. Ils ne peuvent pas encore obtenir la réponse correcte mais ils peuvent éprouver celle qu'ils donnent. C'est à partir de ce moment là qu'il est légitime de les voir donner une réponse s'ils sont sûrs et s'abstenir sinon. Et ce n'est plus seulement sur la base d'un contrat moral imposé. Cette phase permet que s'établisse enfin une négociation sur ce que l'élève fait lorsqu'il cherche: il n'a peut être pas trouvé la bonne réponse mais il peut au moins indiquer ce qu'il a essayé et pourquoi, comment il a corrigé, ou formé un nouvel essai etc.

Bientôt il faudra rejeter les recherches par exhaustivité et même les tâtonnements suivant une morale explicite d'adaptation au milieu : "Pour répondre à la question posée l'élève répond en agissant sur le système, en s'adaptant pour améliorer son efficacité "etc. Le processus comporte vingt deux étapes au cours desquelles les relations des élèves au savoir évoluent. L'addition remplacera le comptage comme méthode d'anticipation du résultat, puis elle deviendra si communément admise et si sûre qu'elle se substituera au comptage comme preuve cette fois, rendant ainsi inutile le recours au matériel. En même temps que les méthodes de calcul de la soustraction se multiplieront et se perfectionneront, l'exploration explicite des problèmes susceptibles d'être modélisés par le "Jeu de la boîte" permettra une classification de ces problèmes par les élèves suivant (implicitement pour eux mais explicitement pour le maître) les conceptions qu'ils mobilisent.

5. De l'espace à la géométrie

Comme collection de connaissances pour résoudre les problèmes "concrets" de mesure de la terre, de repérage de la position d'un point etc., des procédés simples comme la triangulation suffisent. La géométrie marque donc un autre souci. Dans l'approche en termes de situations, la *géométrie* peut être

[33] Voir G. Brousseau : "La théorisation de l'enseignement des mathématiques." Thèse d'état (1986).

définie comme *la collection des connaissances spécifiques du* ***contrôle de la consistance des énoncés*** *sur l'espace*. Peut être faudrait-il restreindre le champ aux figures de l'espace ?

1. Situation typique de la connaissance de l'espace

Ainsi la situation typique dans laquelle peuvent apparaître des énoncés de géométrie est celle ou un proposant et son opposant, disposant d'un certain répertoire spatial commun produisent deux anticipations différentes du résultat d'une même opération et tentent d'argumenter leur prévision. Les énoncés bien formés qu'ils vont échanger auront pour chacun le statut de théorème (vrai ou faux) a pour objet de convaincre l'opposant de la validité d'un énoncé avant la vérification empirique, par le jeu de déclarations consistantes avec le répertoire commun. Lorsqu'un énoncé proposé n'est pas accepté par l'antagoniste le proposant essaie de construire une preuve en utilisant les énoncés acceptés et des moyens de construction légitimes. Une preuve acceptée par une communauté devient une démonstration. La situation suivante constitue un exemple de situation nécessitant la mise en œuvre d'un théorème:

> *Situation « fondamentale de la connaissance de l'espace » : Un élève veut faire reproduire à distance un quadrilatère quelconque par son partenaire, de façon à ce que cette reproduction recouvre exactement le modèle qu'il a sous les yeux. Pour cela il communique les longueurs des quatre côtés croyant ces renseignements suffisants. Le partenaire prétend ne pas pouvoir effectuer le travail et réclame des renseignements supplémentaires. Contestation, débat…*
>
> *L'énoncé implicite du proposant est "quatre côtés déterminent dans le plan un quadrilatère et un seul"*
>
> *Un argument pragmatique consistera à proposer d'inverser les rôles*
>
> *La solution du problème, qui consiste par exemple à indiquer en plus la longueur d'une diagonale n'est pas une preuve.*
>
> *La preuve mathématique de la fausseté du théorème pourra être la production d'un contre exemple. Elle est fondée sur un argument sémantique et sur la réduction à l'absurde.*

Cette situation est comparable à celle du charpentier qui doit tracer et couper au sol et à plat des bois coûteux qui devront s'adapter dans l'espace à vingt mètres du sol !

2. Situation fondatrice de l'étude de la géométrie

La distinction entre connaissance de l'espace et géométrie tend à s'effacer dans notre culture devant la formidable efficacité des mathématiques dans ce domaine, et réciproquement devant l'intérêt des modèles géométriques pour toutes sortes d'études mathématiques. Cette distinction n'apparaît pas bien aux élèves et par conséquent elle n'est pas présente dans l'esprit des professeurs. Elle est pourtant très importante dès lors que l'on prend la géométrie non plus comme une connaissance utile par elle-même mais comme un moyen pour l'enseignement d'initier l'élève au raisonnement déductif ou comme initiation à l'usage d'une théorie mathématique. La confusion entre les différentes fonctions de la géométrie comme moyen de représentation de l'espace ou comme modèle d'une activité mathématique est la source d'erreurs, de malentendus et d'échecs.
Il s'agit de marquer dès son apprentissage quelle est la fonction, la nature et le sens des activités géométriques. Quels rapports il y a entre une figure, comme objet de la théorie mathématique, le dessin de cette figure et la figure envisagée par un sujet devant ce dessin. Une assez bonne approximation de ce que peut être une situation fondamentale permettant d'introduire la géométrie comme activité en quelque sorte opposée à la connaissance de l'espace, est la suivante.

(Situation d'introduction à la géométrie. Le professeur demande "sérieusement" à ses élèves débutants de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC très aplati et prétend donner des noms appropriés A' B' C' aux sommets du petit "co-triangle" qu'ils "doivent" ainsi obtenir. Devant la trop petite taille de ce triangle le professeur prétend avoir choisi un triangle ABC particulier et incommode. Il demande aux élèves de trouver un triangle dont le co-triangle sera le plus grand possible. Les élèves s'acharnent. Ils doivent finalement émettre l'hypothèse que ces trois points pourraient n'en représenter qu'un seul et en apporter la preuve contre "l'évidence" de la figure et non pas avec. Pour cela il faut s'accorder sur la définition de la médiatrice comme lieu.

Le professeur explique alors la différence entre "voir" et "démontrer". La géométrie ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui "doit" être vu.