# LES OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES, PROBLÈMES ET INGÉNIERIE DIDACTIQUE

## 1. OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES ET LES PROBLÈMES EN MATHÉMATIQUES

### 1.1 LA NOTION DE PROBLEME

#### 1.1.1 Conceptions classiques de la notion de problèmes

Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résoud pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus. Les difficultés commencent lorsqu'il s'agit de savoir quels problèmes il doit se poser, qui les pose, et comment.

Pour simplifier ces difficultés, il semble que les didacticiens des mathématiques essaient, depuis quelque temps, de projeter la collection des problèmes imaginables sur un sous-espace produit des composantes suivantes :

*Les intentions méthodologiques du professeur*

C'est la composante décrite au début du "livre du problème" de Glaeser et de ses collaborateurs (Exercices d'exposition, problèmes, exercices didactiques, exécution de tâches techniques, exemples d'illustration, exercices d'application, manipulations, tests, sujets de compositions, d'examens, de concours.) (IREM de Strasbourg, 1973).

*Les intentions didactiques et les objectifs*

(Par exemple ceux de Bloom) : acquisitions de connaissances, meilleure compréhension, analyse, etc.).

*Le contenu mathématique*

Presque toujours la question consiste à demander à l'élève d'établir une formule vraie dans une théorie en cours d'étude. Le contenu d'un problème est donc à priori définissable comme un couple (T,f) T étant une théorie supposée explicitée dans le cours, et f la formule à trouver, à établir ou à placer dans une démonstration de T.

Cette conception permet d'abord de placer certains problèmes les uns par rapport aux autres, selon une structure en treillis, à condition d'avoir une axiomatique convenable de la théorie à enseigner : les discussions sur le choix de la meilleure axiomatique sous-tendent la plupart des recherches sur les programmes depuis des années. "La meilleure axiomatique" serait celle qui permettrait avec le moins d'efforts d'apprentissage ou d'enseignement, d'engendrer la collection des théorèmes-problèmes, d'examen ou de contrôle, fixée par un consensus social.

Faut-il prévoir plusieurs théories particulières que l'on reliera ensuite (tendance "classique"), ou une théorie unitaire générale dont on déduit les autres (tendance "moderne") ?

Faut-il beaucoup d'axiomes faibles et bien rangés, (Dieudonné : "algèbre linéaire et géométrie élémentaire"[2] ) ou peu d'axiomes puissants (Choquet : "l'enseignement de la géométrie"[3]) ? Des axiomes "évidents" ou des axiomes "très élaborés" ?

En l'absence d'une théorie convenable de la connaissance, accompagnant une théorie pertinente de l'apprentissage, ces discussions n'ont jamais donné lieu à des études expérimentales scientifiques.

Cette conception permet en outre de distinguer d'une part, le couple (T, f) qui caractérise le problème, et d'autre part, la démonstration de $T \vdash f$, laquelle peut faire l'objet d'une étude mathématique ou métamathématique. Et cette distinction va servir de base à une nouvelle décomposition du contenu mathématique, suivant deux critères différents, mais voisins :

- le domaine d'application : (la théorie T), opposé à la "structure" mathématique ou logique opérant sur T.
- le modèle mathématique (au sens de la logique mathématique), opposé au langage.

---

[2] Paris : Hermann, 1964

[3] Paris : Hermann, 1964

Ces paires de caractères opposés correspondent à des traits distinctifs sur lesquels les enseignants s'appuient spontanément : abstrait-concret, contenu-formel, théorique-pratique, etc... mais leur mise en oeuvre n'a jamais fourni ni de typologies utilisables, ni d'indices objectifs.

*Composante mathématique*

En fait, toutes les tentatives de descriptions rationnelles et formelles des mathématiques sont utilisées pour essayer de bâtir des variables intermédiaires, qui, sans être le contenu lui-même, permettraient de l'engendrer à moindre frais.

La conception des problèmes sous la forme $T \vdash f$, conduit souvent à assimiler les hypothèses à ce qui est connu, les conclusions à ce qui est cherché (ou l'inverse) et la résolution à un cheminement qui coïnciderait facilement avec la démonstration cherchée.

Certaines démonstrations peuvent être obtenues sans coup férir par l'application d'une suite finie de spécifications connues à l'avance : il s'agit alors d'un algorithme, automate producteur de la démonstration particulière cherchée.

Dans ce cas, on peut faire la description, classique et merveilleusement simple et gratifiante pour le professeur, de l'activité cognitive de l'élève, de l'apprentissage et du rôle de l'enseignant : le maître apprend à l'élève, qui le mémorise, l'algorithme qui permet d'établir les théorèmes.

*Composante heuristique*

Mais pour d'autres démonstrations, il n'existe pas de tels algorithmes. Pour ne pas renoncer au modèle d'acquisition précédent, on peut imaginer que la démonstration est conduite par des "intuitions" qui joueront un peu le rôle des algorithmes. Ces intuitions pourront être rationalisées localement, lorsque la mise en oeuvre d'une théorie déjà constituée fournira la démonstration cherchée ou une partie de celle-ci (on appliquera un théorème), le choix des théories ou des structures étant lui-même guidé par des *heuristiques*, que l'on peut, après coup, invoquer pour justifier la démarche suivie. Malgré leur caractère un peu had hoc, ces concepts ne manquent pas d'intérêt, comme le montrent dans cette rencontre entre autres, les exposés de Glaeser, de Paquette, Ciosek, Wilson et Janvier[4].

### 1.1.2 Critique de ces conceptions

La validité d'une telle décomposition classificatoire est contestable : malgré les facilités qu'elle procure, elle a conduit à accepter des présupposés douteux en séparant des éléments qui fonctionnent ensemble.

*Le sujet*

Le sujet — l'élève — est absent de certaines de ces conceptions, où il n'apparaît que comme un récepteur, un enregistreur extrêmement simplifié que le savoir acquis ne modifie pas sensiblement, ni surtout pas structurellement.

*La signification et le sens*

De même (et par voie de conséquence) la *signification* de la mathématique disparaît : ce qui fait, non pas seulement la vérité, mais l'intérêt d'un théorème (ce que Gonseth (1946) appelait le caractère *idoine* d'une connaissance mathématique), ce qui fait que cette connaissance existe comme solution optimale dans le champ défini par un certain ensemble de contraintes relatives au sujet et/ou à la connaissance elle-même, (un objet au sens de Thom (1972) : une solution à un problème) ce qui dit l'intérêt du problème lui-même, etc.

Le sens d'une connaissance mathématique se définit, non seulement par la collection des situations où cette connaissance est réalisée en tant que théorie mathématique, (sémantique au sens de Carnap), non seulement par la collection des situations où le sujet l'a rencontrée comme moyen de solution, mais aussi par l'ensemble des conceptions, des choix antérieurs qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite, les économies qu'elle procure, les formulations qu'elle reprend, etc.

*L'apprentissage*

La construction axiomatique suggère un apprentissage féerique où le volume des connaissances — immédiatement acquises, structurées, utilisables et transférables — gonfle dans un espace vierge. Or...

---

[4] Ndlr : les textes de ces exposés sont publiés dans "la problématique et l'enseignement de la mathématique". Actes de la XXVIIIe rencontre CIEAEM. Louvain la neuve, 5-12 août 1976. Ed. W. et J. WANHAMME.

• Une notion apprise n'est utilisable que dans la mesure où elle est reliée à d'autres, ces liaisons constituant sa signification, son étiquette, sa méthode d'activation.

• Mais elle n'est *apprise* que dans la mesure où elle est utilisable et utilisée effectivement, c'est-à-dire seulement si elle est une solution d'un problème. Ces problèmes, ensemble de contraintes aux quelles elle répond, constituent la signification de la notion. Elle n'est apprise que si elle "réussit" et il lui faut donc un territoire de mise en oeuvre. Ce territoire n'est que rarement général et définitif.

• Du fait de cet emploi localisé, la notion reçoit des particularisations, des limitations, des déformations de langage et de sens :

• si elle réussit assez bien et assez longtemps, elle prend une valeur, une consistance, une signification, un développement qui rendent de plus en plus difficile sa modification, sa reprise, sa généralisation ou son rejet : elle devient à la fois, pour les acquisitions ultérieures, un obstacle, mais aussi un point d'appui.

Ceci montre :

• pourquoi l'apprentissage ne peut se faire selon le schéma classique de l'acquisition progressive et continue (telle que pour toute acquisition, il existe une suite finie d'acquisitions qui lui soit équivalente et apportant chacune une quantité d'information aussi petite que l'on veut).

Et en conséquence :

• pourquoi la confusion entre algorithme d'établissement d'une formule et algorithme d'acquisition d'un savoir est dénuée de fondement.

*Algorithme et raisonnement*

Plusieurs exemples montrent toutes les conséquences néfastes de cette confusion sur l'apprentissage des opérations dans IN.

En enseignant par les mêmes procédés, et au même âge, aussi bien une théorie sophistiquée, celle des probabilités et des statistiques, que ces prétendus "mécanismes" d'opération, il a été possible de montrer que cette séparation entre mécanismes et raisonnement n'est ni nécessaire, ni même utile ; l'apprentissage se fait par la mise à l'essai de conceptions successives, provisoirement et relativement bonnes, qu'il faudra rejeter successivement ou reprendre en une véritable genèse nouvelle à chaque fois.

Si les conditions l'exigent, l'élève peut lui-même résumer en "automatismes" des activités complexes, en retirant du sens et des possibilités de choix à son activité. Mais pour que ces automatismes puissent être utilisés, il faut qu'ils soient mis en place par le sujet lui-même.

*Obstacle*

Ces travaux qui se réfèrent à Bachelard (1938) et à Piaget (1975) montrent aussi que l'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise.

### 1.1.3 Importance de la notion d'obstacle dans l'enseignement par les problèmes

*Interactions*

Nous admettrons donc que la constitution du sens, tel que nous l'entendons, implique une interaction constante de l'élève avec des situations problématiques, interaction dialectique (car le sujet anticipe, finalise ses actions) où il engage des connaissances antérieures, les soumet à révision, les modifie, les complète ou les rejette pour former des conceptions nouvelles. L'objet principal de la didactique est justement d'étudier les conditions que doivent remplir les situations ou les problèmes proposés à l'élève pour favoriser l'apparition, le fonctionnement et le rejet de ces conceptions successives.

On peut déduire de ce régime discontinu d'acquisitions que les caractères informationnels de ces situations doivent eux aussi varier par sauts.

*Conditions*

Dans ces conditions l'intérêt didactique d'un problème va dépendre essentiellement de ce que l'élève y engagera, de ce qu'il y mettra à l'épreuve, de ce qu'il y investira, de l'importance pour lui des rejets qu'il sera conduit à faire, et des conséquences prévisibles de ces rejets, de la fréquence avec laquelle il risquerait de commettre ces erreurs rejetées et de leur importance.

Ainsi les problèmes les plus intéressants seront ceux qui permettront de franchir un véritable obstacle. C'est pourquoi à propos des problèmes, j'ai voulu examiner la question des obstacles en didactique.

## 1.2 LA NOTION D'OBSTACLE

### 1.2.1 Obstacles épistémologiques

Le mécanisme de l'acquisition des connaissances tel que nous l'avons décrit plus haut peut s'appliquer aussi bien à l'épistémologie ou à l'histoire des sciences, qu'à l'apprentissage et à l'enseignement. Dans un cas comme dans l'autre, la notion d'obstacle apparaît comme fondamentale pour poser le problème de la connaissance scientifique. Il faut se référer à Bachelard (1938) qui, le premier a mis en avant cette idée.

"Il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité ou la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain ; c'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles... On connaît contre une connaissance antérieure" (Ibid. p. 13).

Bachelard étudie des obstacles dans les sciences physiques et identifie les suivants : obstacle de l'expérience première, de la connaissance générale, l'obstacle verbal, l'utilisation abusive des images familières, la connaissance unitaire et pragmatique, l'obstacle substantialiste, réaliste, animiste, celui de la connaissance quantitative.

Ces obstacles ont résisté longtemps. Il est probable qu'ils ont leur équivalent dans la pensée de l'enfant, bien que l'environnement matériel et culturel actuel ait sans doute un peu modifié les conditions dans lesquelles ceux-ci les rencontrent. Des études à ce sujet sont en cours (Viennot, 1979).

En mathématiques un très important travail d'épistémologie a été entrepris dans des directions voisines de celles de Bachelard, dans l'entourage d'Althusser, Raymond, Badiou, Houzel, Ovaert, etc.

Il ne fournit pas pour l'instant une liste semblable à celle de Bachelard ; mais, de grands traits se dégagent ainsi que des classes d'obstacles. La notion d'obstacle elle-même est en train de se constituer et de se diversifier : il n'est pas facile de dire des généralités pertinentes sur ce sujet, il vaut mieux faire des études cas par cas. A côté du travail de recensement et de description des grands obstacles à la *constitution* des concepts, se développent des études portant sur les caractéristiques de fonctionnement des connaissances, *à la fois comme appui* et comme obstacle (alternativement et dialectiquement).

De plus, la notion d'obstacle a tendance à s'étendre hors du champ strict de l'épistémologie : en didactique, en psychologie, en psychophysiologie, etc.

### 1.2.2 Manifestation des obstacles en didactique des mathématiques

*Erreurs*

Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes.

De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une " connaissance" ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions.

Ces erreurs ne sont pas forcément explicitables.

Il arrive qu'elles ne disparaissent pas radicalement, d'un seul coup, qu'elles résistent, qu'elles persistent puis resurgissent, se manifestent longtemps après que le sujet ait rejeté le modèle défectueux de son système cognitif conscient.

*Exemple :* Un étudiant utilise le "théorème" suivant : "Si le terme général d'une série tend vers zéro, la série converge." Est-il distrait ? Récite-t-il mal — en inversant hypothèse et conclusion — un théorème du cours ? a-t-il mal compris la notion de limite ? ou celle de série ? est-ce une erreur sur les conditions nécessaires et suffisantes ?...

En rapprochant cette erreur de quelques autres, on comprend que de façon inconsciente, cet étudiant a fait un certain raisonnement, faussé par une représentation incorrecte des réels qui remonte à l'enseignement primaire et secondaire.

Le raisonnement est à peu près celui-ci : "Si $x_i$ tend vers zéro, il existe un rang n à partir duquel $x_i$ sont négligeables, à partir de ce n on n'ajoute pratiquement plus rien, donc la série converge".

Peut-être cet étudiant n'écrirait-il pas ce raisonnement sans s'apercevoir qu'il est faux, et pourtant, il lui paraît évident, car il repose sur certaines pratiques constantes dans l'enseignement primaire et secondaire : seuls sont écrits explicitement des nombres "raisonnablement longs" ; c'est-à-dire des décimaux

m

$d = \sum a_i \times 10^{i}$, tels que m et n < 10.

Les autres nombres sont désignés par des lettres ou représentés — pour des raisons pratiques — par un décimal voisin qui est présenté comme *le* décimal voisin ou même *le* nombre.

*Exemple* : $\pi = 3,14$

Si des questions d'incommensurabilité sont tout de même posées, elles le sont de façon provocante ou paradoxale et finalement gratuite : par exemple : " est-ce que 1 = 0,99... ?" et parmi les preuves avancées — généralement des raisonnements par récurrence — seules sont admises par les élèves les observations sur des rangs à distance finie.

Tout renforce la conception que l'on n'utilise qu'un ensemble *discret* de nombres et l'idée fausse qu'il existe $n \in \mathrm{IN}$ tel que $\forall x \in \mathrm{IR}, \exists d \in \mathrm{ID}$ tel que $[\, |x - d| < 1/10^n \Rightarrow x = d \,]$

(C'est-à-dire que x est "pratiquement remplaçable" par d, x - d est nul...).

Cette idée s'appuie-t-elle sur une "mauvaise" définition des décimaux véhiculée depuis l'enseignement élémentaire ? Nous reviendrons plus loin sur cette question.

*Franchissement*

L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu.

C'est pourquoi, il faut un flux suffisant de situations nouvelles, inassimilables par lui, qui vont le déstabiliser, le rendre inefficace, inutile, faux, qui vont en rendre nécessaire la reprise ou le rejet, l'oubli, la scotomisation — jusque dans ses ultimes manifestations.

Aussi, le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions répétées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance.

Cette remarque est fondamentale pour distinguer ce qu'est un vrai problème ; c'est une situation qui permet cette dialectique et qui la motive.

*Caractéristiques informationnelles d'un obstacle*

Une connaissance, comme un obstacle, est toujours le fruit d'une interaction de l'élève avec son milieu et plus précisément avec une situation qui rend cette connaissance "intéressante". En particulier elle reste "optimale" dans un certain domaine défini par des caractéristiques numériques "informationnelles" de la situation. Par exemple, la résolution des systèmes linéaires par substitution, efficace pour le rang 2 devient matériellement impraticable pour n assez grand.

La connaissance, l'homme et le milieu étant ce qu'ils sont, il est inévitable que cette interaction aboutisse à des conceptions "erronées" (ou vraies localement mais non généralement). Toutefois, ces conceptions sont commandées par les conditions de l'interaction qu'on peut plus ou moins modifier. C'est l'objet de la didactique de connaître ces conditions et de les utiliser.

Cette observation a d'importantes conséquences, d'abord pour l'enseignement : ainsi, si l'on veut déstabiliser une notion assez enracinée, il sera avantageux que l'élève puisse investir suffisamment ses conceptions dans des situations, assez nombreuses et importantes pour lui et, surtout aux conditions informationnelles suffisamment différentes pour qu'un saut qualitatif soit nécessaire.

*Exemple :* Un enfant de six ans sait distinguer des nombres jusqu'à 4 ou 5 à l'aide de procédés basés sur la perception. Ces procédés deviennent vite très "coûteux" et peu fiables dès que le nombre d'objets passe à 6 ou 7. Ils échouent au delà. Si l'on essaie d'enseigner dans l'ordre les nombres 6, puis 7, puis 8, on se heurte à des difficultés nombreuses et croissantes et une période de désarroi apparaît.

Au contraire, si l'on propose de comparer des collections de l'ordre de 10 à 15 objets, le modèle perceptif est si évidemment désavantageux, que l'enfant y renonce tout de suite et met en place de nouvelles stratégies (correspondance terme à terme). Ce que l'on veut appeler intuition n'est souvent que l'appréhension inconsciente des limites informationnelles des modes de connaissances.

### 1.2.3 Origine des divers obstacles didactiques

*Origine d'un obstacle*

Nous allons maintenant considérer les obstacles qui se présentent dans le système didactique. Ces obstacles à l'appropriation par l'élève de certaines notions peuvent être dus à plusieurs causes. Il est difficile d'incriminer seulement un des systèmes en interaction. C'est une autre conséquence de la conception de l'apprentissage évoquée ci-dessus. Ainsi la notion d'obstacle épistémologique tend à se substituer dans certains cas à celle d'erreur d'enseignement, d'insuffisance du sujet ou de difficulté intrinsèque des connaissances.

Toutefois, on peut essayer de distinguer diverses origines en mettant en cause le sous-système (du système maître-élève-connaissance) tel qu'en le modifiant on pourrait franchir l'obstacle, alors qu'aucune modification des autres systèmes ne permettrait de l'éviter.

On trouvera ainsi des obstacles didactiques :

— d'origine ontogénique

— d'origine didactique

— d'origine épistémologique.

Pour l'exemple ci-dessus, (relatif à l'acquisition de la notion de nombre) nous parlerons plutôt de limitation neurophysiologique que d'obstacle.

*Origine ontogénique*

Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge là.

L'épistémologie génétique met en évidence des stades et des moyens de développement (accommodations et assimilations), qui à la fois, ressemblent aux étapes du développement des concepts par les lois de régulations qui les font apparaître, et en diffèrent par la nature exacte des limitations qui déterminent ces régulations.

*Obstacles d'origine didactique*

Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif. Par exemple , la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix didactique fait par les encyclopédistes puis par la Convention (conformément à une conception qui remonte à Stevin lui-même) : compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés à tout le monde le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opération dans les entiers. Ainsi, aujourd'hui, les décimaux sont, pour les élèves, "des entiers naturels avec un changement d'unité", donc des "naturels", (avec une virgule) et des mesures. Et cette conception, appuyée par une mécanisation de l'élève, va faire obstacle jusqu'à l'université à une bonne compréhension des réels comme nous l'avons dit plus haut[5]

Il est caractéristique que le principal facteur de discrimination des élèves dans un questionnaire récent de l'*IREM de Rouen* soit le calcul faisant intervenir, à la fois, des décimaux et des produits par une puissance de dix. Ainsi, c'est la "compréhension" même de la définition des décimaux qui explique les comportements des élèves. Actuellement, un tel obstacle est devenu à la fois didactique et socio-culturel.

*Obstacles didactiques d'origine épistémologique*

Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus.

### 1.2.4 Conséquences pour l'organisation des situations problématiques

La conception de l'apprentissage, qui s'appuie sur l'étude du développement des connaissances en termes d'obstacles, diffère sensiblement de la conception classique, surtout en ce qui concerne le rôle et l'organisation des situations de problèmes. Et ce, d'autant plus que le problème va jouer dans les processus un rôle fondamental.

*Motivations — conditions*

Poser un problème consiste à trouver une situation avec laquelle l'élève va entreprendre une suite d'échanges relatifs à une même question qui fait "obstacle" pour lui, et sur laquelle il va prendre appui pour s'approprier, ou construire, une connaissance nouvelle.

Les conditions dans lesquelles se déroule cette suite d'échanges sont initialement choisies par l'enseignant mais le processus doit très vite passer en partie sous le contrôle du sujet qui va "questionner" à son tour la situation. La motivation naît de cet investissement et s'entretient avec lui. Au lieu d'être un simple moteur extérieur, elle est de frustrations en équilibrations constitutive à la fois du sujet, (de sa parole) et de sa connaissance.

[5] Plus généralement tous les "surapprentissages" précoces ont tendance à créer de tels obstacles. Sont-ils évitables ?

Ainsi la résolution d'un problème prendra pour l'élève l'allure d'une sorte de démarche expérimentale, l'occasion donnée à la "nature" (ici, aux concepts mathématiques) de se manifester dans ses activités.

*Caractère dialectique du processus de franchissement d'un obstacle*

Le processus de franchissement d'un obstacle comporte nécessairement une suite d'interactions entre l'élève et le milieu ; cette suite d'interactions ne prend un sens que dans la mesure où elles se rapportent *à un même projet* (chez l'élève) à *propos d'un concept*, dans la genèse duquel elles constituent une étape et dont elles fondent la signification.

Ces interactions mettent en jeu chez l'élève, des systèmes de représentations et peuvent souvent être interprétées comme des échanges de messages, même avec quelque chose d'aussi apparemment "amorphe" qu'un problème, car l'élève est capable d'anticipations et finalise ses actions. Celles-ci prennent, en conséquence, un caractère dialogique (a fortiori lorsque le maître y est impliqué). De plus, ces informations "échangées" sont reçues comme des faits confirmant ou niant des hypothèses ou encore comme des assertions. Si l'on admet qu'une connaissance se met en place en s'opposant à une autre sur laquelle elle s'appuie et qu'elle remplace, on comprendra que nous puissions dire que les processus de franchissement ont un caractère dialectique : dialectiques de l'a priori et de l'a posteriori, de la connaissance et de l'action, du moi et des autres, etc.

Organiser le franchissement d'un obstacle consistera à proposer une situation susceptible d'évoluer et de faire évoluer l'élève selon une dialectique convenable. Il s'agira, *non pas de communiquer les informations qu'on veut enseigner, mais de trouver une situation dans laquelle elles sont les seules à être satisfaisantes ou optimales — parmi celles auxquelles elles s'opposent —* pour obtenir un résultat dans lequel l'élève s'est investi.

Cela ne suffit pas : il faudra que cette situation permette d'emblée la construction d'une première solution ou d'une tentative où l'élève investira sa connaissance du moment. Si cette tentative échoue ou ne convient pas bien, la situation doit néanmoins renvoyer une situation nouvelle modifiée par cet échec de façon intelligible mais intrinsèque, c'est-à-dire ne dépendant pas de façon arbitraire des finalités du maître. La situation doit permettre la répétition à volonté de la mise à l'épreuve de toutes les ressources de l'élève. Elle doit s'automotiver par un jeu subtil de sanctions intrinsèques (et non pas sanctions extrinsèques liées par le maître aux progrès de l'élève). Le déroulement de l'apprentissage ne peut donc pas être programmé ; c'est seulement la situation et son choix qui peuvent l'être.

Il s'agit pour le didacticien d'identifier en même temps qu'une étape d'un concept, une situation qui pose à l'élève une question (de l'élève) à laquelle cette étape soit une réponse "constructible" dans le système de l'élève.

Nous avons été conduits à distinguer dans le fonctionnement de l'élève trois types de questions qui commandent trois types de situations didactiques.

*Différents types de problèmes : validations, formulations, actions...*

***a) Les questions de validation*** :

l'élève doit établir la validité d'une assertion, il doit s'adresser en tant que sujet à un autre sujet susceptible d'accepter ou de refuser ses assertions, de lui demander d'administrer des preuves de ce qu'il avance, de lui opposer d'autres assertions. Ces échanges contribuent à faire expliciter les théories mathématiques mais aussi à mettre en place les mathématiques en tant que moyen d'éprouver celles que l'on conçoit. Une démarche de preuve est construite dans une dialectique de la validation qui conduit l'élève, successivement à user spontanément des figures de rhétorique puis à y renoncer. Les relations que l'élève doit pouvoir établir pour cela sont spécifiques de cette dialectique. (Brousseau 1970).

Un problème de validation est bien plus un problème de comparaison d'évaluation, de rejet des preuves que de recherche de la démonstration.

***b) Les questions de formulation :***

Pour ses démarches de validation, la pensée doit s'appuyer sur des formulations préalables, même s'il faut pour cela les modifier. Les langages s'élaborent eux aussi dans des dialectiques moins spécifiques que celles de la validation. La communication (et ses contraintes) y joue un grand rôle indépendant en partie des problème de validité, du moins de la validité explicitable. Car, pour amener la pertinence du langage, cette communication doit être assujettie à remplir un rôle qui la soumet à des validations pragmatiques. C'est dans ce cadre que se manifestent le mieux les contraintes d'économie qui commandent les choix mathématiques judicieux.

***c) Les questions d'action***

ou de décision mathématique sont celles où le seul critère est l'adéquation de la décision — le système d'élaboration de cette décision peut rester totalement implicite ainsi que sa justification. Il n'y a à ce sujet aucune contrainte ni de formulation ni de validation. C'est la dialectique la plus générale, les autres n'en sont que des cas particuliers. Elle aboutit à la construction chez le sujet de régularités, de schémas, de modèles d'action, le plus souvent inconscients ou implicites.

*Dialectiques et obstacles*

Bien sûr, aucune de ces dialectiques n'est indépendante des autres, au contraire.

La formulation est souvent facilitée s'il existe un modèle implicite d'action : le sujet sait mieux formuler un problème qu'il a su résoudre.

L'action est facilitée par une formulation convenable (comme l'a montré Vigotsky[6]. Le langage découpe la situation en objets et relations pertinentes. L'action fournit un type de validation implicite fondamental et la formulation un autre...

Mais inversement, chaque domaine peut faire obstacle à un progrès dans les autres. Certaines choses se font mieux qu'elles ne se disent. Les modèles implicites prennent mieux ensemble un plus grand nombre de données et sont plus souples, plus faciles à restructurer. Des conditions trop favorables à l'action rendent inutile l'explication : par exemple, tant qu'on a utilisé les systèmes sexagésimaux des babyloniens pour les calculs astronomiques, la virgule ne s'est pas imposée, ni le nom de l'unité de référence, car une erreur de 1 à 60 était impensable pour qui sait de quoi il parle.

De même un langage "trop facile" à manier peut bloquer longtemps une reformulation nécessaire... (c'est l'obstacle verbal de Bachelard).

Le franchissement d'un obstacle implique très souvent, à la fois une restructuration des modèles d'action, du langage et du système de preuves. Mais le didacticien peut en précipiter les ruptures en favorisant la multiplication et l'alternance des dialectiques particulières.

Nous ne nous sommes pas trop attardés sur des généralités, il n'est pas possible de comprendre les rapports réciproques des obstacles et des problèmes sans une étude spécifique.

## 1.3 PROBLEMES DANS LA CONSTRUCTION DU CONCEPT DU DECIMAL

### 1.3.1 Histoire des décimaux

Il n'est pas possible dans le cadre de cet article de présenter une épistémologie des décimaux. Une telle épistémologie reste à faire. Elle est difficile à cause de l'éparpillement sur quinze ou vingt siècles des faits à prendre en considération. A chaque "étape" on croit qu'il n'y a qu'un pas à franchir mais il ne l'est pas, et c'est rarement faute d'avoir essayé. La recherche conduit alors à comprendre ce que ce pas avait d'inconcevable, et souvent aussi de ce qu'il faisait perdre par rapport à l'état précédent.

Les chinois avaient un système de mesure décimal au XIIIe siècle av. J.C., les babyloniens, la numération de position, les pythagoriciens concevaient l'ensemble des fractions et Archimède a contribué à concevoir les fractions comme rapports ; il faudra pourtant attendre les arabes (Abu'l-Wafa, 2ème moitié du Xème siècle) pour voir la notion de rapport s'appliquer aux fractions et ce rapport tendre à s'identifier aux nombres et il faut attendre Al Kashi (1427) et indépendamment Stevin (1585) pour que les décimaux apparaissent[7].

Ce dernier utilisait la même notation pour l'étude des nombres géométriques — en fait, les polynômes à coefficients entiers — et ce n'est pas par hasard. On avait utilisé les décimaux avant lui (Bonfils de Tarascon 1350, Regiomontanus 1563). Mais il est le premier à proposer de substituer les fractions décimales aux fractions rationnelles et de les noter de façon à permettre de ramener leurs calculs aux règles connues dans les naturels "chose si simple qu'elle ne mérite pas le nom d'invention", dit modestement ce brugeois, elle "enseigne facilement expédier par nombres entiers sans rompuz tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes". Mais il en voit tout l'intérêt et demande que" l'on ordonnât encore légitimement par les supérieurs, la susdite dixième partition à fin que chacun qui voudrait la pourrait user".

---

[6] (note 1983) notamment la métaphore, ou la métonymie - cf. le texte de Bauersfeld et Zawadowski dans les actes de la rencontre CIEAEM de Pallanza, 3-8 Août 1981, "Les processus de géométrisation et de visualisation" — Ed. M. Pellerey.

[7] Nous savons aujourd'hui grâce à A.S. Saydan (the earliest extant arabic arithmetic ISIS, 57, 1966), que c'est Al Uglidisi, qui vers 952, a le premier proposé l'usage des fractions décimales et les a écrites comme nous le faisons aujourd'hui.

### 1.3.2 Histoire de l'enseignement des décimaux

La "vulgarisation" des décimaux devient alors un problème de didactique et il faudra deux siècles pour franchir le premier pas : en effet, par exemple, Gobain en 1711 n'en fait pas état dans un ouvrage destiné aux marchands et d'Alembert en 1779, dans l'encyclopédie (à l'article Décimale), présente la question dans sa forme mathématique. Dans l'édition de 1784 l'abbé Bossut présente les décimaux à la manière d'un naturaliste : ce sont des entiers avec une virgule servant à représenter les mesures. L'aspect fraction décimale, est relégué dans un "appendice". Une fracture s'annonce entre les fractions décimales et les "décimaux populaires" aux algorithmes si merveilleusement simples, qu'ils vont permettre de vulgariser totalement la comptabilité commerciale. La question n'est pas réglée par la décision de la Convention : l'enjeu est trop grand tout au long du dix-neuvième siècle, l'aspect politique du problème didactique l'emporte. Ainsi Charles X réintroduit des "nouvelles toises" de 6 nouveaux pieds et ne conserve du système métrique que ses normes arbitraires. (La nouvelle toise mesure 2 m).

Les efforts de vulgarisation ont été facilités par le choix du système métrique. La générosité des intentions révolutionnaires a conduit à enseigner les "mécanismes" indépendamment des justifications mathématiques, (il fallait réussir en 3 ans à donner tout ce qui était essentiel pour le citoyen). Ces conquêtes du XIXème siècle vont créer des obstacles au XXème siècle où in ne s'agit plus de communiquer l'instruction, mais d'éduquer, de faire comprendre.

Les méthodes actives appliquées au système métrique font progressivement disparaître le décimal en tant que rapport, que fraction, il en restait quelque chose à propos des changements d'unités, mais l'efficacité pour les uns, la non directivité pour les autres contribuent à faire disparaître les derniers discours justificateurs.

Aujourd'hui, en France du moins, la rupture est officiellement consommée. Les programmes de 1970 ont introduit une construction (inachevée) des rationnels qui consiste à construire ces excellentes applications à partir des mauvais opérateurs que sont les naturels. Cette construction ne sert à rien, ni à l'introduction, ni à la compréhension, ni à l'étude des décimaux qui sont construits indépendamment : les deux continents se sont séparés. Et ils le sont surtout dans les conceptions même des maîtres et des parents.

### 1.3.3 Obstacle à la didactique d'une construction des décimaux

Ainsi une rénovation de l'enseignement des décimaux se heurtera aujourd'hui à de nombreuses difficultés techniques et socio-économiques : quel en sera le prix ? Nous n'avons voulu étudier que les questions d'épistémologie expérimentale dans des conditions scolaires normales pour l'enfant.[8]

Aussi les solutions que nous étudions ne sont-elles pas applicables dans l'état actuel des choses, par l'ensemble des maîtres. Nous ne pouvons pas ici donner en détail l'analyse de tous les obstacles, je renvoie le lecteur à un texte actuellement en préparation. Je me contenterai donc d'évoquer les plus importants.

Le fait d'attacher les décimaux à des mesures conduit à les faire considérer par l'enfant comme un triplet (n, p, u) : d'une part un entier n d'autre part une division par $10^p$, c'est-à-dire un changement d'unité, et une unité u : 3,25 mètres, c'est 325 cm exprimé en mètres. La pratique de "changements d'unité" font que p et u entretiennent des rapports privilégiés : (il suffit de proposer des exercices, où, à la fois, on change d'unité et on multiplie par une puissance de 10 pour s'en apercevoir). Le décimal fonctionne comme un entier et n'est plus détachable d'une unité : l'objet n'est pas le décimal, mais la grandeur physique. L'élève ne peut alors interpréter le produit de deux décimaux que dans le cas par exemple du produit de deux longueurs, ce qui le ramène aux obstacles bien connus des nombres concrets : il aura du mal à concevoir $a^2$- a et traînera implicitement des équations aux dimensions.

Les décimaux seront implicitement limités au rang des plus petites unités *pratiquées* couramment (ou encore ils auront deux chiffres après la virgule comme les francs). L'enfant raisonne comme s'il existait des atomes simplement plus petits que l'incertitude tolérable sur la mesure et comme si tous les nombres étaient des nombres entiers.

"3,25 est 325 avec la centaines comme unité" disent les commentaires officiels, toutes les relations topologiques vont être perturbées et pendant longtemps : l'enfant ne trouvera pas de décimal entre 3,25 et 3,26, mais par contre, il trouvera un prédécesseur dans ID à 3,15 : ce sera 3,14 etc. Même s'il corrige sa réponse sur tel ou tel point, les raisonnements intuitifs vont être guidés par ce modèle erroné (nous trouverons des erreurs sur ce point, comme celle citée plus haut, jusqu'à l'université).

[8] Ndlr : voir pour une présentation de ces recherches, Brousseau, 1980 et 1981.

Cette assimilation aux naturels sera évidemment renforcée par l'étude des opérations sous forme de mécanismes, c'est-à-dire d'actions que l'on effectue de mémoire, sans comprendre, comme dans les naturels, avec seulement un petit complément pour la virgule.

De tête, le calcul suivra une autre pente. On calculera le produit de la partie entière et celui de la "partie décimale" et on recollera les morceaux : $(0,4)^2 = 0,16$, mais $(0,3)^2 = 0,9$ et quelquefois $(3,4)^2 = 9,16$.

C'est encore l'effet de la mesure : ce qui compte le plus c'est la partie entière : la partie décimale fait ce qu'elle peut.

Évidemment, l'assimilation aux naturels ne va pas aller sans difficultés dans le cas de certaines divisions qui flanquent la pagaille dans l'édifice, mais le modèle ne sera pas rejeté pour autant ; ce seront les nombres " qui ne tombent pas juste" que l'on enfouira, indices que l'on a dû se tromper quelque part. On les arrondira, au mieux, on les "encadrera" (sans même les définir) mais l'élève les redoutera.

La définition implicite des décimaux les assimilant à "des naturels avec une virgule" fera que pour l'élève, les naturels ne seront pas des décimaux, mais $0,3\underline{3}$... sera un décimal.

Une des pires conséquences de cet obstacle sera souvent de faire passer aux yeux des élèves, pour des balivernes et des raisonnements sans objets, les tentatives trop timides et trop tardives de le franchir (en 4ème par exemple).

### 1.3.4 Obstacles épistémologique — Plan didactique

Les obstacles ci-dessus sont tous d'origine didactique. Les vrais obstacles épistémologiques et historiques sont autres.

Il s'agit d'abord de symétriser IN pour la multiplication. On peut concevoir quelques fractions mais très vite on veut pouvoir les obtenir "toutes" et pouvoir au moins les additionner et les multiplier par un entier. *Il est indispensable, non pas d'enseigner la construction, mais de poser le problème*. Il faut que l'enfant voit qu'il ne peut pas le résoudre avec les naturels et en tire toutes les conséquences, notamment à propos de l'ordre.

Nous avons montré que l'enfant à 10 ans peut inventer $IQ^+$ pour résoudre ce problème (voir ci-dessous le problème des feuilles de papier). Je ne crois pas que ID pourrait le satisfaire à ce moment et je ne vois pas comment et pourquoi il l'inventerait.

Par contre, une fois bâti ($IQ^+$, +, ≤) et placé devant la nécessité de ranger, par exemple, ou d'additionner de nombreuses fractions, l'enfant peut être conduit à utiliser de préférence les fractions décimales et à) voir qu'elles "approchent" les autres fractions (que ID est dans IQ). Nous avons aussi montré que cela est possible à l'aide du "problème de l'explorateur" et la didactique qui s'ensuit.[9]

Le problème est inverse du précédent. Il s'agit, non plus d'inventer et de combiner les éléments d'un ensemble inconnu et nouveau, mais au contraire d'approcher un ensemble connu avec une sous-famille bien choisie.

Un texte à paraître donnera le détail des 25 "problèmes" qui constituent la dialectique (qui dure 60 heures), mais je répugne à extraire de leur contexte les exemples que je donne au paragraphe suivant avec des commentaires insuffisants.

Tout y est question d'équilibre. Par exemple, si les enfants "mécanisent" le calcul dans IQ, l'invention de ID tarde et son usage prend mal. S'il n'est pas suffisamment connu, ID n'est pas construit ni compris.

Il faut par exemple se garder de "reconnaître" trop vite des pratiques connues : les enfants savent encadrer un rationnel entre deux décimaux aussi voisins qu'ils veulent, bien avant de découvrir que cette pratique est "la division" et de l'instituer en algorithme.

Il ne faut pas cependant laisser trop longtemps les grands problèmes au niveau implicite. Les dialectiques de la formulation et l'organisation fréquente de débats amène au niveau conscient ce qui doit être su.[10]

Le deuxième grand obstacle, c'est la conception des rationnels et des décimaux en tant que rapports, et puis en tant qu'applications linéaires opérant dans IQ. Dans une situation propice (voir le problème du puzzle) les enfants construisent cet ensemble d'application, quelques-unes d'abord, puis d'autres qu'il faudra désigner : les fractions, ou les décimaux, ou les naturels se prêteront à cette désignation.

---

[9] Ndlr : voir plus loin P..

[10] (Note 1983). La deuxième partie de cette remarque s'est révélée fausse : les dialectiques de la formulation et de la validation se sont révélées insuffisantes pour aboutir à l'apprentissage. Une phase d'institutionnalisation est indispensable.

La somme, la composition de ces applications, puis la décomposition sur ID, fourniront un modèle unificateur de IQ, de IN et de ID.

**1.4**

La recherche des obstacles épistémologiques en mathématiques exige certainement un effort d'invention car le concept de Bachelard s'adapte médiocrement à ce domaine. Mais il peut s'avérer fructueux pour l'enseignement, dans la mesure où :

— les obstacles en question sont vraiment identifiés dans l'histoire des mathématiques.

— leur trace est retrouvée dans les modèles spontanés des élèves.

— les conditions pédagogiques de leur "franchissement" où leur rejet sont étudiées avec précision de façon à proposer aux professeurs un projet didactique précis.

— le bilan d'un tel projet peut être estimé positif.

Quelques travaux dont certains très prometteurs ont exploité cette veine depuis l'article initial (1976). Nous pouvons faire une sorte de bilan provisoire.

Duroux (1982) a précisé les conditions que devrait satisfaire une connaissance pour pouvoir être déclarée un "obstacle" au sens de Bachelard et explique l'intérêt de ce concept qu'il convient de distinguer de celui de "difficulté".

Très souvent, c'est parmi les "difficultés" qu'il faut chercher les indices d'un obstacle

mais pour satisfaire la première condition qui dit qu'un *obstacle est une connaissance*, le chercheur devra faire un effort pour reformuler la "difficulté" qu'il étudie en termes, non pas de manque de connaissance, mais de connaissance (fausse, voir incomplète...).

Glaeser prend un point de vue contraire.[11] dans son article "l'épistémologie des nombres relatifs" (1981) "l'inaptitude à manipuler des quantités négatives isolées" et "la difficulté à donner un sens à des quantités négatives isolées".

Cette formulation montre ce qui manque, à Diophante ou à Stévin, *vu de notre époque*, dans notre système actuel. Nous repérons ainsi un savoir ou une possibilité qui manque au XVe siècle et qui empêche de donner la "bonne" solution ou la formulation adéquate. Mais cette formulation masque la nécessité de comprendre par quels moyens on abordait les problèmes qui auraient nécessité la manipulation de quantités négatives isolées. Se posait-on ces problèmes ? Comment les résolvait-on ? Ou croyait-on pouvoir les résoudre? Est-ce que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était perçu de la même façon à l'époque ? Pourquoi cet "état de connaissances" paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il raisonnablement efficace ? Quels avantages procurait le "refus" de manipuler des quantités négatives isolées ou quels inconvénients permettait-il d'éviter ? Cet état était-il stable ? Pourquoi les tentatives de le modifier ou plutôt de le renouveler étaient-elles vouées à l'échec à ce moment-là ? Peut-être jusqu'à ce que de nouvelles conditions apparaissent et qu'un travail "latéral" soit accompli, mais lequel ?

Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances mais Glaeser ne les a pas posées et nous ne savons pas bien contre quoi se fonde la manipulation des quantités négatives isolées ; ce qui serait très utile pour l'enseignement.

On peut supposer que l'emploi des "positifs" et des "négatifs" passait par l'intermédiaire d'une *interprétation* qui attribuait arbitrairement le statut de positif ou de négatif à des "grandeurs" d'abord essentiellement positives.

*Exemple* : l'entrée et la sortie des produits chez un commerçant peuvent être notées positivement ou négativement selon le poste-comptable où on les considère. D'Alembert expose longuement ce point de vue. L'usage d'une quantité négative isolée nie cette symétrie et risque de faire oublier la convention initiale, ou pire, affirme qu'il "existerait" des objets intrinsèquement négatifs ! Or, le caractère "relatif" des nombres négatifs a été un moyen important dans leur création et dans leur acceptation.

On peut trouver dans l'article de Glaeser ce qui permettrait de formuler cette hypothèse, mais elle n'est pas prise en compte comme telle, car l'usage naïf du terme obstacle ne le conduit pas à une méthode de travail. Au contraire, la définition des obstacles proposée dans l'article ci-dessus, et précisée par Duroux, fait obligation de rechercher cette connaissance obstacle et de l'attester.

Cette méthode conduit aussitôt et naturellement à examiner la deuxième condition. La connaissance obstacle a *son domaine de validité et d'efficacité*, et donc aussi un domaine où elle est a priori pertinente mais où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs, etc.

La recherche des indices historiques correspondants n'est alors plus celle de difficultés ou d'erreurs "*semblables*" (?) de notre point de vue d'aujourd'hui, mais celle des échecs caractérisés d'un certain

[11] Glaeser (1981) revendique le droit à un usage naïf du terme "obstacle" et néanmoins se réfère à Bachelard. Il s'agit donc bien d'un point de vue différent et délibéré.

savoir, en le plongeant dans nos connaissances actuelles, on peut prévoir le genre de problèmes qui vont être mal posés ou mal résolus et aller les chercher dans l'histoire : l'épistémologie tend à devenir systématique et expérimentale. les points de ruptures ne sont plus des *dates de découvertes* mais des problématiques et des types de savoir mis en oeuvre qui peuvent se rencontrer à des moments différents dans des domaines plus ou moins voisins.

Et notons bien qu'il ne suffit pas d'identifier les difficultés et les échecs de la connaissance-obstacle mais aussi et surtout ses *succès*, et donc remonter dans l'histoire aux obstacles précédents.

C'est ainsi par exemple, que l'on doit relier la "difficulté" à unifier la "droite numérique" (obstacle suivant, selon Glaeser) à "l'inaptitude" (curieuse formulation tout de même si on pense à ceux qu'elle est censée qualifier) à donner un sens à des quantités négatives isolées.

Il pourrait bien apparaître, en effet, que s'il a fallu de très grands "efforts" pour accepter d'abandonner la référence constante à la paire symétrique : naturels positifs, naturels considérés négativement afin de pouvoir donner un sens à un négatif isolé ; c'est cet effort même qui fait obstacle à "l'homogénéisation" de (IN, +) $\cup$ (IN, -) laquelle peut apparaître comme un mouvement contraire.

Duroux note bien que la conception des nombres négatifs étant de nature différente des nombres positifs peut prétendre au statut d'obstacle, mais il laisse entendre qu'il ne peut pas conclure pour les "obstacles" de Glaeser parce qu'ils ne s'expriment pas en terme de connaissance. Ce ne serait peut-être pas impossible, et nous aurions alors un de ces couples d'obstacles reconnus par Bachelard.

Il aurait fallu aussi, toujours selon notre "définition" (3ème condition), attester la *résistance* des connaissances-obstacles et l'expliquer ; par exemple en montrant comment la manipulation de nombres négatifs isolés avait nécessité la conception de "nombres relatifs" de nature différente des nombres positifs et comment, par la suite, ce concept avait à son tour fait obstacle à l'homogénéisation en une entité nouvelle de "nombres" (relatifs). Il est probable que ces deux concepts ont dû fonctionner comme deux pôles opposés ayant des domaines d'efficacité différents, chacun armant les objections au développement de l'autre.

C'est le sens de la troisième condition qui stipule que l'attestation des résistances à la mise en place et au rejet d'une connaissance est indispensable pour établir son caractère d'obstacle. Il me semble que l'article de Glaeser ouvrait de ce point de vue des voies intéressantes à explorer.

L'étude des domaines de validité et des résistances à l'emploi des quantités négatives isolées pourrait conduire à le replacer par rapport à un obstacle plus ancien et plus important : "Les nombres doivent être des mesures de quelque chose". Alors on ne peut utiliser les négatifs isolément sans risquer d'oublier ce qu'ils mesurent. Et on ne peut pas non plus considérer Z comme un ensemble homogène puisqu'il ne peut être un ensemble de mesures.

Je crois d'autre part qu'il faut considérer dans un cas comme celui-là toute la composante didactique attachée à l'évolution des connaissances dans la société : les objections de Stendhal ne sont pas à confondre avec les hésitations de d'Alembert même si elles peuvent leur être rattachées.

C'est ce qu'exprime Cornu qui analyse de ce point de vue la notion de limite (1983). Après avoir repéré dans une étude historique des difficultés qui lui paraissent de bonnes candidates pour fournir les obstacles à la genèse de la notion, il cherche dans les comportements des élèves les traces correspondantes. Il devient clair que ces conceptions-obstacles des élèves doivent être étudiées de la même manière, c'est-à-dire en utilisant les mêmes conditions, mais cette fois du point de vue de l'élève, de son milieu et de sa culture.

Cornu tend à mettre en évidence que conformément à mon hypothèse générale, certaines des difficultés des élèves peuvent se rassembler autour d'obstacles attestés par l'histoire.

C'est dans l'analyse des résistances et dans les débats qui les ont vaincues qu'il faut chercher les éléments qui permettront d'identifier les obstacles pour les élèves. En aucun cas, il ne saurait suffire de plaquer, d'appliquer sans modifications, l'étude historique à l'étude didactique. Et c'est aussi à cette source qu'il faut puiser les arguments pour choisir une genèse scolaire d'un concept et *construire* ou "inventer" les situations d'enseignement qui produiront cette genèse.

Il est important, en outre, de s'assurer que les arguments historiques et épistémologiques, psychocognitifs et didactiques qui font l'intérêt de l'étude des obstacles épistémologiques sont bien indépendants.

La mise en évidence des difficultés des élèves, puis la constitution de ces difficultés en modèles spontanés ou en connaissances-obstacles peut et doit se faire indépendamment (et même contre l'hypothèse) d'une identification historique.

La mise en évidence des résistances et des franchissements en situations scolaires est suivie de leur explication, elle-même prouvée par l'étude et la réalisation expérimentales de genèses du concept (et des situations qui les produisent). Là encore, la source des informations peut et doit être indépendante des précédentes au prix de certaines précautions méthodologiques.

La convergence, si elle se réalise, d'arguments indépendants de ces divers types, constitue un fait scientifique au sens plein du terme. La signification de ce fait apparaît alors clairement :

— d'une part il appuie les conceptions que je rappelais au début de mon article de 1976 sur l'apprentissage ou plutôt de la genèse psychogénétique, didactique et historique des connaissances (aspect positif de certaines erreurs des élèves et donc nécessité de problèmes présentant des difficultés, existence d'accommodations et de restructurations locales ou importantes, nécessité de saut de complexité, etc.).

— d'autre part il permet de *choisir* parmi la foule des "difficultés" que les élèves rencontrent, celles, peu nombreuses, qui doivent être identifiées et répétées explicitement et institutionnellement, et d'éviter ainsi que l'on submerge l'enseignement dans une masse inextricable de considérations sur la connaissance : heuristique, mnémotechnique, etc.

Bien que prometteurs les travaux rapportés ci-dessus n'établissent pas pour l'instant de façon irréfutable de tels "faits". La tâche est rude il est vrai. Bachelard trouve en physique des points d'appuis qui manquent en mathématiques (projets d'expériences, hypothèses, comptes-rendus) et son analyse s'arrête au moment où les "faits" passent sous le contrôle d'une véritable théorie scientifique : Bachelard ne fait donc pas une épistémologie des théories physiques mais celle de l'établissement de la physique.

Aussi était-il intéressant de rechercher en utilisant les procédés de l'analyse des situations, les changements de statuts de la connaissance mathématique. Chevallard a distingué ainsi des concepts protomathématiques, des concepts paramathématiques et mathématiques proprement dits. Ces distinctions me semblent indispensables pour avancer dans la recherche des obstacles dans la mesure où elles permettent de rattacher les connaissances à leur fonction et à leur mode de fonctionnement dans les activités scientifiques et en de sens que les obstacles en mathématiques sont peut-être plus souvent des obstacles au changement de statut que des obstacles à la connaissance elle-même.

L'explication des résistances est le coeur de la recherche des obstacles épistémologiques et il n'y a guère de méthode car chaque explication est spécifique de l'obstacle en question. Il est nécessaire de suivre pas à pas les tentatives de rejet, les remodelages et les reprises, et de chercher les conditions qui y ont présidé pour en saisir les mécanismes. Cette recherche est toutefois facilitée dans le cas d'un véritable obstacle par le fait qu'*un obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance achevée*, en ce sens que son rejet doit finalement être incontournablement explicité, et par conséquent qu'il laisse des traces, parfois profondes dans le système des connaissances (c'est la 4ème condition). Ceci montre qu'il n'est jamais le fruit unique d'une erreur passagère qu'il suffirait de réparer, d'une ignorance qu'on pourrait combler, d'une mode qui passerait et a fortiori d'une inaptitude ! Il peut résulter de circonstances culturelles sociales, économiques... mais ces "causes" s'actualisent en conceptions qui demeurent, une fois les causes disparues et qu'il ne suffit pas d'oublier, car c'est à ce niveau que le "débat" doit trancher.

C'est aussi par là que les obstacles épistémologiques intéressent le didacticien qui n'a que faire, a priori, d'un musée des connaissances-obstacles périmées. Dans la mesure où la connaissance-obstacle est constitutive du savoir, où elle est présente dans les modèles spontanés des élèves, et dans la mesure où un traitement inadéquat dans l'enseignement entraîne des erreurs répétées et dommageables, il devient indispensable de la reconnaître et de la rejeter avec les élèves.

Ce point de vue nous conduit sans rupture cette fois, au coeur de l'étude de l'évolution des théories mathématiques dont l'importance pour l'enseignement cesse d'être métaphorique et qui commence à s'articuler comme une composante essentielle de la Didactique ainsi que le soulignent Balacheff et Laborde dans la préface de leur traduction de Lakatos.

Nous commençons seulement à étudier et à exploiter cette notion d'obstacle et les théories qui l'accompagnent. Je suis convaincu que les méthodes et les problématiques qu'elle permet d'avancer et que j'ai essayé de présenter ici, montreront toute leur fécondité (en particulier pour l'enseignement) dans un avenir proche.

# LES OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES ET LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

### 1 POURQUOI LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES S'EST-ELLE INTERESSEE AUX OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES ?

La transposition en mathématiques de la notion d'obstacle épistémologique, que Bachelard (1938) pensait réserver aux sciences expérimentales, a été rendue possible et même nécessaire par le développement de la théorie des situations didactiques dans les années 70. Elle est directement issue des concepts de "saut informationnel" (Brousseau, 1974) et des "théorèmes" de *didactique* qui en découlent.

Une connaissance est le résultat d'une adaptation de l'élève à une situation S qui "justifie" cette connaissance en la rendant plus ou moins efficace, des connaissances différentes conduisant à des apprentissages et à des exécutions de tâches ayant des complexités différentes. Suivant les valeurs des variables pertinentes de S, on peut imaginer que l'on associe à chaque connaissance utile dans S, une surface d'efficacité (ou de coût). L'enveloppe supérieure de ces surfaces peut ménager des maxima, séparés par des cols (ou toute autre singularité). Donc pour faire créer par l'élève une certaine connaissance, l'enseignant "doit" choisir les valeurs qui rendent cette connaissance optimale par rapport aux connaissances concurrentes, ; il faut alors progresser par sauts et non de façon régulière.

Par exemple, si l'on veut favoriser la solution d'un système linéaire par combinaisons linéaires, pour des élèves qui connaissent la méthode de substitution, il vaut mieux choisir des systèmes de rang 4 que 2 ou même que 3.

Ce raisonnement peut s'appliquer pour analyser aussi bien la genèse historique d'une connaissance que son enseignement ou que l'évolution spontanée d'un élève.

L'apprentissage par adaptation au milieu entraîne donc nécessairement des ruptures cognitives : accommodations changements de modèles implicites, de systèmes cognitifs.

Si son histoire oblige un élève — ou un groupe culturel— à une progression pas à pas vers un col, le principe d'adaptation lui-même peut contrarier le rejet pourtant nécessaire d'une connaissance inadéquate. Ce fait suggère l'idée que les conceptions "transitoires" résistent et persistent.

Dans une voie ouverte par Gonseth (1936), ces ruptures peuvent être prévues par des études directes des situations (effet des variables didactiques) et des connaissances, et non seulement par des études (indirectes) des comportements des élèves (Brousseau, 1974, 1976).

Poursuivre dans cette voie exige pourtant le réexamen de l'interprétation des erreurs des élèves et des modalités de leur production (Salin, 1976). Jusque là, elles étaient attribuées toutes, soit à des dysfonctionnements erratiques, soit à des absences de connaissances, et donc connotées très négativement ; il faut maintenant envisager les erreurs récurrentes comme le résultat (produit par et construit autour) de conceptions, qui, même lorsqu'elles sont fausses, ne sont pas des accidents, mais des acquisitions souvent positives.

Il s'agit donc d'abord pour les chercheurs de :

a) trouver ces erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions ;

b) trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques ;

c) confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique.

### 2.2 LES OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES EN MATHEMATIQUES EXISTENT-ILS ?

Sur le premier point (trouver les erreurs récurrentes), les observations d'erreurs marquantes se sont développées :

[$(a+b)2 = a^2+b^2$ ; $0.a = a$ ; $\sqrt{a^2} = a$ ; $(0,2)^2 = 0,4$ ...], mais leur rattachement à des conceptions fait appel à des méthodes statistiques qui nécessitent des aménagements aux méthodes standard (Cronbach,1967 ; Pluvinage, 1977 ; Gras, 1979). Les progrès ont été rendus possibles par une meilleure définition de la notion de conception appuyée sur la théorie des situations didactiques.

La possibilité de provoquer l'acquisition de conceptions différentes est démontrée pour les rationnels (Brousseau, 1987) : soit la *commensuration*, soit le *fractionnement* sont obtenus par la simple manipulation des variables didactiques. Ratsimba-Rajhon (1981) observe comment ces deux conceptions peuvent se faire obstacle mutuellement et cependant coexister chez un même élève, et comment une conception initiale peut être, non pas rejetée, mais renforcée malgré un saut informationnel *a priori* suffisant.

Sur le deuxième point (trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques), l'étude de Glaeser (1981) sur l'histoire des nombres relatifs montre de façon décisive l'intérêt et l'importance de ces phénomènes de ruptures — observables dans l'histoire des mathématiques — pour la compréhension des difficultés des élèves. Mais il apparaît alors qu'il faut interpréter le modèle de Bachelard (1938) pour l'étendre aux mathématiques. Duroux (1982) propose, non pas une définition, mais une liste de conditions nécessaires :

a) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.

b) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.

c) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.

d) De plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.

e) Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre.

Sur le troisième point (confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage), les résultats commencent à paraître substantiels. Citons, sur la notion de limite, les remarques très fines de Berthelot et Berthelot (1983) et les importantes observations de Sierpinska (1985, 1987), et sur la continuité simple des fonctions, la deuxième et récente thèse de El Bouazzaoui (1988) relative aux conceptions des professeurs, des élèves, des manuels et à celles qui apparaissent dans l'histoire des mathématiques. Ces travaux laissent peu de doutes : des obstacles existent bien, même si les distinguer, les reconnaître, les répertorier et examiner leurs rapports et leurs causes, demande encore beaucoup de discussions et des recherches.

Fondamentalement cognitifs, les obstacles semblent pouvoir être *ontogéniques, épistémologiques, didactiques* et même *culturels*, selon leur origine et la façon dont ils évoluent. Peut-être serait-il intéressant aussi de les différencier selon la forme de contrôle de la connaissance (proto-mathématique, paramathématique ou mathématique) où se produit la rupture.

## 2.3 RECHERCHE D'UN OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE : APPROCHE HISTORIQUE

### 2.3.1 Le cas des nombres

L'histoire des nombres est riche en exemples d'obstacles épistémologiques :

Par exemple, le mesurage hétérogène, plus adaptable aux conditions sociales et matérielles particulières, a fait longtemps obstacle à l'installation d'un système décimal généralisé, et empêché, jusqu'à nos jours, celle d'un système métrologique universel. Beaucoup plus tard, les systèmes "supposant" que l'on peut engendrer toutes les fractions avec un petit nombre d'entre elles, comme on l'avait fait avec les naturels, vont commander l'organisation et la dénomination des fractions jusqu'à la fin du moyen âge et feront encore obstacle aux premières tentatives de Al Uqlidisi (952) pour recourir aux décimaux (Abu-L-Waffa, vers 961 - 976). L'usage permanent des rapports dans tous les calculs de l'antiquité, qui est lié à l'emploi de la fraction-mesure, fut un obstacle à la formalisation des fractions-rapports et à la conception des applications comme nombres ; l'étude de leur histoire montre plus nettement les avancées comme la tentative d'Euclide, et les résistances et les reculs comme celles des néopythagoriciens ; Archimède a-t-il connu les fractions archimédiennes ?

Le système sexagésimal, autre manière de résoudre à la fois les problèmes algébriques, topologiques et métrologiques de façon unique, fera difficilement place aux méthodes indiennes puis arabes, tout en leur servant d'appui...

### 2.3.2 Méthodes et questions

Le sens dans lequel la didactique entend les questions d'histoire doit être précisé. Il s'agit de produire des modèles de situations qui prennent en compte toutes les conditions pertinentes de la création des savoirs (connues dans l'histoire) et de les organiser selon sa propre logique, celle qui peut être confrontée à d'autres exigences (mathématiques, psychologie, sociologie, ergonomie...) et , entre autres, aux expériences de reproduction de ces savoirs. Cette méthode ne change pas plus en fait la méthode historique que les expériences de techniques de taille de la pierre ne le font pour la préhistoire. Des conjectures sur ce qui arriverait, si tel groupe humain pouvait utiliser tel savoir, ne sont pas d'aventureuses assertions sur l'histoire effective (et sur le nez de Cléopâtre) mais une simple hypothèse de travail sur un modèle momentanément sous le contrôle d'un autre système de connaissances. Cette méthode permet l'interrogation et la confrontation historique et assure la filiation des hypothèses, car lorsqu'une explication est contredite, la nouvelle modélisation peut être contrainte de donner des résultats meilleurs que la précédente sur un domaine plus vaste.

Il s'agit donc :

I) de décrire cette connaissance, de comprendre son usage ;

II) d'expliquer quels avantages cet usage procurait par rapport aux usages antérieurs, à quelles pratiques sociales il était lié, à quelles techniques et, si possible, à quelles conceptions mathématiques ;

III) de repérer ces conceptions par rapport à d'autres possibles, et notamment celles qui leur ont succédé, afin de comprendre les limitations, les difficultés et finalement les causes d'échec de cette conception, mais en même temps les raisons d'un équilibre qui semble avoir duré suffisamment longtemps ;

IV) d'identifier le moment et les raisons de la rupture de cet équilibre et d'examiner alors les traces d'une résistance à son rejet en l'expliquant, si possible, par des survivances de pratiques, de langages ou de conceptions ;

V) de rechercher de possibles résurgences, des retours inopinés, sinon sous la forme initiale, du moins sous des formes voisines, et d'en voir les raisons.

A côté des arguments historiques fondés sur l'étude des textes, des arguments techniques et épistémologiques appuyés sur des expériences liées à des apprentissages (sous réserve de précautions déontologiques) peuvent intervenir. A l'inverse, les arguments historiques peuvent intervenir dans des choix d'enseignement sous le contrôle d'une théorie des situations didactiques.

**2.3.3**

A titre d'exemple pour illustrer nos propos, prenons une connaissance fossile et examinons sa candidature comme obstacle épistémologique : l'usage exclusif des quantièmes pour exprimer les fractions dans l'Egypte ancienne. Certes, cet exemple manque d'intérêt didactique car les conditions "écologiques" qui lui ont permis d'exister ont vraisemblablement complètement disparu, mais il ne s'agit ici que d'un exercice.

*2.3.3.1 Identification des connaissances :*

Pour exprimer les mesures, le scribe égyptien utilise les naturels et des sommes de fractions dont le numérateur est 1, le dénominateur étant quelconque, il calcule sur ces nombres seulement par duplication et division par deux, de sorte que leurs rapports - implicites - apparaissent comme sommes des puissances de deux (voir les figures 1 et 2).

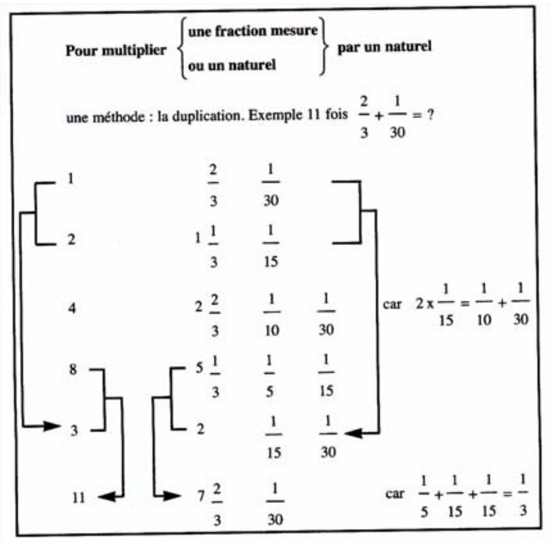


FIGURE 1

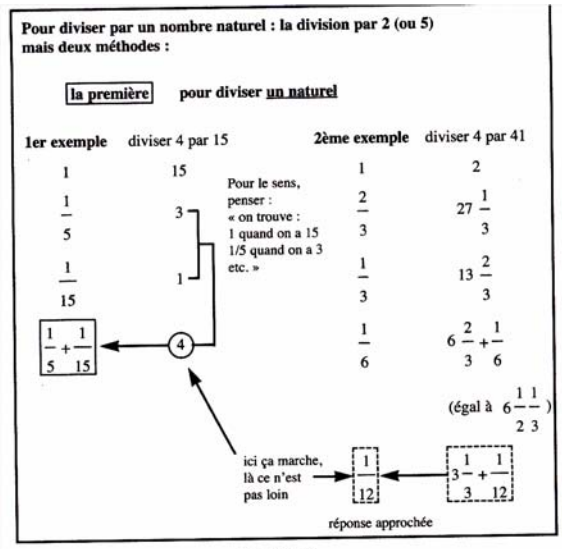


FIGURE 2

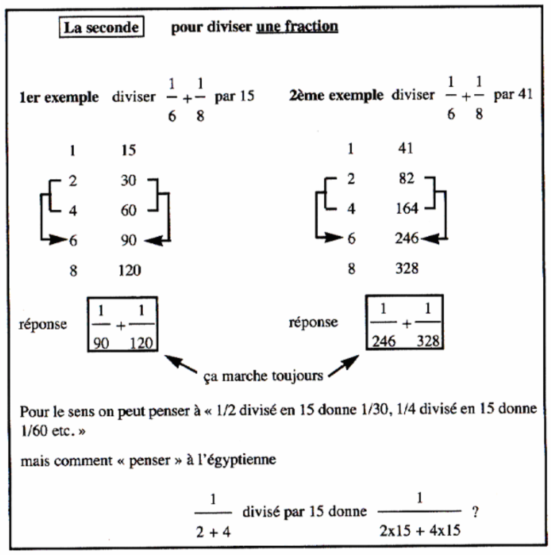


FIGURE 3

Il apparaît que si certaines techniques et conceptions sont un apport interne au milieu des scribes, il en est d'autres qui doivent s'appuyer sur les pratiques que les calculs sont chargés d'accompagner. De plus, il est vraisemblable que le résultat du scribe est l'objet d'un certain contrôle de la part de ses administrés, contrôle qui s'effectue dans le système populaire. Il est donc important de connaître quelles sont les manipulations matérielles nécessitées par ces activités sociales et comment elles varient, par exemple, selon les quantités dont il s'agit. Le scribe utilise ces calculs aussi bien pour des inventaires de récoltes, que pour des partages de ressources, en particulier des partages proportionnels, et surtout des échanges dans une civilisation sans monnaie.

*Remarque :* Les historiens se sont trop souvent contentés de demander à des mathématiciens d'interpréter les calculs observés. Les techniques de calcul sont intéressantes, mais elles n'expliqueraient pas très bien d'éventuelles survivances car elles sont réservées à une caste qui a disparu avec les conditions économiques (absence de monnaie), sociales et politiques (centralisation) qui la justifiaient. La liberté, pour les scribes, de modifier leur système de calcul et de prévision s'exerce d'ailleurs à l'intérieur des bornes étroites fixées par la compatibilité avec le fonctionnement social de leur caste. Toutes les inventions mathématiques qu'ils ont produites sont restées localisées, comme par exemple, le début d'écriture archimédienne pour les grands nombres. Le fonctionnement des connaissances doit donc être replacé dans son contexte social, économique et technique, en relation avec les pratiques de références qui les supportent.

*2.3.3.2 Quel avantages procure l'usage des quantièmes ?*

Pourquoi donc les scribes choisissent-ils le système hiératique, différent du système populaire hiéroglyphique ancien ? Pourquoi acceptent-ils tous les quantièmes ? Et pourquoi n'utilisent-ils que les quantièmes en excluant les numérateurs ? On connaît des choix différents en d'autres lieux et à des époques voisines.

L'Égypte ancienne connaît au moins deux systèmes potentiellement équivalents au système décimal "pratique" : les naturels et les "fractions" binaires. Dès que l'expression des quantités a commencé à se séparer en, d'une part un nom de nombre, accompagné d'autre part d'un nom d'unité, on aurait pu choisir dans chaque "grandeur" une unité, la plus petite que l'on peut manipuler, et exprimer toutes les quantités "possibles" avec des nombres naturels. Des conditions ergonomiques faciles à envisager faisaient qu'une telle décision aurait été coûteuse pour un intérêt bien faible. De plus, le partage et le dénombrement apparaissaient alors comme des opérations différentes nécessitant chacune une théorisation et des symboles spécifiques.

Mais déjà les calculs sont unifiés : dans les deux cas, on effectue les produits par duplication, les calculs sont simplement un peu plus difficiles dans le cas des naturels.

Le système de l'oeil d'Horus est ouvertement fondé sur le fait que le partage en deux parties égales est facile pour la plupart des grandeurs lorsque les quantités sont manipulables. Muni des procédés de calcul de l'époque, ce système permettrait théoriquement de résoudre tous les problèmes que nous résolvons aujourd'hui avec les décimaux. S'il a été supplanté par un autre, c'est pour des raisons de conception et d'adaptation aux situations de référence.

Le calcul des situations permet de prévoir (et les expériences d'épistémologie d'observer) diverses variables didactiques des situations de partage et de mesurage. On obtient ainsi au moins une quinzaine de situations qui conduisent à des conceptions différentes (Brousseau et Brousseau, 1987). Lorsque les quantités sont faibles et faciles à comparer et à manipuler globalement, la répartition approchée suivie d'une égalisation s'impose. L'opération peut être répétée pour des quantités plus importantes, mais très vite l'attribution régulière devient plus économique : le nombre de parts étant connu, on apporte à chaque part des quantités égales jusqu'à épuisement du stock à partager qui n'a pas besoin d'être mesuré d'abord (ce qui exigerait la même manipulation).

Si on ne connaît à l'avance, ni la valeur d'une part, ni le nombre de parts, ni la quantité totale, le partage peut être néanmoins préparé par la constitution de petites parts alignées, arbitraires mais égales. Si le moment venu, on veut prendre 1/9, on compte 1, 2..., 9 on prend le neuvième tas, puis on continue en comptant à) nouveau, 1, 2, ..., 9 et on prend le neuvième... et ainsi pour tous les multiples de 9. Ce genre de pratique devait se reproduire assez souvent dans les situations que le scribe avait à résoudre.

Le nombre de langues dans lesquelles le rang s'exprime à l'aide du même mot, du même suffixe que le quantième, montre l'ancienneté, l'importance et le caractère très répandu de cette méthode. On ne s'en souvient guère aujourd'hui que comme l'antique moyen de décimer une armée vaincue.

Un autre avantage du système hiératique par rapport au système ancien, c'est qu'il assure, dans les comptes du scribe, des calculs exacts (il permet l'écriture au moins sous forme de sommes de n'importe quelle fraction).Lors d'un partage de nourriture dans un village, le fait que le système dyadique ne produise pas d'inverse exact pour la plupart des naturels, se traduisait par divers phénomènes, dont celui-ci : la somme des nombres représentant les parts, calculées avec les fractions d'Horus, (jusqu'à un 64ème), n'est pas égale à la quantité totale distribuée. L'erreur croît comme le nombre d'habitants. La division du scribe, elle, tombe toujours juste et la longueur de l'écriture du quotient est assez bien contrôlable (figure 4).

Pour diviser un nombre naturel par un autre, on effectue successivement les deux méthodes.
D'abord, la première jusqu'à obtenir un « reste » inférieur à un, c'est-à-dire un nombre à droite, inférieur au dividende

**Par exemple : 2 ÷ 41**

<u>première étape</u>

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 41 | |
| $\frac{2}{3}$ | $27\frac{1}{3}$ | |
| $\frac{1}{3}$ | $13\frac{2}{3}$ | |
| $\frac{1}{6}$ | $6\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}$ | |
| $\frac{1}{12}$ | $3\frac{1}{3}\,\frac{1}{12}$ | |
| $\frac{1}{24}$ | $1\frac{2}{3}\,\frac{1}{24}$ | inférieur à 2 |
| | | or $2-(1\frac{2}{3}+\frac{1}{24})=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ |

<u>deuxième étape</u>

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 41 | |
| 2 | 82 | |
| 4 | 164 | |
| 6 | 246 | |
| 8 | 328 | réponse $1\frac{2}{3}\,\frac{1}{24}\,\frac{1}{246}\,\frac{1}{328}$ |

La réponse exacte peut être toujours obtenue

FIGURE 4

Du point de vue conceptuel, la restriction des fractions aux quantièmes permet de faire des raisonnements similaires à ceux utilisés pour les naturels : dans les calculs, le raisonnement sur les nombres de parts est symétrique de celui sur la valeur d'une part ; ainsi, la barre sur un nombre pour indiquer le quantième pourrait ne pas marquer l'absence d'un quelconque numérateur. De plus, les quantièmes se prêtent mieux aux partages proportionnels auxquels se livrent constamment le scribe. De toute manière, la conception des fractions antiques ne passe pas directement au fractionnement de l'unité, comme notre culture actuelle pourrait nous incliner à le supposer, mais par la commensuration, bien mieux adaptée au maniement des multiples. Justement, les quantièmes pourraient montrer le passage de la décomposition des multiples en somme des puissances de deux à une conception plus globale.

Il est clair que cette construction ne permet pas de concevoir qu'il puisse y avoir "deux" neuvièmes, et plus généralement, elle ne permet pas la somme de deux quantièmes (en tant que quantièmes). En particulier, la réitération qui figure bien la somme dans les naturels ne correspond à aucune opération simple : si l'on prend successivement 1/9 puis 1/9 (de ce qui reste), on n'obtient évidemment pas 2/9 mais 17/81. Au contraire, la réitération vraie figure bien le produit (par exemple, prendre les 1/5 de 1/4) et donne un résultat interne. Les fractions plus grandes que l'unité n'ont pas de sens possible...

Ce système permet en principe de conserver l'unicité de l'écriture et donne une certaine rapidité de décroissance des restes autorisant les approximations et les comparaisons. En fait, les scribes ne peuvent pas optimiser leur méthode et n'obtiennent cette unicité que par la tradition, en s'appuyant sur une grande dextérité dans le calcul et une familiarité sans égale avec ce type de fractions. L'acceptation des numérateurs quelconques *aurait fait perdre cette "unicité" de l'écriture.*

Le système polynomial babylonien propose une solution universelle où les naturels et les fractions s'écrivent avec les mêmes signes. Cette invention n'est possible qu'au prix d'une base énorme (60) qui dispense d'indiquer l'unité de mesure, puisqu'une erreur de 1 à 60 est impensable pour toute personne qui connaît la pratique de référence, ce qui a pu faire croire à un usage des fractions scalaires (une erreur de un à dix est souvent possible). L'écriture des fractions simples et de leurs sommes est simplifiée, mais les calculs sur les naturels s'en trouvent plus compliqués et il faut recourir à des tables. L'écriture de tous les inverses reste non résolue, mais la conception de la fraction à numérateur supérieur à 1 est en route ... sans qu'on puisse pour autant dire qu'un système "remplace" l'autre.

#### *2.3.3.3 Le système des quantièmes fait-il obstacle ?*

Les procédés égyptiens ne seront abandonnés par les astronomes grecs qu'au IIe siècle av. J.C. et nous en retrouverons des traces jusqu'au XIIe siècle dans la civilisation arabe, chez les fonctionnaires, les arpenteurs, les commerçants... Comment formuler en termes d'opérations modernes des tables comme celle de la deuxième méthode de division des scribes (tableau 1).

Cet exemple montre qu'un obstacle n'est fait ni de maladresses, ni d'explications réellement "fausses". Il est une adaptation légitime à des conditions précises, et il laisse des traces dans la culture. Nous ne savons pas encore caractériser les obstacles dans un métalangage spécifique comme l'a fait Bachelard.

### 2.4 RECHERCHE D'UN OBSTACLE A PARTIR DES SITUATIONS SCOLAIRES : UN OBSTACLE ACTUEL INATTENDU, LES NATURELS

Les naturels fonctionnent-ils comme un obstacle à la conception des rationnels et des décimaux ?

Une erreur comme " 0x3 = 3" que l'on rencontre très fréquemment, peut s'expliquer, d'abord par le fait que cette erreur, si elle se produit, ne sera jamais corrigée au cours de l'exécution d'une opération, à l'encontre de "3x0 = 0". Elle ne peut, en effet donner lieu à des erreurs, puisqu'au lieu d'avoir à l'envisager, l'élève décale simplement un produit partiel. Cela n'explique pas pourquoi elle se produit. Il est possible d'incriminer la conception de référence de la multiplication :

• 3x0 : prendre 3 fois 0, se comprend bien comme 0+0+0 = 0,

• mais pour 0x3 il s'agit de prendre 0 fois une quantité de trois : il faut bien que cette quantité "existe", et donc elle reste présente bien qu'on ne veuille pas la prendre.

Le raisonnement est l'inverse de celui que décrit Rogalski (1982) : un élève compte le nombre de lignes et de colonnes d'un rectangle. Lorsqu'il a compté le nombre de lignes en utilisant les carrés de la première colonne, il compte les colonnes en omettant la première, "parce qu'il a déjà compté le carré du coin". La conception fautive est-elle la même ? Si oui, elle concernerait alors la définition implicite de ce qu'est "0 fois". Mais s'agit-il du scalaire naturel ? du rapport naturel ? de l'application naturelle ? ou d'une conception nécessitant une structure plus riche comme les décimaux ? La réponse à ces questions dépend des connaissances de l'élève capable de corriger cette erreur. Diverses preuves peuvent être proposées pour convaincre un élève. Par exemple :

(Aucune ne peut être fondée sur la considération des rapports : pas de rapports de 0 à 1).

• 0 fois 3, c'est moins de une fois 3, le résulta c'est donc moins de 3 ; ou bien 1x3 = 3 ; 1/2x3 = 1,5 ; 1/10x3 = 0,3 ; 1/1000x3 = 0,003... ;

• 0 c'est 1 - 1, 0 fois c'est une fois moins une fois, 0 fois 3, c'est donc une fois trois moins une fois trois ; ou bien plus formellement : 0x3 = (4-4)x3 = (4x3) - (4x3) = 12 - 12 = 0 ;

• 0x3 = 3x0 = 0
• etc.

Aucune ne transforme directement la conception erronée, aucune n'empêche à elle seule le retour inopiné de cette erreur.

Nous avons donc un candidat-obstacle et la difficulté consiste à identifier la conception qui lui correspond. Nous pouvons la restreindre à cette simple représentation locale ou la rattacher à toute la structure mathématique qui la sous-tend, ici, les naturels. Ce problème a été maintes fois signalé comme fondamental en didactique : nous possédons plus de moyens expérimentaux de distinguer et séparer des conceptions que de les regrouper. Il paraît raisonnable de ne pas s'en tenir à une décision arbitraire et de choisir la structure la plus restreinte qui explique l'erreur. Mais si d'autres erreurs sont liées à des conditions voisines, n'est-il pas aussi raisonnable d'agrandir la conception supposée faire obstacle, afin d'obtenir un modèle commun ? Ainsi, on peut être tenté de rapprocher cette difficulté de celle qui fait dire à l'élève que multiplier agrandit, ou qui l'empêche d'envisager le produit de 0,35 par 0,84.

Une méthode est nécessaire : en poursuivant dans la direction indiquée (Ratsimba-Rahjon, 1981 ; El Bouazzaoui, 1988 ; Brousseau, 1987), il est possible :

• d'établir une situation "fondamentale" correspondant à la connaissance en cause ;
• de chercher les variables didactiques et les différentes conceptions qu'elles engendrent - en particulier celle que l'on suppose suffisante pour expliquer l'erreur ;
• puis d'identifier des groupes d'élèves qui "séparent" ces conceptions, à l'aide d'analyses factorielles ou à l'aide d'analyses statistiques plus classiques. S'il n'y a pas de discrimination nette, il n'y a pas lieu de considérer les conceptions comme distinctes.

Dans ces conditions, la première difficulté signalée ci-dessus n'appartient pas au même obstacle que les deux autres.

Mais examinons le problème du point de vue théorique : "comprendre" pour un enfant, c'est établir et relire sous sa propre responsabilité des phénomènes ou des faits laissés "indépendants", à la fois, par l'enseignant, par la situation, par son langage et par les connaissances apprises.

Par exemple, un enfant peut comprendre les premiers mesurages à l'aide du comptage, appréhender des propriétés de l'ordre à l'aide du mesurage, contrôler des opérations à l'aide de l'ordre ("ça" grandit, donc il ne faut pas diviser) ou d'une autre opération (multiplier, c'est ajouter un certain nombre de fois), comprendre le comptage grâce à des opérations ou à la recherche de successeurs... et toutes les relations possibles, vraies dans IN, sont bonnes pour donner du sens.

Ces connaissances, liées par l'élève personnellement, ou grâce à l'histoire de la classe, ne sont pas toutes institutionnalisées par l'activité de l'enseignant, mais certaines le sont certainement, et à juste titre dans le contexte. Elles sont, en tout cas, indispensables au fonctionnement convenable des connaissances institutionnalisées, enseignées par le professeur.

Pour l'élève, ces propriétés sont celles des nombres en général, de tous les nombres. Il est compréhensible que ce que les mathématiciens appellent le plongement de IN dans un surensemble, fasse disparaître certaines de ces propriétés qui ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou même qui ne sont plus vraies pour aucun.

L'élève n'est pas averti de cette rupture, car, ni la culture, et en particulier la tradition, ni l'ingénierie didactique n'ont encore produit les instruments nécessaires (exercices, avertissements, concepts, remarques, paradoxes...). Il commet donc des erreurs, et comme elles sont attachées à une certaine manière de comprendre les propriétés des nombres, ces conceptions fausses persistent et on peut observer les effets de la rupture pendant de nombreuses années.

Plus important encore est le mécanisme de cet obstacle : ce sont, non pas les connaissances enseignées qui sont en défaut — en général les enseignants pourvoient à cet inconvénient — ce sont les instruments personnels de la compréhension de l'élève. Il ne comprend plus parce que ce qui doit être changé, ce sont justement les moyens de ce qu'il appelait "comprendre" jusque là.

Nous avons bien avec IN toutes les caractéristiques que nous nous sommes imposées pour reconnaître un obstacle. Celui-ci est évidemment incontournable. Faut-il conserver le terme d'obstacle épistémologique à une connaissance de cette sorte ?

Faut-il donc penser que *toutes* les conceptions sont des obstacles à des acquisitions ultérieures ? Bien sûr, c'est dans leur nature, nous l'avons vu. Mais très peu présentent des difficultés suffisamment importantes et communes pour être traitées comme telles.

Il est aisé toutefois de comprendre comment un surapprentissage précoce peut augmenter les chances de transformer un savoir nécessaire en obstacle insurmontable.

Comme il l'est dit plus haut, l'analyse des situations, dont la solution fait appel à des divisions, a conduit à en distinguer une quinzaine qui relèvent de conceptions différentes; Les enseignants n'en distinguent qu'un très petit nombre, souvent une seule : le *partage* , dont ils étudient seulement deux aspects : "recherche d'une part" et "recherche du nombre de parts". Ils appellent les élèves à reconnaître tous les problèmes de division sur la base de cette unique conception, alors que l'étude avec les élèves des différentes sortes de divisions (recherche du reste, approche d'un rapport, etc. ne conduit à aucune difficulté spécifique, même lors de la généralisation.

Au contraire, l'usage du modèle des naturels va produire des difficultés lors de l'étude des décimaux. Ainsi, les élèves essayent de comprendre le problème en tronquant les nombres pour se ramener à un problème dans les naturels :

Par exemple, si on a payé 135,40 F pour 35,75 litres de gazole, l'élève envisage l'opération qu'il convient de faire pour trouver le prix d'un litre, en référence à une situation où on aurait payé 135 F pour 35 l. Le procédé ne va plus s'appliquer si on achète 0,75 l que l'on paye 0,40 F. La production de divisions par zéro (ou même par 1), ou de zéro par quelque chose, pose des problèmes "résistants" et qui dépendent, cette fois, de la conception utilisée (soustractions successives, ou inversion d'un produit par exemple) et de la nature des grandeurs représentées par les nombres (mesures ou scalaires). Du point de vue didactique, il faut les traiter comme un obstacle. Faut-il pour autant considérer cette difficulté comme un obstacle épistémologique ? il me semble qu'il nous manque pour l'instant beaucoup trop d'informations (en particulier sur la généralité du phénomène et sur ses incidences historiques) pour cela.

En conclusion, les erreurs observées chez les élèves, comme dans les pratiques historiques, peuvent être regroupées autour de conceptions particulières ou, au contraire, très générales. L'identification des conceptions est une difficulté importante pour tous les secteurs de la didactique.

*Les obstacles doivent* aussi *être considérés ensemble du point de vue de leurs relations*. Plusieurs peuvent coexister, se contrarier et successivement se supplanter, par exemple, les conceptions des fractions contre celles des décimaux, ou bien l'aspect "mesure" vs l'aspect "rapport" ou "application". Rejeter l'un conduit à l'autre jusqu'à la solution.

La place nous a manqué ici pour examiner le fonctionnement précis d'un obstacle. Mais une telle étude aurait mis en évidence le caractère social et culturel des obstacles, autant et même plus que leur aspect simplement psychologique et cognitif. Il faut bien remarquer, dans les exemples montrés par Bachelard, le rôle joué par un changement de pratique, de contexte, de système de référence. Ces conditions sont aussi des caractéristiques spécifiques de la relation didactique ; plus le gradient de la transposition didactique est fort, plus les environnements de la connaissance sont différents chez les deux partenaires didactiques, plus les risques de fonctionnement en obstacles sont grands.

### 2.5 LES OBSTACLES ET L'INGENIERIE DIDACTIQUE

Quelles qu'en soient les origines et l'importance, l'existence d'obstacles pose à la didactique un certain nombre de problèmes d'ingénierie : comment éviter les obstacles ? doit-on le faire ? peut-on les éviter ? comment franchir ceux qui ne peuvent pas être évités ?

#### 2.5.1 Problèmes locaux : les leçons. Comment traiter un obstacle repéré ?

Les élèves rencontrent un obstacle épistémologique : comment organiser sa reconnaissance et son "franchissement" ? On ne peut plus dire sa disparition. Il n'y a pas, à mon avis, de solution standard mais ce qui précède montre bien la nécessité de mettre en oeuvre, à la fois, des situations a-didactiques de toutes sortes et des situations didactiques.

a) La nécessité des situations de validation découle de la définition des obstacles : elles sont les seules qui permettent les intégrations personnelles dans la théories en gestation. les situations de conflits socio-cognitifs sont de ce type. Puisque l'explicitation de l'obstacle est indispensable, des situations de formulation peuvent être utiles. Puisque les obstacles se manifestent souvent au niveau des modèles implicites et en dépit d'une connaissance convenable au niveau conscient, des situations a-didactiques d'action le sont aussi.

b) Des situations didactiques ne sont pas moins nécessaires : l'intervention de la culture (mathématique) par l'intermédiaire du professeur est incontournable à différents moments du processus. Il s'agit, là encore, d'une différence avec les stades piagétiens.

c) Une autre caractéristique essentielle est le caractère dialectique des négociations des obstacles épistémologiques. Les changements de cadres et de rapport à la connaissance (dialectique outil-objet), en particulier, me semblent appelés à jouer un rôle important (Douardy, 1984).

#### 2.5.2 Les problèmes "stratégiques" : les curriculum. Quels obstacles peuvent être évités, lesquels accepter ?

Ignorer les obstacles conduit :

• soit à enseigner, parmi les connaissances "définitives", celles qui semblent pouvoir être comprises des élèves et qui doivent simplement s'ajouter aux précédentes. Le fonctionnement de ces connaissances incomplètes dans un contexte trop étroit produit des "cultures temporaires", puis des obstacles qui peuvent être plus ou moins bien surmontés par l'élève et par le professeur, mais qui provoquent de nombreuses difficultés ;

• soit à enseigner les connaissances définitives sous leur forme et leur "organisation" définitive comme un langage, avec le risque d'un usage uniquement formel et dénué de sens, lorsque ce langage peut ne pas être adapté au développement des élèves.

En tenir compte implique le choix d'une genèse que l'élève peut produire lui-même, et qui ne laissera pas dans l'ombre les problèmes que la connaissance enseignée a résolus. Cette genèse traite certains obstacles et en ignore d'autres. Il s'agit donc de les choisir car il serait absurde de restaurer inutilement des sources de difficultés et de multiplier les fausses pistes. Malgré ces précautions, une telle genèse ne peut être que très complexe. Par exemple, il a été montré (Brousseau et Brousseau, 1987) qu'il était possible à des enfants de 10 - 11 ans d'acquérir directement une connaissance mathématique correcte des rationnels et des décimaux avec tous les aspects de leur structure algébrique, topologique et ordonnée, et de traiter "convenablement" les principaux obstacles.

Dans le curriculum expérimental, chaque obstacle est abordé d'une façon spécifique, mais tous se manifestent pour les élèves :

• d'abord de façon implicite dans les moyens à résoudre des situations,
• puis comme des curiosités,
• avant de devenir des objets d'étude,
• puis enfin un fait banal.

Cette séquence de 65 leçons n'excède pas en durée le temps généralement consacré à l'enseignement classique des mêmes types de connaissances. Elle est toutefois très lourde par rapport à ce que les professeurs des années suivantes vont en utiliser, et totalement incommunicable à un enseignant placé dans des conditions ordinaires.

Faut-il faire les frais d'un tel investissement ? Jusqu'à quel point ?

### 2.5.3 Traitements didactiques d'obstacles

Les naturels forment obstacle à la conception des décimaux. Pour des raisons évidentes de proximité d'écriture et de structure, cet obstacle est plus difficile à surmonter que celui qu'ils opposent à la conception des rationnels. Izorche (1977) a montré comment les élèves de 15 - 16 ans identifient D avec D2 (ou avec D3), ensemble des décimaux tels que d.10 exp2 (ou resp. d.10 exp3) appartient à IN, puis D2 (ou D3) avec IN.

Cet obstacle se manifeste sous la forme de plusieurs difficultés qui peuvent être traitées séparément. La plupart sont bien connues :

• difficulté à accepter que l'on puisse obtenir un agrandissement par une division et un rapetissement par une multiplication,
• difficulté à trouver un nombre décimal entre deux autres, pour renoncer à trouver un successeur à un décimal,
• difficulté à accepter la double écriture des décimaux (par ex. 1,5 et 1,49),
• difficulté à concevoir le produit de deux scalaires décimaux,
• difficulté à concevoir de nouveaux types de divisions...

Prenons l'exemple d'erreurs signalé plus haut où, pour résoudre un problème, les élèves devinent intuitivement les opérations qu'il convient de faire en remplaçant les données décimales par des entiers naturels voisins. Ils échouent lorsque le dividende (ou même le quotient) sont tels que la réduction ne donne plus de naturel utilisable : si le décimal est inférieur à 1, ou même seulement inférieur à deux, on retrouve des confusions avec la soustraction, des interversions, des erreurs, des incapacités à comprendre le problème.

Le fait d'avoir préalablement distingué fortement les naturels et les décimaux, leurs aspects comme expression de mesures, etc., et même étudié "convenablement" (cf. Brousseau et Brousseau, cité plus haut) les multiplications par des décimaux inférieurs à 1 n'empêche nullement le phénomène de se produire.

La technique utilisée consiste à organiser un concours d'énoncés de problèmes afin d'obtenir que, dans ce cadre, les enfants recherchent eux-mêmes les variables des problèmes qu'ils proposent. Il s'agit de changements qui rendent le problème infaisable ou difficile : par exemple, "3 fillettes se partagent 5 m de tissu". Effectivement, cette situation change la position de l'élève par rapport à l'obstacle et le fait passer par les étapes décrites ci-dessus.

## 2.6 LES OBSTACLES ET LA DIDACTIQUE FONDAMENTALE

Mais les obstacles posent aussi des problèmes de didactique plus fondamentaux.

En effet, si l'installation des connaissances mathématiques chez l'élève se produit *nécessairement* selon le schéma d'une succession de conceptions différentes, chacune formant plus ou moins obstacle à la suivante, alors de nombreuses pratiques didactiques justifiées par le modèle classique simplement additif, sont à revoir et peut-être à rejeter. Or ce modèle préside aussi aux négociations internes (dans et entre les classes) et externes (entre les professeurs et la société) du système éducatif à propos des curriculum d'enseignement.

### 2.6.1 Problèmes internes à la classe

La fonction d'une leçon n'est plus seulement d'apporter un savoir nouveau qui se juxtapose harmonieusement aux précédents et qu'il faut apprendre, mais elle est aussi de faire oublier ou même de détruire explicitement des conceptions anciennes, qui avaient leur utilité mais qui sont devenues incompatibles avec ce nouveau savoir.

Il ne s'agit pas seulement d'un problème technique : le contrat didactique est complètement différent ; non seulement le diagnostic des erreurs, leur explication et la prescription qui s'ensuit sont modifiés, mais aussi la répartition des charges et des responsabilités entre le professeur et les élèves.

Pour signaler l'ampleur et la difficulté du problème, examinons seulement à titre d'exemples deux aspects très importants du contrat didactique, susceptibles d'être complètement transformés.

*a) Comment l'enseignant peut-il accepter que le résultat de son enseignement soit des connaissances* de la part de l'élève, dont il sait, non seulement qu'elles sont *incomplètes*, mais aussi qu'elles sont *fausses* et qu'elles seront démenties par la suite ? Il aura besoin pour cela d'un sérieux appui, non seulement de l'institution, mais aussi de la culture et de la société. Comment l'élève lui-même peut-il avoir confiance dans un contrat dont il saura tôt ou tard qu'il contient de telles clauses ?

b) *L'importance de la mémoire des circonstances de l'apprentissage* ne peut plus être ignorée et ne peut plus être exclue de la responsabilité de l'enseignement comme elle l'est aujourd'hui.

Ce point mérite une explication. Les obstacles épistémologiques ne résident pas dans la formulation des connaissances institutionnalisées (l'enseignement tend à communiquer un savoir propre à ce sujet) mais dans les représentations que le sujet — et éventuellement le professeur — véhicule pour assurer le fonctionnement et la compréhension des connaissances. Cette compréhension est liée aux circonstances de l'apprentissage, et elle est nécessaire à la mise en oeuvre des connaissances institutionnalisées. L'élève doit donc garder la mémoire des savoirs qui lui sont enseignés, mais aussi une certaine mémoire des circonstances de l'apprentissage qu'il organise à sa guise. Cette mémoire est actuellement à la charge unique de l'élève. La responsabilité du système éducatif à ce sujet se borne à l'organisation du savoir institutionnalisé en une progression *ad hoc*. Elle permet de régler les questions de dépendance temporelle de telle manière qu'il est possible à certains professeurs de proposer des suites de fiches, de leçons ou d'exercices sans rien dire de leurs relations. On pourrait même envisager la succession d'enseignants différents, chacun donnant son heure de leçon sans savoir autre chose du passé de l'élève que ses acquisitions institutionnelles. Dès lors, reconnaître l'existence d'obstacles épistémologiques et vouloir les traiter "officiellement" dans le rapport didactique conduit le professeur à reconnaître l'histoire de son élève, l'historicité de ses connaissances et de sa démarche. Cette connaissance l'engage donc, comme protagoniste et témoin de cette histoire, à faire appel à une mémoire didactique différente. Il doit se souvenir du contexte, des exemples, des comportements, mais surtout de leur sens qu'il fait évoluer. Une partie de ces savoirs est institutionnalisée, au moins au niveau de la classe, et il existe un petit stock d'images communes véhiculées et reconnues dans la culture. La mémoire de certains comportements personnels des élèves est indispensable. Cette reconnaissance d'un savoir en évolution et de tout ce que cela implique, est nettement visible dans l'expérience sur les rationnels citée plus haut.

Il est clair que ces connaissances encore personnalisées et contextualisées ne peuvent pas être mobilisées par les élèves sans l'appui d'un témoin ayant la mémoire des conditions de l'apprentissage précédent.

Ces *difficultés* sont encore plus visibles et aiguës lorsqu'elles concernent les *relations interniveaux*. Seule la référence à des exemples culturellement reconnus peut remplacer la mémoire du contexte de la classe précédente ; lorsque cette référence est impossible, tout une partie des acquisitions en cours de l'élève est perdue. Ignorer les acquisitions antérieures est aussi un moyen d'échapper aux débats que provoquent les reprises de savoirs anciens, et donc d'ignorer les obstacles épistémologiques.

### 2.6.2 Problèmes externes à la classe

Intégrer ce nouveau modèle de la communication didactique exige une modification de l'épistémologie des professeurs. Or, celle-ci sert de base à la négociation entre les enseignants et les élèves, et, aussi avec la noosphère et l'ensemble du public. On mesure l'ampleur des modifications culturelles et sociales qu'impliqueraient les changements dans ce domaine.

Le fait que des connaissances, même "fausses", puissent être nécessaires pour servir d'appui à l'établissement du savoir définitif, est difficile à assumer et à négocier. L'idée des surapprentissages, des retards à l'initiation ou des déperditions dans les changements de classe, bouscule toutes les habitudes. Comment obtenir un tel contrat sans distendre encore plus le difficile, légitime et nécessaire contrôle de la société sur la communication des savoirs ?