Processus de mathématisation (1)

Par G. Brousseau, Assistant à la faculté des Sciences Bordeaux

Nous voulons préciser quel est le processus pédagogique que nous croyons indispensable pour obtenir une bonne connaissance de la mathématique. Il nous a servi de modèle pour organiser la plupart des leçons et des séries d'activités dont nous avons parlé dans (9) (voir la bibliographie). Il est indispensable pour comprendre la méthode et pour indiquer comment il est possible de concilier des principes pédagogiques que des études superficielles présentent comme inconciliables.

La pédagogie tend à organiser les relations de l'enfant avec son milieu de façon à faire jouer des comportements acquis en vue de la création de comportements nouveaux.

1 Structures Situation - Modèles

La structure d'un ensemble est définie par les relations et les opérations qui lient ses éléments. Si la liste des relations qui définit une structure S_1 est contenue dans la liste qui définit S_2 , nous dirons que S_2 entraîne logiquement S_1, que S_2 réalise S_1 ,ou encore que S_1 est une *abstraction* ou un *modèle* de S_2.

Deux structures S_a et S_b peuvent être des réalisations différentes d'une même structure S ; nous dirons que S_a est une représentation, modulo S, de S_b. Inversement une même structure peut entraîner logiquement deux structures différentes. L'ensemble des structures qui réalisent une structure S est d'autant plus vaste que S est plus générale.

Considérons une situation, c'est-à-dire un certain agencement d'objets (ou de personnes) ayant entre eux certaines relations, II est parfois commode pour décrire cette situation de choisir une structure et d'établir, entre certains de ses éléments ou relations et les objets ou relations de la situation, des correspondances de signifié à signifiant.

Les parties de la structure ainsi associées à des objets de la situation sont dites concrètement significatives.

La structure est alors un langage permettant de parler de la situation. La correspondance "langage-situation" est arbitraire.

(1) Conférence prononcée Clermont-Ferrand lors des Journées de l'A.P.M. de mai 1970 sous le titre "Apprentissage des structures".

D’une part les parties concrètement significatives de cette structure entraînent logiquement d’autres parties ou d’autres structures ; d’autre part, dans la situation, certaines des relations décrites ont des conséquences : il peut arriver que les conséquences dans la structure soient concrètement significatives des conséquences dans la situation.

Alors, la structure aurait permis des prédictions valables. Une structure envisagée dans une certaine situation comme un moyen de prédiction, d’explication, avec un projet d’extension des parties concrètement significatives, constitue *un modèle* de la situation.

Il peut arriver que toutes les relations d’un modèle mathématique ne soient pas susceptibles de recevoir une signification concrète dans la situation décrite ces relations sont dites non pertinentes.

II peut arriver aussi qu’il n’y ait pas accord entre une conséquence dans la situation et ce que prévoyait le modèle. Celui-ci doit alors être rejeté ou modifié.

2 Modèles mentaux . Schéma et dialectique pédagogiques

Il est intéressant d’utiliser le vocabulaire ci-dessus pour décrire les situations pédagogiques.

A un instant donné l’enfant est placé devant une certaine situation : c’est-à-dire devant certains objets ou personnes qui ont entre elles certaines relations. Il y a de plus entre lui et cette situation certaines relations

il reçoit des informations et des sanctions

et il peut réagir par des actions : activité physique, émission de messages, prise de position ou jugement.

Lorsqu’un enfant, dans une suite de situations comparables (qui réalisent une même structure) a une suite de comportements comparables (qui relèvent d’une même conduite), on est fondé à estimer qu’il a perçu un certain nombre d’éléments et de relations de cette structure. II a donc au moins un certain *modèle mental* de cette situation.

Les relations de l’enfant, à un moment donné, avec le monde qui l’entoure constituent une situation. Si cette situation a été acceptée ou organisée par un pédagogue à l’intérieur d’un moyen de parvenir à un comportement prévu, nous l’appellerons *situation ou schéma pédagogique.*

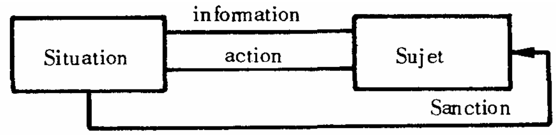
Mais une situation n’est pas statique elle évolue dans le temps par suite des échanges successifs d’informations et d’actions entre le sujet et la situation. Ces échanges constituent une sorte de dialogue, tendant à l'obtention d'une certaine satisfaction (dialogue de l'objet et du sujet, du concret et de l'abstrait, de l'a priori et de l'a posteriori...).

Au cours de ces échanges, l'enfant modifie son idée première de la situation, crée et éprouve un comportement, un modèle mental, un langage, ou une théorie. C'est un processus dialectique. Nous appellerons *dialectique pédagogique* une séquence de schémas pédagogiques ayant trait à une même situation ou à un même modèle mental.

3 Dialectique de l'action

a) *Schéma de l'action*

L'enfant est placé devant une certaine situation, dont il possède des modèles mentaux plus ou moins satisfaisants. Ces modèles lui permettent d'interpréter, de recevoir des informations sur cette situation. Il a de plus un but, ou une motivation d'agir physiquement ; au moins certaines des informations qu'il reçoit, ou qu'il peut recevoir, sont perçues de façon affective, c'est-à-dire comme des renforcements ou des sanctions résultant de son action.



b) Dialectique

En agissant, l'enfant va améliorer ou dégrader sa position, il estimera s'être rapproché de son but ou s'en être éloigné, le modèle utilisé sera renforcé ou abandonné. L'individu s'adapte par un processus d'essais et d'erreurs. Les méthodes de modification ou de changement des modèles sont mal connues. Il faut remarquer toutefois que ces changements sont uniquement orientés par les sanctions et leur intensité.

On observe au cours de certaines suites d'actions réussies que les modèles s'appauvrissent à chaque coup; le sujet recherche moins d'information, ne retient que celle qui est pertinente pour le résultat cherché il y a réduction et abstraction par une sorte de principe d'économie du modèle. Au contraire, au cours des suites d'actions qui échouent, l'enfant tend à enrichir le modèle, le précise, le concrétise, le rend capable de rendre compte d'une plus grande quantité d'informations jusqu'à ce qu'il soit contraint de l'abandonner.

c) Filiation des structures

Les structures les plus générales sont celles qui seront réalisées dans le plus grand nombre de modèles et celles qui auront le plus de chances d'être le plus fréquemment utiles. Si l'on admet que la fréquence de mise en oeuvre d'un modèle est une circonstance favorable à son élaboration, il faut admettre que les structures les plus générales seront les premières que les enfants acquerront. C'est ce que l'on observe dans la dialectique de l'action.

On a mis en évidence aussi un certain ordre d'apparition des modèles mentaux chez l'enfant et montré qu'un modèle ne pouvait être utilisé efficacement et familièrement lorsqu'il n'était pas relié à une structure ou à une famille de structures déjà acquises ou en cours d'acquisition. Cette condition paraît être liée à la dialectique de l'action l'enfant doit pouvoir opérer sur son modèle un certain jeu de modifications. Un modèle particulier acquis tout seul par apprentissage n'est pas instrumental et ne peut pas être adapté.

d) *Modèles implicites*

La dialectique de l'action aboutit à la création par le sujet de modèles implicites qui règlent cette action : il s'agit de l'association de certains stimulus à certaines réponses.

Si l'enfant possède un langage approprié, il peut expliciter certains de ces modèles. Un observateur peut en expliciter davantage mais il reste sans aucun doute des procédés, des méthodes de recherche attribués à l'intuition qui font que certains trouvent assez régulièrement là où d'autres échouent régulièrement aussi, et ces méthodes ne sont pas explicitables.

4 Dialectique de la formulation

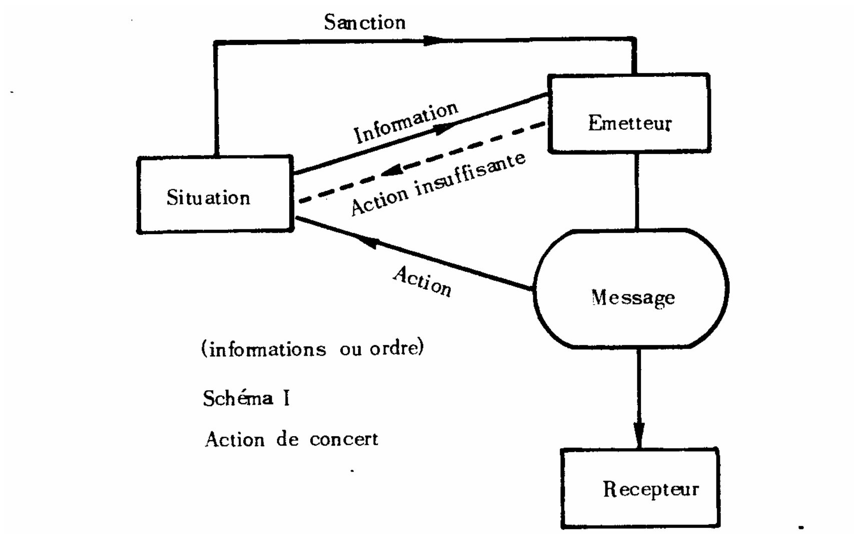
Par abus nous avons confondu les modèles mentaux explicitables avec les modèles mathématiques : ceux-ci sont explicités dans un langage très particulier. Pour qu'apparaisse objectivement ce que nous appelons de la mathématique, l'enfant doit exprimer, à propos d'une situation, des informations pertinentes dans un langage conventionnel dont il connaît ou crée les règles il ne suffit pas que l'enfant placé devant une situation ait l'envie et la possibilité de la modifier, il faut qu'il construise une description, une représentation, un modèle explicite.

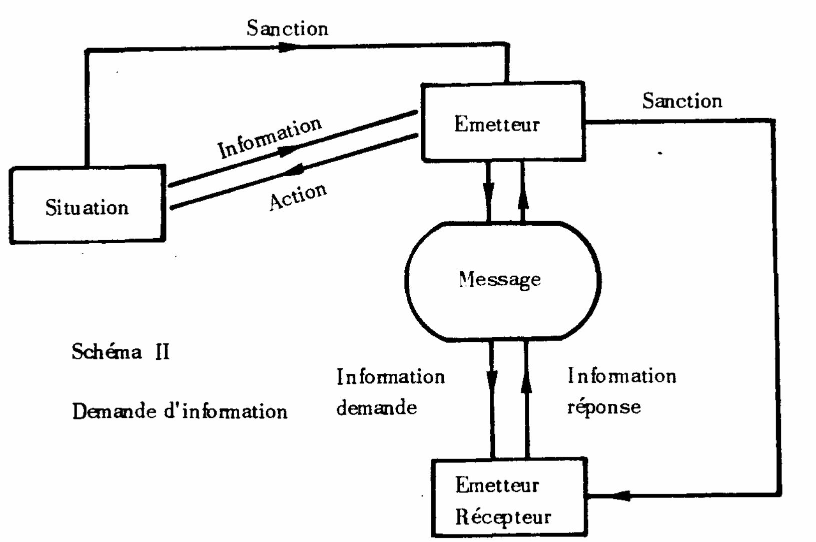
a) *Schémas de la formulation*

Si nous voulons que la création d'un modèle explicite suive notre schéma pédagogique de base, il faut que ce modèle soit utile à l'obtention d'un résultat ; tous les schémas se ramènent au suivant l'enfant peut obtenir sur la situation certaines informations mais il ne parvient pas, par sa seule action, à obtenir le résultat attendu, soit parce que ses informations sont incomplètes, soit parce que ses moyens d’action sont insuffisants.

S’il se rend compte alors qu’une autre personne est susceptible d’agir sur la situation de façon favorable, il cherche à obtenir son concours puis échange avec elle des informations ou des ordres: ce sont des messages échangés entre un émetteur et un récepteur.

Différents schémas de la formulation





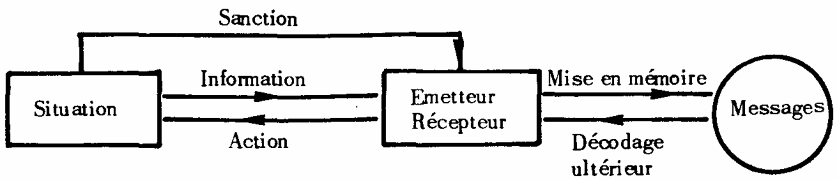


Schéma III

Mise en mémoire

Le schéma de la formulation fonctionne de la façon suivante:

Le récepteur agit en fonction du message qu'il a reçu. Si cette action n'est pas satisfaisante, il peut la corriger par un nouvel échange de messages, mais la communication ne peut s'établir que si le récepteur et l'émetteur utilisent le même code, et l'utilisent bien l'un et l'autre. Il faut ensuite évidemment que le contenu du message soit correct.

Si le schéma pédagogique est correct, lorsque la sanction de l'action est négative, il s'amorce une suite de corrections portant sur les messages qui aboutit à la formulation cherchée. Evidemment le fait que les messages soient écrits peut faciliter les corrections.

Nous avons donné dans (9) et dans d'autres ouvrages (7) de très nombreux exemples de leçons qui réalisent des schémas de la formulation

- Désignation des objets et des ensembles.
- Egalités.
- Désignation des parties d'un ensemble, opérations ensemblistes.
- Création des couples, ensemble produit.
- Création des cardinaux.
- Désignation des cardinaux, des sommes.
- Désignation des vecteurs.
- Numération, etc.

Ce schéma fonctionne avec régularité.

Les relations des deux interlocuteurs avec la situation permettent de prévoir quelle est la sémantique – le contenu – des messages qui permettront l'obtention du résultat. Les règles imposées au canal de la communication, et les connaissances des deux sujets limiteront le choix du *répertoire,* (c'est-à-dire l'ensemble des signes formels qui permettent de supporter les sens des messages échangés) et de la *syntaxe* utilisée : (c'est-à-dire les règles de construction du message à l'aide des signes du répertoire). Il est possible, en combinant judicieusement une situation et les conditions d'échange des messages, de commander le type de message susceptible d'être créé. Il est nécessaire que, si le message ne passe pas (mal codé, ou mal compris) l'action ne puisse aboutir.

b) *Conditions sur la communication*

Un message, même un ordre bref nécessaire à la réalisation d'une tâche, contient forcément une partie pertinente, concrètement significative.

Il existe des relations de signifiant à signifié entre certains éléments du message et certains autres de la situation. On ne connaît pas de système de conditions suffisantes pour qu'il soit un message mathématique mais le fait que le message soit

— écrit,

— sans ambiguïté,

— sans redondance (c'est-à-dire ne contienne pas plusieurs fois la même information),

— sans information superflue et plus généralement,

— minimal en ce qui concerne à la fois le message, le répertoire et la syntaxe, paraît propre, dans la plupart des cas où nous l'avons réalisé, à produire la création de messages quasi mathématiques, c'est-à-dire de modèles.

c) *Dialectique de la formulation*

Elle peut avoir deux résultats pédagogiques distincts :

- La construction d'un message nouveau à l'aide d'un répertoire et d'une syntaxe connus.
- La création d'un répertoire, d'une syntaxe (et de messages) nouveaux.

On observe dans les deux cas les mêmes processus d'essais et d'erreurs, de réduction, d'extension et d'adaptation des messages ou des codes.

Ce sont les mêmes types de situations qui les suscitent.

Cette réduction peut aboutir à une formalisation, à la création d'un *modèle mathématique explicite.*

Dans le premier cas, les enfants n'échangent pas beaucoup de renseignements sur le langage qu'ils utilisent, que ce soit *la langue ordinaire, les diagrammes* ou une *écriture formalisée.*

Les règles de construction des messages et par conséquent des modèles mathématiques peuvent rester tout à fait implicites. Nous sommes au niveau de l'utilisation familière.

Dans le second cas, il est plus fréquent de voir expliciter des conventions d'écriture.

Jamais, en situation pédagogique, avec des enfants jeunes, je n'ai vu apparaître un message comme une simple sténographie de la langue usuelle ; il y avait toujours une tentative de traduction de la structure mathématique à transmettre. Par contre il me semble qu’il est nécessaire de laisser aussi circuler, le temps venu, des messages oraux: avant ou après le jeu de la communication non verbale prévue dans la situation.

d) *Variantes des situations de communication* (voir fig. page 432).

1° L’élève s’adresse â lui-même un message, soit par exemple parce qu’il a besoin de retenir des éléments intéressants pour les utiliser plus tard, soit par simple désir d’expression.

Nous avons parfois utilisé ce schéma en proposant des *phases actives* suivies de *phases représentatives*.

2° Le maître est l’un des deux interlocuteurs. C’est le schéma enseignant-enseigné. Il n’est pas dans notre propos d’examiner les avantages et les inconvénients de ce système, mais il est peut-être utile d’esquisser ses principales déformations obtenues en négligeant de faire jouer son rôle à l’un des éléments du schéma

— Sanctions en vertu de finalités qui échappent à l’enfant.

— Répertoire imposé, limité par le récepteur (maître).

— Pas de situation concrète vis-à-vis de laquelle l’enfant se sente engagé seul et personnellement.

— Pas de réponse de l’élève : enseignement dogmatique.

— Pas de sanction, sanctions sans relation avec les modèles réellement utilisés par l’enfant, sanction de la formulation seule, etc.

La situation est constituée seulement par des exercices proposés à l’élève (enseignement programmé) ; le pédagogue prévoit chaque séquence : information vers l’élève, question, réponse vers le maître, sanction vers l’élève.

Toutes ces méthodes supposent l’acquisition préalable par l’enfant d’un langage et de schémas logiques car le maître doit utiliser le répertoire connu de l’élève pour transmettre sa pensée et la faire admettre.

Remarque importante

Les relations de l’enfant avec la situation peuvent être faussées par le jeu de motivations incorrectes, même si la situation présente une bonne réalisation de la structure à enseigner.

30 Les deux interlocuteurs sont des élèves, ou mieux des groupes d’élèves. C’est le seul cas dans lequel la dialectique de la formulation peut se développer convenablement, car alors la fonction

sémiotique est à la fois stimulée et contrôlée de façon puissante et naturelle par les relations des enfants à l'intérieur de la classe.
La mathématique s'apprend, dans ce cas, comme un vrai langage, dans le respect des possibilités génétiques des enfants et de la filiation de leurs systèmes d'expressions et de justifications.
Les progrès sont toutefois rapides car les situations incitent les enfants à emprunter, le moment venu, les structures employées par les adultes, sans en permettre une intrusion forcée et prématurée.

e) *Importance de l'emploi des modèles mathématiques.*

Il est clair qu'il n'y a pas vraiment apprentissage des mathématiques sans l'emploi par l'élève de modèles explicites, du langage et de l'écriture mathématiques.
Ce langage et cette écriture ne sont pas utilisés couramment ni employés familièrement dans les relations naturelles établies par l'enfant avec son milieu.
Il n'y a pas de méthode naturelle de l'enseignement des mathématiques. Par contre, si le maître peut multiplier les occasions d'utiliser des modèles mathématiques et se borner à apporter les conventions universelles, il peut organiser le processus de mathématisation.
La précocité et la fréquence d'emploi par l'enfant d'un langage mathématique pertinent et correct sont tout à fait capitales dans ces acquisitions.

5 Dialectique de la validation

a) *Objet:* au cours de la dialectique de la formulation, la construction des messages mathématiques s'accomplit suivant des règles qui sont encore implicites pour les deux interlocuteurs. Il s'agit maintenant d'expliciter ces règles, de préciser les conventions, de dire pourquoi telle écriture mathématique est correcte et pourquoi elle est pertinente. C'est l'objet de la *validation explicite.*
Bien sûr la dialectique de l'action apporte une validation empirique, et implicite, des modèles d'action ou des formulations construites, mais cette validation est insuffisante. La conviction doit se concrétiser en une assertion, une affirmation, qui permettra a la pensée de s'appuyer pour construire de nouvelles assertions **OU** de nouvelles preuves.
Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à émettre **OU** à recevoir des informations en langage mathématique, même en les comprenant.
L'enfant mathématicien doit prendre maintenant vis-à-vis des modèles qu'il a construits une attitude critique.

– Il doit relier ces modèles entre eux.
Il doit pouvoir construire explicitement une structure usuelle à partir d'autres qu'il connaît déjà, en expliciter les théorèmes... ; nous qualifierons cette *validation* de *syntaxique* car elle ne fait appel qu'aux modèles eux-mêmes.

– Il doit par ailleurs expliciter la valeur d'un modèle dans une situation donnée, relever les contradictions ou préciser son domaine de concrétisation. C'est la *validation sémantique.*

b) *Usage d'un message comme modèle*

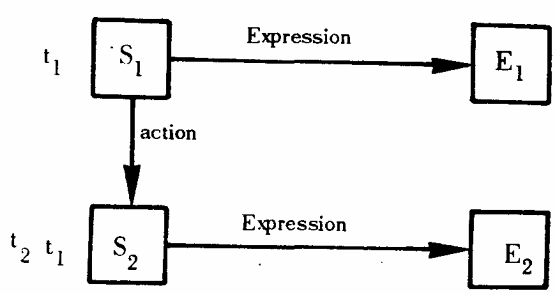
L'enfant ayant en sa possession un message écrit peut établir lui-même les relations de signifiant à signifié avec les éléments de la situation. Il peut substituer l'étude du message à celle de la situation et, grâce à cela, obtenir plus facilement des prévisions utiles. C'est à ce moment qu'il fait du message un modèle.

La figure ci-dessous montre de façon schématique les rôles différents que peut jouer la formulation dans l'action

– En I, le langage ne sert qu'à décrire la situation, à l'exprimer. Le schéma est celui des apprentissages par associations répétées d'une formulation à une action.

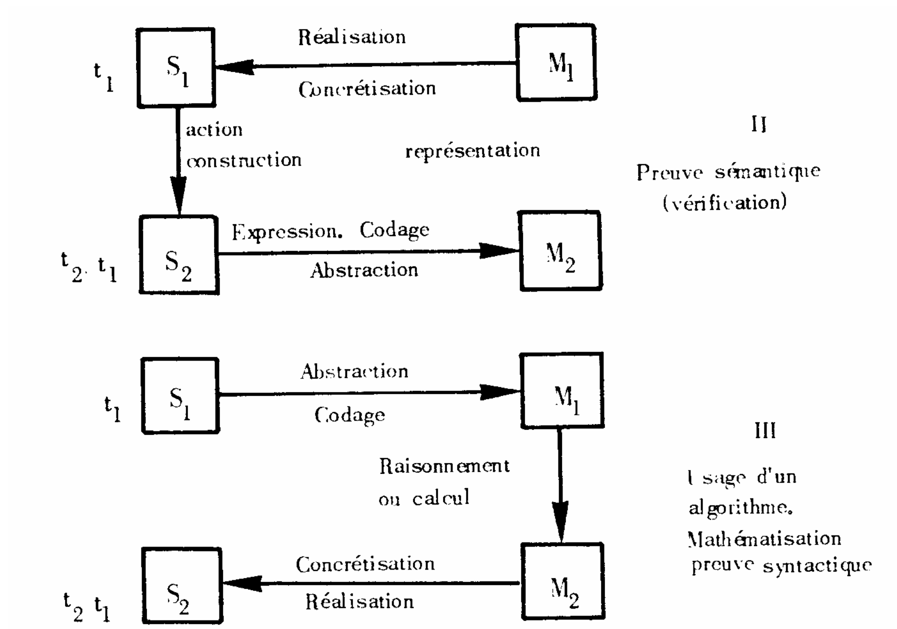
– En II, le langage est le moyen de communiquer au sujet la situation qu'il doit organiser. Il doit réaliser ou concrétiser ce qui est énoncé dans le message, faire une construction effective, puis coder la nouvelle situation obtenue et transmettre ce nouveau message.

Ce schéma est celui de la vérification ; il est employé dans l'apprentissage des assemblages d'assertions par associations répétées avec une construction concrète ; c'est le schéma de la preuve sémantique de ces assemblages. Il est utilisé fréquemment avec l'espoir que des actions M1→ S1→S2 →M2, répétées traduiront par abstraction un passage M1 → M2 plus économique en temps ou en efforts.



I

Action et expression



Rôle de la formulation

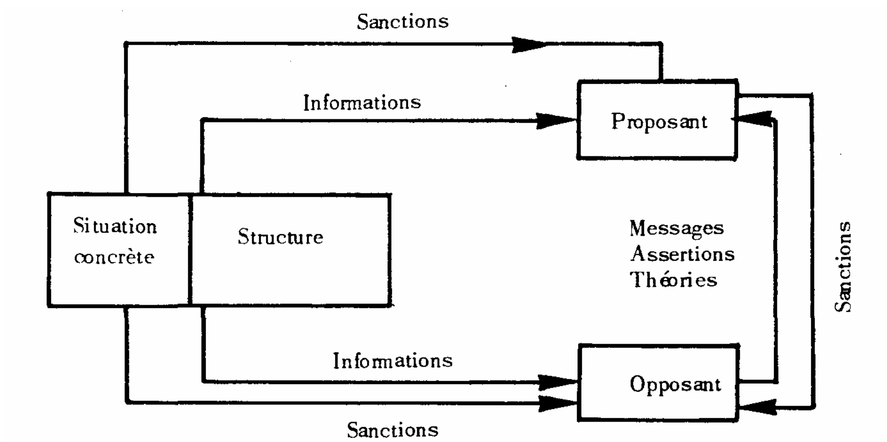
En I, le langage est utilisé comme moyen d'obtenir sur S2 des renseignements qu'il aurait été pénible et impossible de mettre en évidence directement par construction l'enfant code la situation S1 suivant le modèle abstrait M1, y raisonne suivant les règles internes de M1, obtient M2 et concrétise la conclusion en prédisant S2 ou en réalisant l'action ainsi prévue. C'est le schéma des algorithmes ou de la mathématisation. L'enfant qui opère suivant ce schéma, à moins qu'il applique seulement un algorithme, doit connaître de façon explicite la justification du choix du modèle et celle des règles du modèle. Il faut entendre par justification explicite à la fois celle qui se réfère à la conviction profonde et à la convention sociale. Le processus de mathématisation vise un usage convenable de ce schéma, et l'enseignement des mathématiques consistera à organiser les relations de l'enfant dans diverses situations avec le monde qui l'entoure de façon à obtenir la génération et l'emploi suivant ce schéma des modèles mathématiques. L'utilité des modèles et la confiance que leur accorde l'enfant sont des facteurs bien connus favorables à leur connaissance. Nous donnons plusieurs exemples de cette organisation dans (9) et dans les "documents pour la formation des maîtres" et en particulier la définition et l'étude des sommes de cardinaux et des propriétés de l'addition des naturels (1).

(1) Voir plus loin, page 443.

e) Schéma pédagogique de la validation

L'enfant pourra peut-être, à ce moment-là, prendre tout seul conscience de la représentation qui existe entre le message et la situation ainsi que de la valeur prédictive de sa formalisation. Mais il le fera bien mieux et plus facilement dans une situation pédagogique où il devra affirmer ou nier la valeur du message. Ce schéma est comparable au schéma de la communication.

L'enfant est dans la position du *proposant.* La situation dont il s'occupe est un modèle mathématique c'est-à-dire un couple situation "concrète" – structure mathématique. Il doit justifier, défendre sa formulation et donc émettre des



Théories mathématiques ou logiques
Schéma pédagogique de la validation explicite

assertions et non plus des informations, à l'intention d'un *opposant.*

Les sanctions sont organisées de façon telle que chacun ait effectivement intérêt à jouer son rôle : l'adéquation du modèle à la situation satisfera l'un des sujets alors que l'autre sera satisfait dans le cas contraire. Le jeu de la découverte est un exemple un peu formel mais très efficace d'une situation de ce genre. A propos de l'addition des entiers ou des polyèdres, il aboutit à une axiomatisation de la situation.

La dialectique de la validation s'établira souvent à l'occasion de l'organisation de jeux de stratégie opposant des petits groupes dans une compétition toute sportive.

La formulation de la stratégie apparaît à l'intérieur d'une même équipe, si le schéma est conforme au schéma de la formulation, c'est-à-dire si celui qui trouve la stratégie ne peut pas se mettre à la place de celui qui doit l'appliquer.

Dans le jeu de la découverte, l'existence d'une stratégie efficace étant reconnue, celle-ci est proposée (pour un gain supérieur), ou alors elle est devinée par les adversaires si la proposition tarde trop. L'opposant cherche à prouver la fausseté de l'assertion. Une découverte acceptée par tous peut être utilisée pour agir ou pour prouver autre chose.

d) *Dialectique de la validation*

Les règles de l'acceptation d'une proposition par l'opposant peuvent être admises ou connues implicitement par celui-ci, ou alors déclarées explicitement par le proposant. Celui-ci sera amené à expliquer, à justifier une assertion non admise par son interlocuteur, dans un système de référence. C'est souvent celui qui perd qui veut expliquer pourquoi il a perdu.

Au cours des échanges successifs de messages, ces enfants sont amenés, s'ils le peuvent, à expliciter une partie du répertoire logique et mathématique dont ils se servent pour établir leur conviction.

Au cours de ces échanges on peut observer des phases *d'analyse du système de référence:* une assertion refusée est commentée, décomposée en une suite d'assertions plus crédibles. Si les règles de cette décomposition sont des règles mathématiques, le discours est une démonstration.

A d'autres moments on observe une *complexification* ou au contraire une *simplification* du système de référence : exemple : la définition de l'addition ayant permis d'écrire des nombres nouveaux de plusieurs façons, il a fallu indiquer cela par des égalités. Ex au cours du jeu de la découverte (*), les enfants remplissent le tableau de ces égalités jusqu'au moment où il est nécessaire de supprimer celles qui peuvent être déduites de certaines, déjà écrites.

A d'autres moments encore on observe des processus de réduction de chaînes de propositions par l'usage implicite d'abord, puis explicite de théorèmes et de définitions. Ce processus de réduction ressemble à celui qui est en usage au niveau de la formalisation elle-même.

e) *Résultat: théories mathématiques*

Ainsi, au cours de la dialectique de la validation, les enfants élaborent et explicitent une ou des théories mathématiques, axiomatisées de façons différentes suivant leur âge et les situations auxquelles ils ont été affrontés.

(*) Cahier pour l'Enseignement élémentaire des mathématiques de l'I.R.E.M. de Bordeaux n°5.

Il est évident que les situations choisies, comme les relations qui s'établissent entre elles et le petit groupe de jeunes mathématiciens, jouent un rôle très important dans cette élaboration. Car le modèle mental de la déduction logique devra être différencié progressivement de modèles voisins que l'on est loin de bien distinguer dans le vocabulaire courant et qui s'appliquent parfois dans les mêmes situations

— Concordance ou concomitance, association statistique de deux assertions (elles sont vraies "souvent" mais sans plus, dans les mêmes situations).
— Association commune d'idées : elles sont prononcées souvent dans la même situation.
Causalité déterministe : A1 est cause de A2 si A1 précède A2 et si en aucun cas A2 ne se produit sans que A1 ne se soit produit au préalable. Autrement dit, si A2 entraîne A1 (sémantiquement).
— Association de situations par analogie: l'association est féconde mais le raisonnement par analogie est logiquement sans fondement:
Par exemple:

dans l'exemple E1 nous avons fait ou conclu C
dans l'exemple E2 nous avons fait ou conclu C
dans l'exemple E3 nous avons fait ou conclu C

"donc" (!) dans E_{n+1} nous ferons ou conclurons C !

Combien d'apprentissages sont basés sur ce modèle dangereux répété avec, par surcroît, une sanction terrible ; celui qui ne songe pas à conclure C est déclaré non intelligent...
Il est évident que l'enfant peut implicitement, tout comme les adultes, appliquer ses modèles ou ses propositions dans des ensembles de valeurs variées: ensembles à deux valeurs {vrai ou faux} mais aussi à trois valeurs {vrai, faux, on ne sait pas} ou plus {certain, probablement vrai, on ne sait pas, probablement faux, certainement faux}.
Ces ensembles peuvent être utilisés concurremment dans une même situation, en particulier dans les jeux de stratégie où les conjectures se mêlent aux déductions authentiques.
Dans cette création de la pensée mathématique, l'explicitation des systèmes de validation et la recherche de formulations convenables peut faire gagner beaucoup de temps.

f) Variantes du schéma pédagogique. Rôle du maître

L'enfant doit construire lui-même sa conviction. Il n'est pas possible de démontrer quoi que ce soit à un enfant qui ne possède pas la notion pas la notion de déduction. L'usage du répertoire du destinataire est une condition bien connue de la communication.

Dans le schéma de la validation, si le proposant ou l'opposant est le maître lui-même, il est à craindre que la conviction construite chez l'enfant soit de la même sorte qu'une conviction morale, ou esthétique, et ne s'en distingue pas.

Il est important, essentiel, que la pondération psychologique d'une tautologie soit d'une autre nature. Aucune considération autre que mathématique ne doit intervenir dans le jugement de l'enfant. Plus qu'ailleurs, lorsqu'il s'agit de construire la notion de vérité, l'apprentissage ne sert à rien, le maître doit donc absolument s'effacer devant les efforts de l'enfant même s'ils sont maladroits, il doit être exigeant sur la qualité des convictions et des preuves ; cela veut dire non pas qu'il va réfuter tout ce qui n'est pas une bonne preuve, mais qu'il va prendre en considération les tentatives à ce sujet, encourager l'enfant à se poser devant les situations en mathématicien, en constructeur de modèles, puis en logicien, en adulte.

En matière de mathématique, l'erreur est traumatisante et l'apprentissage avilissant s'ils sont perçus dans une relation faussée. En ce domaine, l'usage inconsidéré, par le maître, de ses connaissances techniques a souvent le plus déplorable effet.

Peut-être les mathématiciens ont-ils été des enfants qui ont découvert un jour qu'ils raisonnaient plus vite et mieux que leur maître et qui ont eu confiance en eux-mêmes.

C'est pourquoi le maître doit organiser le processus de mathématisation et la validation par les enfants entre eux ; mais il ne faut pas espérer que la méthode de redécouverte, même dans une petite société où les relations seraient telles que la découverte d'un ou deux serait très vite utilisée par tous, permette aux enfants de reconstruire la mathématique. Le bon langage, la bonne technique, la formulation commode, le modèle intéressant, la théorie utile sont le fruit de multiples recherches et de circonstances de probabilité parfois faible. Il n'est pas nécessaire d'organiser toutes les acquisitions sous la forme d'une construction, certaines démonstrations sont momentanément impossibles. Le maître aide l'enfant à passer sur les difficultés mineures. Il y a même des impossibilités absolues : par exemple, aucun raisonnement portant sur la notion d'infini ne peut être formulé à propos de problèmes concrets. Tout ceci explique la complexité de l'enseignement des mathématiques et du choix qu'il faut y faire.