Henri LEBESGUE, L'ENSEIGNEMENT ET LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

-oOo-

I. INTRODUCTION

Il n'y aurait pas de didactique des mathématiques s'il n'y avait pas de mathématiciens et d'enseignement mathématique. En France, en fin du XIXème siècle, les mathématiques avaient comme chefs de file Henri Poincaré, Emile Picard, avec 10 ans plus tard Hadamard, Elie Cartan, et Darboux, Jordan... A cette brillante génération succéda Emile Borel, René Baire et Henri Lebesgue.

La guerre de 1914-1918 interrompit ce flot de recherches. Après ces terribles années, des jeunes gens, élèves de l'Ecole Norale Supérieure (rue d'Ulm) : André Weil, Henri Cartan, Dieudonné et autres, refusant de se nourrir de la $n^{\text{ième}}$ édition du traité d'Analyse de Goursat, entreprirent de repartir à zéro et "de l'autre côté de la lune" comme ils dirent, formèrent le groupe Bourbaki et entreprirent de rédiger un exposé moderne de la mathématique. Cet ouvrage, paraissant en fascicules, devint le livre de références pour les mathématiciens, bourbakistes ou non, en mettant en évidence les structures.

De la première époque, je n'ai évidemment pas rencontré Poincaré (mort en 1912) mais j'ai été élève de Picard. De Hadamard et Elie Cartan, aperçus seulement, je n'ai connu que les livres. Mais j'ai été élève de Borel et d'Henri Lebesgue dont je devins (après les 6 ans d'enseignement en province obligatoires à l'époque), l'assistante à l'Ecole Normale Supérieure de Sèvres (réservée aux jeunes filles). Et ensuite, après la guerre de 1940-44, la "Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques" (CIEAEM) fondée par Gattegno, dans des réunions informelles et amicales, m'a mise en rapport avec Lichnerowicz, Choquet, le bourbakiste Dieudonné, le non-bourbakiste Gonzeth... et d'autres moins illustres.

.../...

A l'époque, on ne faisait pas de didactique au sens actuel du mot, mais on cultivait des graines qui, en germant, alimentent maintenant le travail des didacticiens.

Ces savants étaient très différents par l'origine, le caractère, la forme d'esprit, les sujets de leurs recherches, leur façon d'enseigner. De tous, celui qui, je crois, apporte le plus aux didacticiens est Henri Lebesgue.

II. Lebesgue - Premières impressions.

On a peu de témoignages directs sur Lebesgue car il n'eut pas d'assistants pour collaborer à son enseignement, de disciples pour rédiger ses cours et, sous sa direction, préparer une thèse. Une seule exception : un jeune mathématicien, Louis Antoine qu'une blessure de guerre rendit aveugle. Lebesgue l'encouragea et devint son efficace Directeur de thèse.

Mais des savants de tout âge assistèrent à ses conférences au Collège de France : "*Riches en souvenirs et en remarques parfois pleines d'humour, les leçons étaient plus que profondément intéressantes : elles étaient souvent, je ne crains pas de le dire, émouvantes. Son inspiration, sa recherche de l'expression exacte nous obligeaient à penser avec lui. On y apprenait non seulement à connaître le sujet, mais aussi à réfléchir et à enseigner. En tout cas, on n'y cherchait jamais la facilité*".

Ainsi s'exprime le Professeur S. Manderbrojt, de l'Institut, dans la préface qu'il a bien voulu écrire pour mon livre "Message d'un mathématicien - Henri Lebesgue", à l'occasion du centenaire de sa naissance (Ed. Blanchard 1974).

J'aurais souhaité qu'un savant commémore l'oeuvre scientifique de celui dont le nom est attaché à l'Intégrale, aux séries trigonométriques, à tout ce qui concerne les variables réelles - ses "Oeuvres scientifiques" autres que les livres sont rassemblées et publiées par l'Enseignement Mathématique, Institut de mathématique de l'Université de Genève. Pour moi, je ne pouvais que rassembler des extraits qui intéressent, comme le disait Lebesgue "*les enseignants qui ont besoin de réfléchir sur la science dont ils enseignent les éléments*".

Il était difficile de faire un choix : si j'ouvre un de ces livres, un des 5 volumes de ses oeuvres diverses : exposés, notes, articles de revues... il m'est difficile de m'arrêter. Les citations sont cependant plus précieuses

.../...

que mes commentaires et souvenirs. Les textes plus spécialement destinés aux enseignants sont surtout réunis dans le 5ème tome, mais il est particulièrement intéressant et révélateur de trouver dans les exposés purement scientifiques des remarques qui coupent le cours des démonstrations et forcent à réfléchir. On lit tout à coup "*Avant d'énoncer les résultats, remarquons que...*" - "*Arrivé à ce point de l'exposition il ne sera pas inutile de s'arrêter un instant sur les cas particuliers qui m'ont entraîné à tous ces développements*".

Nous suivons donc ses réflexions. Mais il est curieux de s'apercevoir, inversement, que ce qu'on croit faire de sa propre initiative se trouve explicitement dans ses oeuvres. ~~Qu'on me permette un petit exemple~~ - J'ai été amenée à examiner avec des futurs maîtres un petit problème de niveau de 4ème : "3 points ABC sont sur un cercle. Les milieux des arcs, BC, CA sont C', A', B'. Montrer que AA' et B'C' sont perpendiculaires". Toute étude commence par la question "de quoi s'agit-il ? De points : centre O du cercle et 6 points nommés dans l'énoncé. Mais si l'on songe que A,B définit 2 arcs dont chacun a un point milieu, nous considérons 10 points. L'énoncé introduit des segments : 9 rayons et 36 cordes. Les angles sont formés de paires de segments (42+41):2=861 paires. Nous devrons certainement comparer des angles deux par deux (861+860):2)=360.230... J'ai intitulé l'exercice "Que choisir" ? (en fait, on voit immédiatement une bonne demi-douzaine de solutions en 2 ou 3 lignes). *

Or que peut-on lire dans l'étude de Lebesgue concernant la formule d'Euler pour les polyèdres F+S-A = 2 liant les nombres de faces, sommets et arêtes ? : "*On cherchera parmi les très nombreuses grandeurs attachées à un polyèdre (nombre de sommets, d'arêtes, de faces, longueur des arêtes, angles des faces, angles dièdres etc) celles qu'on peut regarder comme privilégiées parce qu'elle déterminent les autres*" (et j'ajoute pour les exercices scolaires" et conduisent au résultat demandé)

On voit que le niveau de la question mathématique n'est pas ici ce qui importe.

III. L'attitude de Lebesgue devant les mathématiques

Lebesgue n'a pas choisi de faire carrière dans la recherche ou l'enseignement des mathématiques. Dès son plus jeune âge, il a "*fait des mathématiques comme les ânes de Brecieux portent les légumes au marché de Beauvais*" (à comparer au légendaire "comme le pommier fait des pommes).

* voir note manuscrite p. 16

A l'Ecole Primaire, l'énoncé d'un problème posé le choque - comme l'instituteur doit s'absenter, l'enfant monte sur l'estrade, lit la solution dans le cahier du maître et voit l'erreur - Le maître était digne de sa tâche. Il admira et, grâce à lui, l'enfant obtint la bourse qui lui permit de poursuivre ses études.

A Normale Supérieure, un cours porte sur les surfaces développables, leurs génératrices, l'arête de rebroussement. Le jeune homme s'insurge, "il y a des boîtes !" et, sa pensée s'étant précisée, il montre à ses camarades son mouchoir froissé dans son poing.

Dans une note à l'Académie des Sciences, devant Hermite qui prétend les avoir en horreur, il s'explique sur les courbes sans tangentes "*en pliant une feuille de papier* (suivant une loi répétitive qu'il a indiquée), *avec une précision qui n'est limitée que par la possibilité d'effectuer le pliage, on peut réaliser les courbes en question*" (quelle ironie pour ce jeune homme de 27 ans devant la noble assemblée !)

A Merlemont, village de l'Oise, dans l'école désaffectée depuis la mort de sa soeur institutrice, où il va installer sa mère, il construit un mur de briques. Une idée le frappe "dans la masse certains points sont communs à au moins 4 briques, comme sur le sol carrelé, il y a des points communs à au moins 3 plaques". Tel est, d'après ce qu'il m'a conté un jour, l'origine de sa théorie de la dimension.

Nous comprenons la source de sa démarche de créateur : Lebesgue part de constatations que l'on peut qualifier de concrètes ; il découvre leur signification profonde, les développe, les généralise et en fait naître des théories nouvelles. C'est le génie qui précise le problème avant la démonstration.

Peut-être à cause de la maladie qui s'annonce très tôt, il assure : "*alors qu'on se sent plus armé par ses connaissances, plus apte à tout comprendre, à tout embrasser, on se sent incapable de créer*".

Lebesgue s'inspire alors davantage des travaux des savants anciens ou contemporains qu'il explique, critique et prolonge. Il médite sur la science mathématique, son évlution dans son histoire et son enseignement à cette époque où les fondements même sont remis en question - Dans les "Entretiens de Zurich" (1938) il s'exprime ainsi : "*La philosophie des mathématiques ne peut être créée que par des mathématiciens (...). C'est une philosophie utilitaire, très humble (...) qui ne vise nullement à se hausser jusqu'à "ces inquiétudes que nous cultivons sous le nom de philosophie*

.../...

comme disait mon Maître Jules Tannery (...) je voudrais simplement que l'on ose formuler explicitement les examens critiques qui nous furent utiles, et, pour cela, que nous prenions l'habitude de les faire plus complètement, plus systématiquement".

Lebesgue, effectivement, se soumet à cette règle : "*montrer comment se construisent les mathématiques c'est bien étudier les fondements mais à un point de vue qui nous ferait largement sortir du domaine de la logique (...). A aucune époque les mathématiciens n'ont été entièrement d'accord sur l'ensemble de leur science que l'on dit celle des vérités évidentes, absolues, indiscutables et définitives (...) Il faudrait que les études sur les fondements et sur les méthodes des mathématiques fassent une large part à la psychologie, voire même à l'esthétique*".

Telle est, après sa vie de créateur la réponse faite aux philosophes par les mathématiciens qui se penchent de plus en plus sur les apprentis chercheurs et enseignants.

IV. La transmission du savoir mathématique

Ce fut une proéccupation constante du Maître qui a au plus haut point les vertus de sincérité, honnêteté, humilité combinée avec la conscience de sa valeur, l'absence totale d'égoïsme, le désir d'aider tout particulièrement les faibles, avec patience et bonté, ce qui lui donne le droit à la parole et à la critique.

Quel contraste avec la notice présentée à l'Académie en 1946 par son successeur Denjoy ! J'abrège les longs éloges tels que : "*Sur les terres neuves de l'analyse mathématique, les expéditions conquérantes marquaient le pas - Lebesgue fut le thaumaturge dénouant les liens où tant de compagnons d'avant-guerre étaient comme par un enchantement retenus*". Ces savants "*sont arrivés au pied d'une sombre muraille de rochers, haute au point de leur masquer un ciel aux abords du zénith... etc* et alors, Zorro est arrivé ?... oui mais Denjoy continue : "*Lebesgue, bien à tort, se montra confus des dieux qu'il avait destitués, des statues qu'il avait renversées de leur socle. Il se penchait avec pitié sur les uns, avec déférence sur les débris des autres. Passé le triomphe gagné par ses victoires, il aurait voulu faire chorus à l'anathème dont les vaincus le réprouvaient. C'est affaiblir une oeuvre que lui imprimer une date et la condamner au prompt*

.../...

vieillissement, que de vouloir édulcorer les témérités où elle trouve ses titres par le soin de justifications premières peu d'hommages, d'apaisements offerts aux idées qu'elle renverse (...). L'auteur, animé de la certitude que l'avenir adoptera les vérités nouvelles qu'il apporte (...) feindra d'ignorer les idées autour de lui amoureusement cultivées, âprement défendues et qu'il voue au néant. Il présentera son oeuvre comme doit l'être, au-delà d'une époque oubliée, l'amorce d'un futur, du moins conjectural. Ainsi assurera-t-il une chance de parler quelques temps à la postérité le langage dont elle usera elle-même. Il reculera d'autant pour son ouvrage le terme de l'inéluctable ruine !".

C'est un négatif parfait de la vérité de Lebesgue. Du reste, celui-ci ne se faisait aucune illusion sur celui qui devait lui succéder à l'Académie. En un des derniers jours de sa vie, alors que Madame Lebesgue lui dit que Denjoy avait téléphoné, il murmura "*oui, il téléphone pour savoir si la place sera bientôt libre*". Mais revenons bien vite à la forme utilisée par Lebesgue dans ses exposés.

b) Un exemple. Examinons le début d'une conférence d'analyse datée de 1907.

Le sujet est simple, bien compréhensible : une fonction est définie dans un domaine D. A quelles conditions les valeurs prises sont, en tous points de D déterminées par les valeurs de la fonciton sur la frontière du domaine ? Tel est le problème de Dirichlet.

(Rappelons ce que fut ce savant : Gustave Pierre Lejeune-Dirichlet, malgré son nom bien français, était né en Prusse, en 1805, dans cette Allemagne où, en mathématique, régnait Gauss (1777-1853) dont il sera le successeur à Göttingen - Il vient à Paris en 1922 où l'école française triomphe avec Laplace, Legendre, Poisson... Il suit au Collège de France les cours de Fourier, se lie avec Jacobi. Dirichlet s'occupe de théorie des nombres puis d'analyse. De retour à Berlin, il prolonge les travaux de Fourier et publie avec Dedekind sa solution de ce qui, dans l'histoire, se nomme le Problème de Dirchlet, dans un célèbre mémoire où est définie la notion générale de fonction au sens actuel (1850).

Or le dernier chapitre du livre de Bourbaki "Eléments d'histoire des mathématiques" commence par le travail de Dirichlet et conduit à l'oeuvre de Lebesgue. Ecoutons donc celui-ci étudiant Dirichlet. La question précise est, comme il est dit plus haut "*dans quelles conditions une fonction*

.../...

est déterminée à l'intérieur d'un domaine par les valeurs qu'elle prend sur les frontières de ce domaine. Lebesgue définit une "fonction harmonique" dans un domaine, et, à l'aide de cette notion, il énonce une forme du théorème de Dirichlet et en indique une solution. Elle suppose qu'une certaine fonction, qui a un minimum, atteint ce minimum. Puis vient la discussion. Citons Lebesgue "*ce mode de raisonnement qui remonte à Gauss doit surtout sa célébrité à l'application qu'en fait Riemann (...) Weierstrass en a montré l'insuffisance : l'assimilation inconsciente de $\mathfrak{J}(u)$ à une fonction continue n'est nullement légitime. En effet (...). Or il n'est pas vrai en général qu'une suite de fonctions bornées ait une limite*" d'où la nécessité de tenir compte de (...) "*les deux travaux que M. Hilbert a publiés sur ce sujet sont assez différents, sans doute parce que tandis que le premier semble destiné à mettre rapidement en lumière toute la portée des procédés, ce qui ne peut guère se faire qu'au dépend de la précision, le second semble destiné à préciser la méthode à l'occasion du théorème...*"

Après cette introduction, Lebesgue indique d'autres solutions, mais il s'interrompt : "*Je dois m'excuser de la longueur de ce mémoire. Il est surtout allongé par le chapitre suivant dans lequel je définis les domaines et démontre quelques théorèmes qui les concernent (...) j'aurais pu me dispenser de les démontrer. Cependant il m'a paru indispensable, avant de raisonner sur ces domaines très généraux de bien préciser, et par des définitions, et par des exercices, ce que sont ces domaines. On donne couramment au mot "domaine" deux sens différents suivant qu'on définit les domaines par les propriétés de leurs points ou par les propriétés des frontières des domaines*".

Ensuite Lebesgue complète l'étude et termine par des remarques sur des cas particuliers où "*les domaines sont assez simples pour que le problème de Dirichlet se résolve facilement*".

L'étude semble achevée, mais peut-il en être ainsi en mathématiques ! Dix notes à l'Académie se succèdent de 1903 à 1921. Mais entre temps, il y a eu la guerre ! et cela explique cette dernière note que je cite, non pas tant pour clore nos remarques sur le sujet mathématique que pour ce qu'elle nous révèle du caractère de Lebesgue. Il vient de présenter à l'Académie une note d'un savant américain, M. Wiener, sur le problème de Dirichlet et y ajoute des "observations : (1924).

"*M. Wiener parle longuement de ma publication (de 1913). Ce qu'il ne dit pas et que je tiens à dire, c'est que dans ces derniers mois, le problème*

.../...

de Dirichlet ait été, à mon insu, l'objet de recherches fécondes dues à divers savants américains dont M. Wiener. Leurs théorèmes dépassent souvent les miens et ils ont si bien abordé diverses questions que, si j'avais connu leurs travaux, j'aurais sans doute jugé inutile de revenir sur mes résultats de 1913 (...). Les travaux des savants américains avaient aussi échappé à M. Bouligand. Il convient d'ajouter que, par contre l'importante note publiée par M. Bouligand en 1919 semble être restée inconnue des Américains. Maintenant que ces efforts parallèles ne s'ignorent plus, on peut espérer qu'ils seront plus fructueux encore".

Ne pas oublier les guerres dans l'histoire des sciences !

c) Faut-il énumérer les sujets d'étude que le didacticien trouve dans ce qui précède ? Citons par exemple :

- comment évolue un énoncé au cours de l'étude ?
- valorisation d'une méthode par ses applications
- l'inconscient - On peut peut-être en rapprocher "l'intuition" et l'affirmation de Lebesgue : "*les hommes ont conquis à la fois leur sujet d'étude et le mode de raisonnement approprié à cette étude*" (Entretiens de Zurich).
- Un ensemble borné d'une infinité d'éléments a-t-il une limite ?
- Examiner les deux buts possibles d'un exposé : mettre en valeur une méthode au dépend de la précision - ou bien la préciser par une application bien choisie ? - Relation avec "l'effet d'éblouissement obtenu par Picard, à Sèvres d'après Lebesgue.
- Sens et définitions du mot "domaine"

....

Mais surtout la forme de l'exposé est remarquable, le style, la stratégie du savant qui veut convaincre ou plutôt conduire l'auditeur, ou le lecteur à étudier la question par lui-même et à se remettre en question, sans honte puisque les plus grands savants n'ont pas fait une oeuvre parfaite et définitive. C'est ainsi qu'après une note sur l'Analysis Situs (1924), il écrit simplement : "*M. Frechet vient de me faire observer que ma démonstration est insuffisante ; par une singulière étourderie, j'ai admis en effet presque entièrement la propriété à démontrer à un moment de mon raisonnement. Pourtant, il suffit d'ajouter quelques lignes pour le compléter. Mais comme il résulte de ma correspondance avec M. Frechet que tout ce paragraphe n'est pas clair, je vais le reprendre entièrement*"...

.../...

d) D'autres sujets.

On voudrait citer tant de réflexions que nous ne pouvons qu'en choisir quelques unes.

1. A propos de la formule d'Euler déjé évoquée, il faudrait une étude analogue à celle qui a été prise en exemple. Extrayons seulement quelques phrases : "*il est fréquent qu'un énoncé soit deviné avant d'être démontré. Ce n'est pas la démonstration qui conduit au théorème*" c'est alors l'intuition.

Pourtant le cas contraire est parfois vrai : "*Je voudrais dire quelques mots en faveur de la vieille démonstration de Legendre à laquelle on reproche volontiers d'être artificielle (...). Il me paraît difficile de qualifier d'artificielle une démonstration qui conduit si immédiatement au résultat et qui avait été construite avant que le théorème n'ait été formulé (...).*

Il faudrait savoir comment Legendre a été conduit à cette démonstration. En tout cas "*toute démonstration paraît naturelle quand la suite des idées qui y a conduit a été bien comprise et clairement exprimée. Dire qu'une démonstration est artificielle, c'est critiquer seulement son exposition*".

Il faudrait nuancer cette réprobation : Lebesgue lui-même, à propos d'une leçon d'agrégation sur l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, montrait combien était artificielle la démonstration élémentaire enseignée où l'on "*mettait les mathématiques en pilules*" mais que c'était nécessaire car la voie directe était trop abrupte pour les élèves.

- A propos des surfaces applicables non développables.

Remarquons seulement ce qui concerne l'exposition. Nous avons déjà noté le point de départ, la remarque qui jaillit "*mais il y a des boîtes*" qui s'affine avec le geste de montrer le mouchoir chiffoné à ses camarades d'Ecole Normale (1894). En 1989, dans une note à l'Académie, il s'explique "*Pour la validité des raisonnements employés dans la théorie des surfaces, il est nécessaire que les fonctions considérées (satisfassent à certaines conditions). Par suite, il y a lieu de se demander s'il n'est pas nécessaire pour arriver à l'énoncé littéralement exact, de renoncer à la généralité.*

Partant de cette idée, je me suis proposé de rechercher s'il existe des surfaces applicables sur un plan autre que les surfaces développables".

.../...

Mais dans la Notice sur ses travaux écrite en 1922, il revient à la vérité psychologique "*Eh quoi, un mouchoir de poche, un journal chiffoné sont des surfaces ayant des génératrices rectilignes !*". Dans cette même notice, il dévoile l'origine de la question :

"*Dans certains livres de géométrie élémentaire on apprend aux enfants comment il faut plier une feuille de carton pour construire divers polyèdres réguliers. C'est à ces livres que j'ai immédiatement pensé lorsqu'on m'a démontré pour la première fois que les surfaces applicables sur le plan sont toutes des surfaces développables. Le désaccord apparu entre cet énoncé et l'existence même de l'art du cartonnier s'explique de suite : un polyèdre est une surface non analytique et possède des lignes singulières. Pour prévoir l'existence de telles surfaces, il suffisait de remarquer combien la forme des surfaces physiquement applicables sur le plan diffère des surfaces développables !*"

De l'erreur. Tous les mathématiciens connaissent l'erreur. Les reconnaître assure le progrès, précise la question, et souvent indique la voie vers la découverte. Un jour, Lebesgue conseilla même aux agrégatives de glisser à l'oral une erreur dans leur exposé : la corriger prouvera la profondeur de leur compréhension ! C'est du reste un moyen pédagogique pour le professeur : j'ai entendu Laurent Schwartz, après avoir écrit au tableau une formule démontrée, dit "de même" et en écrit une seconde presque semblable. Puis il ajoute "oui, mais cette seconde formule est fausse !!!" Les étudiants ne l'oublieront pas.

Découvrir un domaine inconnu ne peut se faire sans des faux pas ! Lebesgue ne les évite pas toujours. Il s'en excuse mais n'en a pas honte. L'un d'eux est célèbre sous le nom de "Les épines de Lebesgue". *Avoir des épines comme la ronce ne nous paraît pas très flatteur, mais la rose aussi a des épines. Que je puisse me comparer à la rose, je le dois à celui qui a douté de mon affirmation. Je lui dis un grand MERCI !*"

e) Le sens des mots - Définitions. Etudions une question de nature plus philosophique d'après les articles inédits (1905) réunis sous le titre "A propos de quelques travaux mathématiques récents" publiés dans : "l'Enseignement Mathématique" en 1971 par M. Gustave Choquet. L'ouvrage (48 pages) est un résumé de 23 chapitres que Lebesgue comptait sans doute développer. Voici quelques courts extraits à méditer :

"*Le sens des mots qui composent la langue mathématique se modifie constamment, comme cela arrive pour toutes les langues vivantes. L'exemple le plus frappant, peut-être, de ces modifications est celui du mot NOMBRE* *qui a maintenant acquis un sens assez large pour qu'il soit nécessaire de distinguer les nombres entiers ou fractionnaires, les nombres rationnels et les nombres irrationnels, les nombres positifs et les nombres négatifs, les nombres réels et les nombres imaginaires et complexes, les nombres finis et les nombres transfinis, etc... A chacune de ces catégories correspond une catégorie de fonctions. C'est dire que le mot fonction qui a servi autrefois à désigner les puissances de la variable, acquit lui aussi un sens extrêmement large.*

La définition générale des fonctions est si vague que non seulement elle ne suffirait pas à donner l'idée de fonction à qui ne l'aurait pas, mais encore qu'elle ne fournit pas de réponse précise à cette question : comment peut-on nommer une fonction ? (...) En présence de ces difficultés on peut prendre bien des attitudes". Les plus nettement dessinées sont celles de I, l'idéaliste et E, l'empiriste.
Il y a bien des manières d'être I ou E. Tous deux se reconnaissent le droit de raisonner sur (telle) fonction qu'il ne reconnaît que par la place qu'elle occupe dans la bibliothèque de Rennes (...) mais E est bien sûr que telle, étant écrite dans un livre est déterminable logiquement et I raisonnerait volontiers sur le fonction en question si le livre qui la contient était l'oeuvre de quelque divinité ayant l'éternité à sa disposition pour écrire sur les pages du livre supposées en nombre infini, les valeurs de f(1), f(2)... de la fonction".

L'étude est développée dans le chapitre 21. Lebesgue précise les conditions nécessaires pour certaines théories. Une note de Choquet ajoute *"les distributions de L. Schwartz ont justement été créées pour répondre à ce besoin (...) Il est remarquable que Lebesgue ait si bien senti le besoin de cet outil et ait su l'exprimer clairement"*. De nombreuses études prolongent les problèmes posés sur les fonctions et nombres définissables.

V. Pour les mathématiques élémentaires approfondies

Nous voudrions examiner ici bien d'autres sujets tels que :
- Sur le théorème de Weierstrass (1898) *"guidé par le désir de toujours voir simplement les choses simples"*
- A propos des courbes épicycloïdales (1915)

"Je me suis aperçu que les élèves de 3ème année de l'Ecole

Normale Supérieure ignorent tout à fait les propriétés géométriques des épicycloïdes. Ils s'étonnaient de les voir apparaître (dans des questions diverses) mais ce n'était pour eux que bizarreries curieuses (...)" et Lebesgue expose *"ce qui m'a paru le plus utile à de futurs professeurs d'élémentaire et de spéciale" ... (et nous retrouvons de vieux amis : l'éllipse et ses bandes de papier, les roulettes de Pascal et la cycloïde, la droite de Simson enveloppée par son hypocycloïde à 3 rebroussements... en situation*

- Sur les n-sectrices d'un triangle, bien plus riches que les bissectrices !
- Sur les polyèdres : cinq notes de 1924 à 1939, sans compter les curieux octaèdres articulés de Bricard.
- Sur les angles polyèdres (Enseignement des sciences 1916). Etude qui nous intéresse particulièrement car il s'agit de corriger l'erreur d'un collègue ("il s'est trompé hier ; sera-ce mon tour demain ?"). Deux articles pour convaincre, élucider une question qui a l'air simple (quelques droites et plans. Etude de la somme des faces d'un angle polyèdre) mais il faut étudier la convexité dans l'espace et *"quoiqu'on en ait dit, notre espace n'a presque que deux dimensions (...). Seuls quelques travailleurs manuels ont, des choses de l'espace, une véritable intuition où les sens ont leur part" ... "les relations de situation entre demi-droites issues d'un point et plans passent par S ne sont pas si faciles à suivre !"*

Les 14 pages de texte montrent ce qu'est élucider une situation quand le calcul algébrique ne remplace pas le raisonnement.

Pour l'enseignant *"il ne dépend pas du professeur qu'un sujet soit ou non lié à des questions délicates ; on n'arrive à une exposition simple qu'en éludant les difficultés et non en les résolvant"*, que faudrait-il conserver de tout cela dans l'enseignement du second degré ? *On ne compte pas, je pense sur $a + b + c... < 2dr$ pour former le jugement et le coeur ni pour faire surgir une vocation mathématique ?*

- Sur l'histoire des mathématiques, des notions et des nombreuses remarques, citons seulement deux phrases : *"ce qui intéresse le mathématicien, c'est l'histoire de l'acquisition d'un fait mathématique" - "ce que le mathématicien a en vue dans l'étude du passé, c'est l'avenir".*

Mais cessons de récolter des thèmes de recherches dans les 5 volumes des "oeuvres" et les livres sur l'intégration, les séries trigonométriques, et surtout les mesures de grandeurs, les coniques, les constructions géométriques. Je me permets de renvoyer le lecteur, à défaut des textes originaux, à mon livre "Message d'un mathématicien" (1974) où j'ai tenté de rassembler ce qui intéresse plus particulièrement les enseignants.

.../...

VI. Sur les programmes et la formation des maîtres

Nous n'allons pas chercher dans les oeuvres de Lebesgue tout ce qui concerne les buts et moyens de l'enseignement secondaire, toutes les phrases contenant les mots "*définition, dénomination, désignation, détermination, symbolisation,..., intuition, démonstration, explication, compréhension, expression,..., mémorisation, application, diffusion, vulgarisation,...* sans oublier les termes et signes spécifiques de mathématiques élémentaires et leur *évolution, extension, généralisation...!*

Il faut peut être cependant faire allusion aux buts de cet enseignement en citant quelques remarques :

· *"Après telle démonstration, les élèves n'auront rien à objecter, mais ils ne seront pas pour cela parvenus à cette conviction intime qui exigerait que l'on ait compris assez pour que les vérités nouvelles se raccordent, s'enchaînent et de plusieurs façons, avec celles qui sont déjà familières (...). On leur a fait comprendre, on leur a prouvé, s'ils étaient sceptiques les voici confondus, mais sont-ils persuadés ?"*

· *"Si l'on réfléchit plusieurs fois à une même question (...), chaque fois on finit par comprendre et chaque fois d'une façon différente. Puisqu'il n'y a pas une meilleure manière de comprendre, il ne saurait y avoir une meilleur manière d'enseigner !"*

· *"Faire comprendre un résultat, c'est essentiellement l'intégrer dans un tout cohérent dont certaines parties sont déjà familières".*

· *"Si nous renoncions à exposer les mathématiques comme une science morte, si nous parlions des questions ouvertes...".* (mais à chaque niveau, spécialement au niveau élémentaire, quelles questions ne sont pas "ouvertes" pour les élèves ?).

Et il faudrait tenir compte de la mentalité de chacun : tous ne se sentent pas comme Lebesgue "*de ceux qui ont besoin à chaque instant de se rendre compte du point de tricot qui le fait arriver jusqu'à la fin*" (mon expérience me conduit à penser que ce besoin est plus fréquent chez un auditoire féminin. Vertu, certes, pour Lebesgue, ce peut être aussi un handicap qui freine la marche en avant).

Mais bornons-nous à la discussion des programmes.

.../...

Sur les programmes d'arithmétique et d'algèbre

Voici le premier texte dont nous disposons sur ce sujet. C'est un extrait d'une lettre datée de 1910. Professeur à l'Université de Poitiers, il fait passer les examens du baccalauréat et le concours d'admission à Saint-Cyr.

"Je suis d'avis de réduire l'arithmétique à la numération et à l'étude des 5 opérations : addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines. J'accepte à la grande rigueur et comme une sorte d'exercice d'application les P.P.C.M, P.G.C.D. Mais c'est tout (...). On arriverait peut-être à faire cesser le scandale d'élèves parlant couramment de la racine $n^{ème}$ d'un polynome mais ne sachant pas ce qu'est $\sqrt{10}$".

"Si, au moment de l'étude des exposants fractionnaires, on fait remarquer aux élèves la facilité des multiplications entre nombres de la forme 10", la théorie des logarithmes est, pour ainsi dire, faite. J'ai demandé un très grand nombre de fois qu'on me calcule du logarithme de 2 ou 5 à un dixième près et je n'ai obtenu qu'une bonne réponse". Et Lebesgue fait allusion aux intouchables programmes de spéciales et d'agrégation mais *"ce serait un singulier argument en faveur de l'inscription d'une matière au programme du baccalauréat que d'en déclarer la connaissance indispensable à un agrégé !*

Plus tard, 1928-1930, la question est posée de la dualité des agrégations masculine et féminine. La première note souligne à la fois les défauts du concours masculin de l'époque et les qualités spécifiques des femmes qui, du reste, *"n'auront qu'exceptionnellement à faire leur enseignement dans les classes de spéciales".* Bref, qu'on crée pour elles une agrégation de mathématiques élémentaires approfondies.

Les protestations soulevées par cette discrimination le conduisent à préciser et nuancer sa propositon dans deux notes, la seconde ayant le titre "sur la formation des professeurs de mathématiques élémentaires" où la question du sexe intervient, plus explicitement du moins. L'agrégation de mathématiques élémentaires approfondies, par contraste avec l'agrégation traditionnelle, préparerait vraiment le maître à son enseignement :

L'agrégé de mathématique (actuel) sait-il toujours, sur les triangles semblables, autre chose que les 6 ou 7 théorèmes qu'il enseigne ? (...) Et pourtant la notion de similitude est des plus importantes (...). Voir clairement tout ce qui est sous la dépendance de cette existence, et sans sortir du programme élémentaire, on peut rendre vivantes et, en quelque sorte, actuelles les considérations figées et refroidies de la géométrie. C'est aussi se prémunir contre les erreurs si faciles à commettre : ce

.../...

serait presque une originalité de ne rien dire d'inexact à l'occasion de l'homogénéité dans les formules de géométrie !"

"En somme, je voudrais que les programmes de l'agrégation obligent les futurs agrégés de mathématiques élémentaires à étudier les mathématiques élémentaires, et donc des matières nouvelles à extraire, les unes de ce qu'on appelle la géométrie pure, d'autres de la géométrie supérieure ou de la théorie des nombres ou de l'algèbre supérieure et aussi des parties de l'analyse qui n'appartiennent pas au programme de licence, toutes devant être étudiées comme prolongement des mathématiques élémentaires".

Mais il faudrait des maîtres pour assurer un tel enseignement, et des livres. Lebesgue ne peut citer que la "géométrie" d'Hadamard "chef d'oeuvre inégalé" les cours où Félix Klein étudie "les Questions élémentaires d'un point de vue élevé" et en italien, les volumes publiés sous la direction de M. Enriques : Questiono reguardanti le matematiche élémentari.
Et Lebesgue ajoute *"bien que mon article ne soit, pourrait-on dire, que l'esquisse d'un avant-projet"* pour ne pas surcharger les candidats, il propose qu'un des Certificats de Licence soit, en option, un Certificat de Mathématique Elémentaire Approfondie.

Pour terminer, ce qui concerne l'enseignement comme l'histoire, Lebesgue exige de ceux qui s'y consacrent, des vertus nécessaires "patience et persévérence, l'exactitude minutieuse, l'aptitude à s'assimiler toute pensée, la compréhension humaine", qu'il attribue spécialement aux femmes, ce dont nous pouvons être fières !

Mais fermons les livres. Il nous faut conclure. Il y a presque un siècle que Lebesgue transmit son premier message. Depuis, la société évolue à une vitesse prodigieuse. La science s'est renouvelée. Les fondements mêmes des mathématiques ont été une fois encore remis en question, avec la lumière unificatrice des structures. Il s'ensuivit, après la diffusion bourbakiste, une brillante période de libre combat contre la sclérose des exposés traditionnels. Mais apparut un nouveau dogmatisme officiel, avec un vocabulaire pédant, que les médias ont baptisé "Math-Moderne". Il était alors devenu inévitable qu'une réaction intervienne, malheureusement, elle a, comme disent les Anglais "jeté le bébé avec l'eau du bain".

Certainement, un équilibre sera trouvé. J'espère que ce sera le fruit du travail de recherche des didacticiens. Ils seront alors fidèles aux voeux d'Henri Lebesgue.

Lucienne Félix
automne 1990

NOTE - page 3.

Ainsi, dans un petit problème du niveau de 4e, l'énoncé permet d'introduire tant d'éléments (segments, angles, couples d'élém, que j'ai intitulé l'exercice « Que choisir ?