Anex 02

L'UNITÉ DES MATHEMATIQUES

par LUCIENNE FELIX, Paris

(International Revue of Education Vol VII/1961/)

Si le maître veut enseigner par une méthode vivante, méthode qui part de l'activité libre de l'enfant, il lui faut une compréhension profonde de la nature de ce qu'il enseigne, du but à atteindre et des justifications de son enseignement. Un maître qui ne sait à peu près rien des mathématiques peut suivre un manuel, faire apprendre quelques énoncés et faire exécuter quelques calculs. Mais s'il confie un matériel à l'enfant, s'il l' observe dans ses tentatives et écoute ce qu'il dit pendant qu'il agit comment reconnaîtra-t-il le moment où l'enfant fait oeuvre de mathématicien, le moment où il a besoin d'être aidé, la manière de répondre à ses questions maladroites s'il ne comprend pas mieux que l'enfant? Comment modifiera-t-il les phrases du manuel pour les adapter à la situation présente et les rendre compréhensibles?

Voici un exemple qui m'a été fourni par une dame qui laissait un jeune enfant jouer avec les nombres (ceci ce passait dans une petite école en Amérique). L'enfant était passionné de carrés magiques, c'est à dire de tableaux carrés de nombres qui donnent la même somme sur les côtés et sur les diagonales, comme celui que nous indiquons. D'autre part, cet enfant aimait changer la base de la numération (par exemple écrire en base cinq au lieu d'écrire en base dix). L'enfant, tout surpris, s'aperçut que ses carrés magiques écrits en base dix restaient magiques en base cinq. Il demandait "pourquoi? Est-ce vrai pour d'autres nombres que ceux que j'ai pris ?" Mais la maîtresse était tout aussi surprise que l'enfant; elle ne pouvait rien assurer, encore moins démontrer.

Le fait que la maîtresse était moins mathématicienne que l'enfant privait celui-ci du bénéfice de son travail; il ne peut comprendre ce que le matériel lui indiquait.

Nous savons bien qu'il faut maintenant enseigner les mathématiques à tous les enfants. Autrefois, l'enseignement primaire destiné, au plus grand nombre avait pour objet l'apprentissage de la lecture, de l'écriture, du calcul et aussi de quelques formes géométriques simples. Actuellement nous espérons que tous nos enfants arriveront à un niveau nettement supérieur exigé par notre vie en société, car les mathématiques sont partout dans la civilisation actuelle. Mais par là même, l'enfant est préparé à recevoir cet enseignement- ne connaît-il pas l'essentiel du code de la route et de ses symboles (feu rouge, sens interdit etc.), n'est-il pas initié à l'emploi de mécanismes, à des règles de jeux?

Parallèlement, les mathématiques elles-mêmes ont profondément changé d'aspect. Après avoir été une technique utilitaire, recueil de recettes numériques, puis un jeu de philosophes, de métaphysiciens, de logiciens, la science mathématique a pris une telle ampleur qu'elle a dû

être entièrement repensée. Examinant ses propres fondations, elle s'est retrouvée au point de départ: celui même de l'enfant; et il n'est pas étonnant que les premières structures que l'on enseigne à l'université soient celles même que le matériel enseigne dans les jardins d'enfants. Mais entre les deux il y a malheureusement la déformation d'une période scolaire où l'on récite des manuels parce que c'est la tradition.
Le titre choisi: *l'Unité des Mathématiques* se justifie à la fois dans la science et dans son enseignement. Pour le mathématicien moderne en effet, il n'y a plus des sciences distinctes: arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie etc; il y a maintenant une pensée mathématique qui met en évidence ce que nous nommons des *structures,* et nous retrouvons les mêmes structures fondamentales non seulement dans les mathématiques, mais aussi dans de nombreuses situations qui prennent des aspects mathématiques, Ce qui m'a enchanté dans les salles où le beau matériel Montessori est exposé, c'est précisément d'y voir en évidence toutes les structures qui doivent faire l'objet de notre enseignement pendant une dizaine d'années scolaires et même davantage.
Comme l'a mis en évidence un grand précurseur, l'anglais *Boole,* les structures mathématiques fondamentales ne sont autres que les structures mentales, celles de la pensée logique. Les structures qui apparaissent dans les constructions matérielles font apparaître ces constructions comme des *modèles* où les structures sont réalisées.
A ce point de vue un matériel est d'autant plus fécond qu'il peut faire apparaître des structures diverses, c'est à dire qu'il est multivalent. Ceci, du reste, n'exclut pas un matériel spécialisé conçu pour forcer l'enfant à faire un certain travail d'une façon déterminée et imposer une technique.

Voyons par exemple ce que nous pouvons faire avec quelques tiges.
je les mets bout à bout: ceci met en évidence la sommede longueurs, et aussi la somme de volumes. Mais sur la seconde figure nous voyons seulement la somme des volumes. Et la somme des surfaces?
Attention! Un glissement respecte le volume total mais non la surface extérieure totale. Que de choses à faire comprendre avec ce matériel si simple et si pauvre en apparence! Si le maître a une claire conscience de ces structures, il pourra aider l'enfant, lui donner le matériel approprié et, au moment voulu, le mot et le symbole convenables.
Nous allons nous expliquer en mettant en évidence quelques unes des plus simples et des plus fondamentales de ces structures. Mais tout d'abord, signalons qu'il y en a peu, très peu. Chacune sera traduite par un mot et par un symbole, mais cela ne fera que très peu de mots et très peu de symboles. Comparée au code de la route ou à certains jeux de société, la mathématique peut sembler très pauvre! Mais les

structures sont si importantes, si étroitement liées aux structures mentales, qu'elles se trouvent dans les constructions les plus riches.
Supposons que nous dessinions le signe +. Qu'évoque-t-il pour nous? Un mot "plus", une opération "l'addition". Mais dans quelles situations réelles devrons-nous reconnaître l'addition? L'addition des entiers? celle des longueurs? celle des poids? celle des vitesses (il faut un mouvement d'entraînement) ? Qu'y a-t-il de commun entre des situations si diverses? L'enseignement de l'addition consiste à déterminer quand on a le droit d'utiliser ce signe et ces mots. Une condition essentielle est que l'ordre des termes n'importe pas, que l'opération soit, comme nous disons "com*mutative"*. Pourquoi un mot ici? Parce que toute idée importante mérite d'être caractérisée par un mot.
Faisons une étude plus complète d'un autre signe d'une importance capitale, le signe =.
Aucun signe n'est plus maltraité! On le voit utilisé dans les situations les plus variées.
C'est ainsi que j'ai vu dans une gare des environs de Paris l'indication:

Paris = voie no 3.

L'enfant qui voit ceci, peut-il imaginer que ces signes ne sont pas de vagues abréviations mais des symboles codifiés réservés pour certaines structures? Mais le maître lui-même sait-il exactement caractériser ces situations? Et faut-il attendre que l'enfant soit devenu un étudiant d'université pour en prendre conscience?
Nous devons définir cette situation. Elle est nommée une *Relation d'équivalence.*

Prenons les deux fractions 2/3 et 4/6. Nous ne pouvons pas dire qu'il s'agit de *la même fraction. Si vous* coupez un ruban en trois parties égales pour m'en donner deux morceaux, je pourrais les utiliser pour orner mon chapeau: un morceau pour le tour, un autre pour le noeud. Mais que faire de quatre petits sixièmes? Et 20/30 correspond à une situation pire encore. Ces fractions sont *équivalentes du point de vue de la mesure.* C'est à un niveau mental déjà plus élevé que je les dirai *égales.*
Mais que signifie "être équivalent à un certain point de vue"? Comment analyser avec la précision éxigée par les mathématiques cette notion que nous traduisons sous un aspect affectif par l'expression familière "ça m'est égal!" Prenons comme exemple la relation "équivalent en couleur". Voici une tige; vous reconnaissez qu'elle est bleue. Je montre encore la même tige. "Encore la même couleur". L'objet, au point de vue couleur, est équivalent à lui-même.
Voici maintenant la même tige, puis ce crayon. Celui-ci est, lui aussi, bleu. Si alors je montre d'abord le crayon, puis ensuite la tige, nous

dirons naturellement " oui c'est la même couleur"; c'est dire que l'ordre dans lequel on considère les objet n'importe pas.
Maintenant voici la tige, puis le crayon. Ensuite je montre le crayon puis ce ruban et nous reconnaissons dans les deux cas la même couleur. Alors si je montrais la tige puis le ruban, la réponse serait encore "oui". Autrement dit, je peux omettre l'intermédiaire du crayon et passer directement du premier au troisième objet.
Quelle autre idée contient la notion d'équivalence? Hé bien, rien d'autre. C'est tout.
Une relation d'équivalence est *caractérisée* par les trois conditions indiquées.
Comme ceci est extrêmement important, l'on a introduit trois mots:
La relation revient sur elle-même: elle est. *réflexive.*
L'ordre n'importe pas: la relation est *symétrique.*
La relation se transmet d'éléments à éléments: elle est *transitive.*
Chaque fois que la situation présente les trois caractères indiqués, on utilise le signe = ou un signe analogue tel que ≡ ou ~.
Ainsi, un signe pour une notion et trois mots pour trois conditions.
A quel âge pouvez-vous faire prendre conscience par l'enfant de l'équivalence en couleur? en longueur? en nombre? en masse? etc. Un jour, l'on pourra définir explicitement, dans toute sa généralité, la relation d'équivalence.
Nous pensons évidemment à une autre relation, celle que l'on traduit en français par "plus que", "plus long que", plus foncé que", "plus lourd que" etc. (d'autres langues utilisent des suffixes).
Sans qu'il soit nécessaire d'insister, précisons que de telles relations dites *"relations d'ordre"* sont caractérisées comme étant non réflexives, non symétriques, mais transitives. Pour la relation "plus petit que" entre nombres, nous écrivons
$a < a$ est faux, $a < b$ n'entraîne pas $b < a$,
$(a < b$ et $b < c)$ entraîne $a < c$.
A cette relation d'ordre *strict* s'oppose une relation *d'ordre large* qui admet l'équivalence et que traduisent les expressions "au moins autant que", «au moins aussi foncé que », etc.
$a \leq a$ est vrai $[a \leq b$ et $b \leq a] \Rightarrow a = b$
$[a \leq b$ et $b \leq c] \Rightarrow [a \leq c]$
Le signe $\Rightarrow$ que nous venons d'introduire pour traduire "Entraîne" correspond lui-même, on le verra sans peine, à une *relation d'ordre large entre propositions:* ceci est à la base de la logique.
Exemple: A l'aide du vocabulaire que nous venons d'introduire, l'essentiel de la théorie de la divisibilité s'énonce. La relation *"est un diviseur de",* est une relation d'ordre entre entiers. C'est ce que le matériel nous montre si nous savons comment l'interroger.

Ainsi, quelques idées simples, chacune associée à un mot et à un symbole dont l'emploi est strictement codifié.
Mais l'on peut demander "enfin, de quoi parlons-nous? Traitons-nous de couleurs? De longueurs? de propositions? de nombres entiers? La première règle n'est-elle pas de savoir de quoi l'on parle?" Précisément, c'est ce qu'il faut tout d'abord délimiter: l'on étudie, non pas *un* objet, mais un *ensemble d'éléments où* l'on cherchera les structures simples, en particulier les relations d'équivalence et d'ordre.
A la base est la théorie *des ensembles.*
Comment définir un ensemble? Ce n'est pas avec des mots que nous pouvons définir pour un enfant l'ensemble des longueurs ou celui des objets de couleur bleue. Quelles expériences nous en donneront la notion?
Sur la table sont toutes sortes de jouets. Nous demandons à l'enfant en montrant un objet: ceci est-il une bille? S'il peut répondre "oui" ou - non" sans erreur, nous dirons qu'il a la notion de l'ensemble des billes.
Le fait qu'un *élément appartient ou* non à
l'ensemble considéré est d'une importance capitale. Nous demandons par conséquent d'accepter un symbole. On a choisi un signe qui rappelle l'epsilon du verbe grec qui signifie "être". Dire que Socrate est un homme, c'est dire qu'il appartient à l'ensemble des hommes. Nous écrivons

$$s \in H$$

Remarquer que j'ai attribué une lettre minuscule à Socrate: ce n'est qu'un élément de l'ensemble. Il y a une différence essentielle entre un élément et l'ensemble des éléments: nous devons marquer ceci dans les notations.
Dans l'ensemble que nous étudions, nommé l'ensemble de *référence,* nous pouvons distinguer des *sous-ensembles;* par exemple, dans l'ensemble des billes, je distingue les billes blanches: elles forment le sous-Ensemble
B (lettre majuscule). Il y a *inclusion* de B dans E. Notion très importante qui exige un symbole nouveau; car le signe d'appartenance indique une *montée dans l'échelle des types* (de l'élément à l'ensemble), mais B est un ensemble de même type que E. Nous écrivons

$$B \subset E$$

Pensée différente? Alors symbole différent.
Mais dans E supposons qu'on distingue aussi les billes qui sont en verre: elles forment un nouveau sous-ensemble V. Nous voici devant l'ensemble de tous les sous- ensembles de E; on dit aussi *l'ensemble* des parties de *E.* Nous le notons: $\mathfrak{P}$ (E). Ainsi, $B \subset E$, $B \in \mathfrak{P}(E)$.
La situation se complique évidemment. Mais il faut bien savoir penser au moins à trois étages (l'ensemble des élèves est une classe,

l'ensemble des classes constitue l'école; on peut du reste avoir aussi l'occasion de parler de l'ensemble des écoles. Pour un administrateur ce n'est pas la même chose que l'ensemble des enfants.)

Puis-je dire encore quelques mots sur cet ensemble $\mathfrak{P}$ (E) des parties de E? Si nous considérons deux qualités, comme être blanche et être en verre dans l'ensemble des billes, nous sommes conduits à un schéma dit schéma d'Euler. Nous y voyons une région hachurée; elle correspond à l'ensemble des billes qui sont à la fois blanche *et* en verre. A cette conjonction des deux qualités correspond *l'intersection* des deux sous-ensembles B et V. Le sous-ensemble ainsi formé se note

$$B \cap V.$$

Mais une autre conjonction importante est le *ou* : nous demandons les billes qui sont blanches ou en verre ou à la fois blanches et en verre; elles constituent le sous-ensemble nommé la *réunion* de *B* et V. On le note $B \cup V$. Comme il s'agit du ou non exclusif, nous avons l'inclusion

$$(B \cap V) \subset (B \cup V)$$

Ainsi aux deux notions traduites par «et", "ou", correspondent deux opérations dans l'ensemble des parties de *E.* Les propriétés de ces opérations résultent des expériences comme les propriétés de l'addition et de la multiplication dans l'ensemble des nombres.

Ainsi il y a une *algèbre de la logique.* Pour l'introduire entièrement, il faut une troisième idée, celle de *la négation* qui, en langage des ensembles se traduit par la considération du *sous-ensemble complémentaire* d'un sous-ensemble: l'ensemble des billes non-blanches forme l'ensemble B' et l'on note $B' = \complement B$.

Comme exercice dans cette algèbre je propose de chercher le complémentaire d'une intersection.

$X = \complement (B \cap V)$ (ensemble des billes qui ne sont pas à la fois blanches et en verre; elles sont ou bien non blanches ou non en verre, ce qui exprime une réunion:

$X = \complement (B \cap V) = (\complement B) \cup \complement (V)$.

Lorsque nous voulons initier l'enfant aux éléments de la logique (logique d'Aristote), c'est à cette algèbre que nous devons penser; c'est sous sa forme ensembliste que l'expérience nous la donne.

Relations, opérations fondamentales, les idées essentielles sont introduites. Pourtant si l'on veut donner un sens précis à une affirmation, la langue nous offre d'autres mots qu'il est essentiel de faire entrer dans la mathématique. Si je dis "une perle est ronde", je veux dire que chaque perle est ronde, que toute perle est ronde, que toutes les perles sont rondes (chaque langue a ainsi plusieurs façons d'exprimer cette idée). La langue peut nuancer la pensée, mais la science en extrait un aspect logique, donc fait choix d'un signe. A la question "de combien d'éléments parlez-vous?" nous répondons

"tous". C'est le *quantificateur universel. Nous* écrivons V *b c B, b e R si R* représente l'ensemble des objets ronds.
Nous lisons "quel que soit l'élément b de *B*, *b* appartient à R", ou encore "tout élément de *B* appartient aussi à *R*". Il est beaucoup plus clair de dire "tout triangle a trois hauteurs" que "un triangle a trois hauteurs" en sous-entendant qu'il s'agit d'un triangle quelconque! N'omettons pas le quantificateur universel!
Une autre précision est, en quelque sorte, opposée à la précédante: elle exprime qu'il y a *au moins un* élément ayant la propriété considérée. Si un sous-ensemble est *vide,* il faut le savoir l Pour noter "il y a au moins un élément x supérieur à a", on écrit $\exists x : x>a$.
Trouve-t-on que tout ceci est bien compliqué? Mais, il faut penser que nous venons d'introduire *tous* les symboles exigés par les mathématiques élémentaires avec ceux que nous connaissons bien (+, -, x et :) et que le maître ne les introduira que le jour où ce sera une aide pour l'enfant qui prend conscience de la notion en question.
Les notions que nous avons énumérées sont si essentielles que, si nous n'en parlons pas, elles sont sous-entendues; nous comptons sur le génie de l'enfant pour les découvrir par lui-même! Connaître la structure des ensembles étudiés et savoir les associer logiquement, c'est beaucoup plus important que tout théorème, toute propriété isolée dont nous retenons plus ou moins approximativement l'énoncé,
Si le maître pense suivant les formes modernes où tout l'essentiel est explicité, il les enseignera sans le vouloir. Bien souvent, il verra que l'enfant est beaucoup plus mathématicien qu'on ne le croit: il ne peut s'exprimer naturellement, ni trier parmi toutes les remarques que lui suggère l'expérience, mais s'il est arrêté, c'est en général parce qu'il y a une véritable difficulté mathématique; notre pensée d'adulte trouve évidentes bien de structures. Comment aider l'enfant si nous n'en avons pas conscience?
Préparons-nous pour aider l'enfant à passer successivement, sans heurts à des niveaux mentaux, logiques, mathématiques de plus en plus élevés.

BIBLIOGRAPHIE

L. FÉLIX, *Mathématiques Modernes et Enseignement Elémentaire,* Blanchard, Paris.
Cahiers Pédagogiques, No 21, 15 Mai 1960 S.E.V.P.E.N., Paris.
L. FÉLIX, *L'Aspect moderne des Mathématiques.* Blanchard, Paris.
L. FÉLIX, *Exposé moderne des Mathématiques Élémentaires.* Dunod, Paris.