Anex 06

MODERNISATION DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN FRANCE[1]

Lucienne FELIX

C'est un très grand honneur pour moi de parler dans cette Maison où des savants de toute discipline viennent donner des conférences. Il est bien évident qu'un sujet tel que le mien paraît terrible à ceux qui ne sont pas mathématiciens. je reconnais dans la salle des amis, des professeurs que j'ai déjà vus dans leurs établissements, et ceux-là sont mathématiciens. Mais, je m'adresse à tous. je ne vais pas parler de toute l'organisation de l'enseignement, ni même de l'organisation de l'enseignement mathématique en France mais seulement indiquer un peu ce que peut être une mathématique conçue d'une façon moderne.

Les modifications qui apparaissent maintenant dans le programme de notre enseignement mathématique ne sont pas artificiellement décidées. Elles le sont en accord avec trois points de vue que je ne mentionnerai peut-être pas par ordre d'importance. je mentionnerai d'abord l'opinion des mathématiciens, des savants sur la mathématique. La citer en premier, c'est politesse vis-à-vis des savants, mais on pourrait dire qu'à l'école primaire l'opinion des savants n'a pas grande importance. Le deuxième motif qui paraît évidemment plus grave, ce sont les nécessités actuelles de l'utilisation de la, mathématique dans tout ce que nous appelons les sciences, y compris la biologie, la linguistique, la géographie, l'économie, etc. Et le troisième motif, celui qu'on peut mettre au premier rang, c'est de faciliter l'apprentissage mental des enfants dès leur plus jeune âge. L'apprentissage mental n'est pas tellement l'aptitude au calcul rapide, car enfin on a inventé des machines pour faire des calculs. Ce qui est important, c'est de savoir se servir des machines, c'est-à-dire faire des programmations, et, si possible, inventer des machines elles-mêmes.

Ces idées de l'obligation des modifications de l'enseignement paraissent évidentes quand il s'agit, par exemple, d'étudier l'électricité ou la biologie. Nous savons que la science 'actuelle exige des connaissances tout à fait différentes de celles que l'on avait il y a soixante ans. Il peut paraître plus étonnant à ceux qui ne sont pas mathématiciens qu'il y ait aussi des changements à faire en mathématiques; on croyait, et certaines personnes peuvent croire encore, que les mathématiques sont le domaine de l'Immuable, de

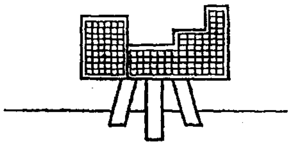
[1] Conférence faite le 15 mai 1970 à la Maison franco-japonaise à Tolio. Publié in « Bulletin de la société Franco-Japonaise des Sciences Pures et Appliquées » p. 50 à 73 n° 17 aout 1970

l'Absolu et que rien ne peut y être changé. Ceci est tout à fait faux: l'histoire a montré que les mathématiques ont continuellement changé; parfois, elles se sont compliquées, parfois elles se sont simplifiées, et nous avons eu la chance merveilleuse de voir, vers 1900, les mathématiciens découvrir que la mathématique , dans ses fondements du moins, était extrêmement simple si on savait la regarder. je vais essayer de montrer que toutes les mathématiques ont changé, ou plutôt que toute la mathématique a changé, puisque maintenant- on la considère dans une unité et non plus comme la juxtaposition de chapitres différents.

Et nos enfants aussi ont complètement changé. N'oublions pas que nos enfants vivent dans un monde qui n'est pas le monde d'autrefois; ils vivent entourés de symboles. Quand ils sortent dans la rue, ils voient les feux rouges ou verts; au japon, ils ont aussi de petits drapeaux jaunes pour traverser la rue. Il est certain que, pour eux, s'exprimer par un signe, par un symbole, c'est ce qu'ils savent faire même avant de parler, d'écrire ou de lire. Il est incroyable de voir des enfants de trois ans reconnaître les marques d'autos. je n'ai jamais compris comment ils font. Indépendamment des couleurs, de la grandeur, ils reconnaissent la marque à des signes qu'ils savent interpréter. Il n'y a donc absolument rien d'arbitraire à décider que l'on doive changer l'enseignement. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'en France, actuellement, on prend un tournant brusque, de sorte qu'il est peut-être difficile de suivre la mutation. Mais c'est une mutation préparée depuis au moins 25 ans.

Puisqu'il y a ici un tableau noir, vous m'excuserez si j'essaie de faire presque un cours, c'est-à-dire de parler des choses précises. Pour mieux comprendre la situation, prenons un exemple: celui de la botanique. On peut observer les plantes et essayer de les classer. C'est ce qu'on appelait dans ma jeunesse la botanique spéciale. Il y a aussi la botanique générale, qui est l'étude des fonctions de la racine, des feuilles, etc., c'est-à-dire la physiologie des plantes. Nous avons la même chose en linguistique où il apparaît un aspect nouveau qu'on appelle le structuralisme. On y étudie la manière dont les pensées peuvent être exprimées dans toutes les langues en faisant des comparaisons entre elles au lieu d'étudier particulièrement les mots d'une seule langue. je prends un autre exemple: celui de l'architecture. Comparez l'enseignement de l'architecture quand il fallait mettre des pierres l'une sur l'autre et l'enseignement de l'architecture moderne où l'on construit avec le béton précontraint. Il s'agit toujours de faire tenir une maison. Mais de nos jours vous pouvez voir partout des constructions plus ou moins bizarres, sans parler de celles que l'on admire dans votre exposition.

Voici, par exemple, une maison posée sur trois piliers (fig. 1).



(Fig. 1)

Ça, c'est une maison moderne. Qu'est-ce qui fait tenir la maison sur le sol? C'est tout de même la pesanteur.

On peut dire que toute l'architecture des mathématiques tient sur une base fondamentale qui est la théorie des ensembles, et grâce à trois piliers fondamentaux qu'on appelle les structures algébriques, les structures d'ordre et les structures topologiques.

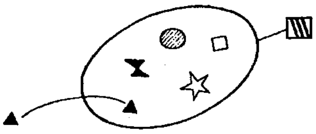
Pour avoir une idée de l'édifice, il n'est pas obligatoire de connaître toutes ces théories; pour les jeunes enfants, il suffit de connaître une petite partie des structures algébriques.

J'avais dit que la maison tient par les lois de la pesanteur. Comment tient l'édifice mathématique? En bien, il tient par les lois de la logique. Et la logique elle-même a une structure d'algèbre. Autrement dit, en étudiant le début de l'algèbre, on étudie la logique en même temps; tout au moins la logique dont nous avons besoin: la logique la plus ordinaire, la logique du bon sens, celle du "oui ou non".

Comme les philosophes l'ont dit depuis longtemps, il n'y a de science que du général, C'est une belle phrase que l'on a étudiée au cours de philosophie. Il n'y a pas de science d'objets particuliers, c'est pour cela que les objets dont je vais parler seront considérés comme les éléments d'un ensemble.

Quand il s'agit de parler aux enfants, je vais manipuler des objets matériels dans une boîte. Et alors, tout de suite, je vais habituer les enfants, qui parlent mal et qui ne savent ni lire ni écrire, à préciser par oui ou par non si un objet est dans la boîte, si c'est un élement de l'ensemble.

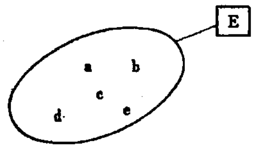
Naturellement, je prends des objets de forme bien distincte, et je les dessine; donc, déjà, j'opère au niveau de l'écriture (fig. 2).



(Fig. 2)

Le même objet peut être dessiné plusieurs fois. Alors que l'objet est unique, son dessin, son signe peut être utilisé autant de fois que je le désire. je montre par un trait qu'un tel objet est un élement de l'ensemble. Et déjà, je considère deux niveaux: celui des objets et celui de l'ensemble des objets. je vais donner un signe à l'ensemble: c'est un nouvel objet d'un type supérieur. je mets une étiquette à la "maison des objets". L'enfant comprend de quoi il s'agit sans qu'il y ait besoin de parler.

Nous écrivons ici a,b,c,d, . . . pour désigner des objets, et comme étiquette pour l'ensemble, je vais choisir une lettre d'aspect franchement différent en utilisant une majuscule (fig. 3).

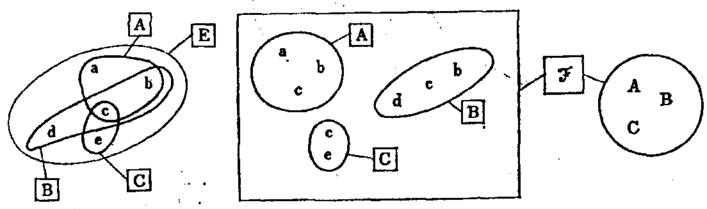


(Fig. 3)

Il m'a été particulièrement intéressant de voir qu'au japon vous avez adopté ces signes-là qui ne sont pas les lettres avec lesquelles vous écrivez les mots, de sorte que le rôle de désignation est encore plus évident en japonais qu'en français.

Maintenant nous allons passer au troisième niveau. On a décidé de désigner par signe une relation entre l'élément et l'ensemble. Non seulement nous aurons des signes pour les objets et pour les ensembles, mais aussi pour les relations, et nous écrirons a E E pour désigner que l'objet a est un élément de l'ensemble E. Historiquement, ce symbole provient du verbe grec signifiant "être".

Supposons maintenant que j'ai pris un ensemble E formé d'éléments a,b,c,d, etc. Il m'arrive de considérer des ensembles formés de a,b,c, ou de b,c,d, ou de c,e. je nommerai ces trois ensembles A, B, C (fig. 4).



(Fig. 4)

Ce sont des parties de l'ensemble E. Nous voila considérant un ensemble de trois parties de E. Vous voyez que je construis l'échelle des types: un élément, un ensemble d'éléments, un ensemble d'ensembles.

Dès le plus jeune âge, je veux dire dès l'âge de quatre ans, on est obligé de travailler à ces trois niveaux. On peut dire que jusqu'à l'enseignement supérieur on ne va pas au delà. On comprend ainsi ce que nous venons de dire par le slogan de notre Association des Professeurs de Mathématiques: "De la Maternelle à la Faculté"; l'idée qui est en germe à quatre ans se développe, mais elle ne change pas de nature avant d'arriver au niveau supérieur quand il s'agit de faire des études sur l'infini et du transfini dont nous ne parlerons pas maintenant.,

Indiquons tout de suite qu'on écrit A C E, si A est au même niveau que E, pour dire que A est une partie de E. Eh bien, dorénavant, nous pouvons raisonner en faisant le syllogisme classique donné au début de la classe de philosophie: "Socrate est un homme; les hommes sont mortels; donc Socrate est mortel". Socrate, bien que ce soit un grand philosophe, n'était tout de même qu'un individu, il est donc du premier niveau. je le désigne par a. Supposons que A soit l'ensemble des hommes; dire que Socrate est un homme équivaut à dire que a est élément de l'ensemble A; ce qui s'écrit a E A.

L'ensemble A des hommes est une partie de l'ensemble des mortels que je nommerai E. Donc A C E. J'ai dit deux choses en même temps a ε A et A C E.

Enonçons maintenant une règle fondamentale en logique. De ces deux relations a E A et A C E, on peut déduire a E E, c'est-à-dire " a est un élément de E." je vais indiquer cette règle en utilisant une flèche double $\Rightarrow$ "entraine")

[a E A, A c B] => [a E E].

a E E veut dire exactement que Socrate est mortel.

J'ai écrit ici cette flèche en craie jaune, parce que je n'ai pas de craie verte, mais les enfants m'ont demandé la couleur verte, disant que, si je peux passer d'une connaissance à l'autre, il faut mettre le feu vert.

Raisonner, c'est savoir à quel endroit on peut mettre ces flèches. On ne peut pas mettre ces flèches vertes n'importe où, et il en est de même dans la rue. je pourrais vous dire beaucoup de choses là-dessus, mais pour y voir un peu clair, il faut une petite idée de plus qui consiste, par exemple, à examiner deux parties de E.

J'examine A et B qui sont éléments de l'ensemble des parties de E (fig. 4). Qu'est-ce que vous voyez? Vous êtes peut-être trop âgés pour y voir quelque chose. Mais les enfants voient de suite que b est un élément qui appartient aussi bien à A qu'à B. Il en est de même de l'élément c. Les enfants voient que les éléments b et c sont des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Il est fort intéressant de construire à partir de A et de B un autre ensemble que j'appellerai F, autre élément de l'ensemble des parties de E. F est formé uniquement de b et de c. Si je, le montre, tout le monde comprend. Si je l'explique, nous allons avoir des difficultés. Mais heureusement, je vais pouvoir mettre un signe. Vous avez vu que F est fabriqué à partir de A et B. On a inventé un signe n pour désigner cette opération de fabrication. On écrit donc: F = An B. Pouf former An B, je prends de éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Ce qui est important, c'est qu'il faut les prendre tous.

Pour mettre ce point au clair, il va être très commode d'introduire le quatrième signe V (la lettre A à l'envers, A étant la première lettre du mot anglais ««all" qui veut dire "tous"). En écrivant V m E E, on lit: - quel que soit l'élément m de l'ensemble E" ou "pour tous les éléments m de E." La définition de AnB (qu'on lit: l'intersection de A et B) s'écrit:

[∀m, me A n B] <=> [m E A et ME B]

Ici, le signe ⇔ indique l'équivalence logique; on peut passer d'un côté de ce signe à l'autre côté et inversement. Ainsi, à partir des deux parties A et B de l'ensemble E, on a pu fabriquer une autre partie An B = F du même ensemble E, d'après la définition que je viens de donner, celle de l'intersection.

On peut en fabriquer d'autres; en particulier celle qu'on désigne par A U B et qu'on appelle la réunion de A et de B. On la définit par:

[Vm, m E A U B]   [m E A ou m E B]

c'est-à-dire que, quel que soit m, m est un élément de la réunion de A et de B, si m est un élément d'un ou de l'autre des ensembles A et B. Si donc A contient des éléments a, b, c et B des éléments b, c, d comme auparavant, alors A U B contient quatre éléments a, b, c, ci. Les étudiants américains appellent ces signes ∩ et U '«cap" et '<cup", car leurs formes ressemblent à celles d'un chapeau et d'une tasse. Les notions de l'intersection et de la réunion ne présentent aucune difficulté aux enfants, mais si l'on veut les expliquer par des paroles, cela apporte quelquefois des confusions.

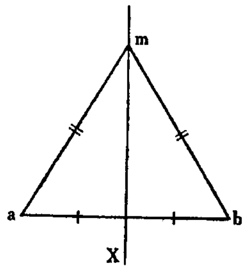
Dans la définition de l'intersection, j'ai employé le mot français "et". Or cette conjonction (ce "connecteur" comme on dit dans la grammaire structuraliste) '«et" se traduit différemment en japonais selon les cas. J'ai pris une leçon de japonais, et vous me direz si j'ai bien compris.

Soient A l'ensemble des fruits jaunes et B l'ensemble des fruits acides. L'intersection A ∩ B est l'ensemble des fruits jaunes et acides. En japonais, vous dites: "kiiro de suppai kudamono". La réunion A U B est l'ensemble de tous les fruits jaunes et de tous les fruits acides. C'est donc tout à fait autre chose que A ∩ B; mais en français, on utilise le même connecteur «'et". Or, vous dites en japonais: -kiiroi kudamono to suppai kudamono". Le même mot "et" en français est traduit différemment en japonais. Ici, le japonais me semble plus logique que le français.

Supposons maintenant que les enfants aient douze ans et que nous soyons en train de parler d'ensembles de points, c'est-à-dire de faire de la géométrie. Nous mettons des lettres minuscules pour les points puisque ce sont les éléments les plus fins dont nous nous occupons. Nous allons faire un peu, très peu de géométrie; tout le reste sera de la logique.

Nous opérons dans un plan P. Soient a, b deux points donnés. je voudrais m'intéresser aux points m tel que la distance ma soit égale à la distance mb. On découvre (par exemple en repliant des papiers) que l'ensemble des points m est une droite que je nommerai X. Ce qu'on appelait autrefois du terrible nom de lieu géométrique s'exprime par: (fig. 5).

VM E P, (mâ = mb <==> (m E X)

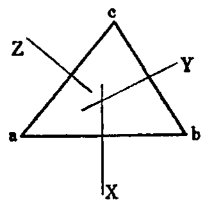


(Fig. 5)

Mais les enfants, quand ils ont travaillé avec deux points en veulent toujours un troisième.

Soient a, b, c trois points donnés. Cherchons les points m tels que les distances ma, mb mc soient égales. En remplaçant a, b par b, c et a, c on définit les droites Y et Z comme la droite X (fig. 6).

Ecrivons l'une au-dessous de <u>l'autre</u> les 3 définitions. Une flèche (à sens unique) indique à gauche que ma= mb et (en japonais "de") mb mc entraine ma= mc d'après la transitivité de l'égalité. A droite nous utilisons la définition de l'intersection (fig. 7).



(Fig. 6)

$$\left.\begin{cases} (\overline{ma}=\overline{mb}) \Longleftrightarrow (m\in X) \\ (\overline{mb}=\overline{mc}) \Longleftrightarrow (m\in Y) \end{cases}\right\} \Longleftrightarrow \boxed{m\in(X\cap Y)}$$

$$(\overline{ma}=\overline{mc}) \Longleftrightarrow (m\in Z) \qquad \xleftarrow{\ f\ }$$

(Fig. 7)

Pour utiliser le sens unique, suivons la flèche pointillée: elle montre, d'après la transitivité de la déduction que

m e (x n Y) entraine m E Z

(ce que nous indiquons par la flèche raccourcie f

Si a, b, c ne sont pas alignés, X et Y sont deux droites non parallèles du plan de ces trois points; X Y contient un point unique et nous venons de voir qu'il appartient à Z. C'est dire que les trois droites X, Y, Z sont concourantes.

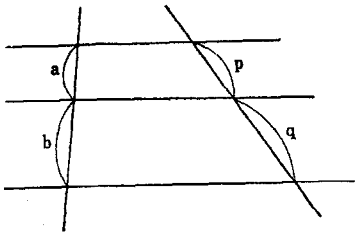
Remarquons que, à partir de l'introduction de X, on obtient le résultat par la seule logique.

Je n'insiste pas sur la suite: le 1 s enfants demandent d'introduire un quatrième point d'où l'étude des quadrilatères inscriptibles, etc.

Parlons un peu des nombres: il est impossible d'empêcher les enfants de s'occuper du nombre, mais, quand on se met à calculer on ne pense plus.
Donc nous retarderons autant que possible la technique du nombre. En France, se poursuivent de très belles expériences pour les enfants de neuf à dix ans aux dernières années de l'école primaire, en utilisant de petites machines à calculer, de petits computers. Cela sert plus tard, mais c'est plus intéressant à cet âge. Un petit problème très simple exige un calcul: par exemple, la vente ou l'achat de fruits. Un groupe, qui est le programmateur, indique quels sont les calculs qui doivent être faits; le groupe des enfants qui sont des calculateurs, ne savent pas de quoi il s'agit. Il faut que le programme qu'on leur a donné soit assez clair pour qu'ils puissent travailler. Autrement dit, on fait la distinction entre le moment où l'on pense - il s'agit de créer le programme - et le moment où l'on exécute le calcul. Un troisième groupe calcule à la plume et quelquefois va encore plus vite que le groupe du calcul à la machine.

je voudrais dire ici quelques mots sur la suppression des règles de trois, des pourcentages et de toutes ces choses qui ont tellement ennuyé tout le monde. Il s'agit d'une situation où l'on a deux ensembles de nombres, mettons A et B qui vont être associés (fig. 8).

Supposons qu'au nombre 1 de l'ensemble A soit associé 20 de l'ensemble B, à 1 + 1 = 2 de l'ensemble A est associé 20 + 20 =: 40 de l'ensemble B. D'une manière générale, si à deux nombres a, b de l'ensemble A sont associés deux nombres p, q de l'ensemble B, à la somme a + b de A est associée la somme p + q de B. C'est une situation qui se présente très souvent. Quand j'achète une chose à 20 francs, je dois payer 20 + 20 = 40 francs pour acheter deux choses semblables (s'il n'y a pas de réduction). En géométrie, un théorème, dit de Thalès, donne la relation entre les longueurs des segments sur deux droites coupées par des parallèles. La situation est évidemment la même (fig. 9).



(Fig. 9)

Si x est un nombre de l'ensemble A et y un nombre de l'ensemble B associé à x dans cette situation, on voit que y = kx, k étant une constante (k = 20 dans le cas de la Fig. 8). Cette situation est tellement importante qu 1 on lui a donné un nom: fonction linéaire et on la retrouve, partout. Quand, plus tard, on parlera des intégrales et qu'on dira que ces intégrales sont des fonctions linéaires de fonctions à intégrer, ce sera tout pareil.

je voudrais parler d'un autre exemple d'association de nombres: j'ai envie d'associer le produit à la somme (fig. 10)

A	B
$\frac{1}{2}$	$10^{\frac{1}{2}}$ $(=\sqrt{10})$
1	10
$2=1+1$	$10\times10=100=10^2$
$3=1+1+1$	$10\times10\times10=1{,}000=10^3$
$\vdots$	$\vdots$
a	p
b	q
a+b	$p\times q$
$\vdots$	$\vdots$
x	y

(Fig. 10)

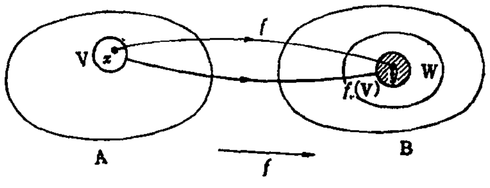
Au nombre 1, on fait correspondre 10; à 2 = 1 + 1, on doit associer 10 X 10 -_100, et à 3 = 1 + 1 + 1 correspond 10 X 10 X 10 = 1000. On écrit alors 100 = 102, 1000 = 103 . . . Qu'est-ce qui correspondra à 1/2 ? Cela doit être 1 Of'. Mais comme on a 1/2 + 1/2 = 1, on doit avoir 1 Oz' X 102 1/2 = 10, donc 10 1/2 est le nombre écrit en ancienne notation »,~0. Mais si l'on adopte cette nouvelle notation de l'exposant fractionnaire, l'ancienne notation n'est plus nécessaire. Les enfants n'ont aucune difficulté à utiliser les exponsants fractionnaires. Si x est un élément quelconque de l'ensemble A et y l'élément de B qui correspond dans cette situation, on a donc y = 10'. C'est ce qu'on appelle la fonction exponentielle. Inversement, si l'on se donne un élément y de B, il y a bien un élément x de A qui y correspond. On écrit alors x = log y; on dit que x est le logarithme de y. Le logarithme sert à transformer une multiplication en addition.

Si j'explique tout cela aux enfants de douze ans, il n'y a pas beaucoup de mystère, mais si je dois l'expliquer avec plus de rigueur aux élèves de dix-sept à dix-huit ans, cela devient plus difficile. Car à ce niveau, je dois imposer à cette correspondance d'être "continue", savoir si, x faisant de tout petits pas sur A, qui est l'ensemble de départ, cela ne provoque pas de grands sauts de y dans B, l'ensemble d'arrivé. De telles questions ne concernent pas seulement le nombre, bien sûr; on peut définir la continuité des applications de l'ensemble de départ A vers l'ensemble d'arrivée B, s'il y a dans les deux ensembles la notion de voisinage, c'est-à-dire si la notion d'éléments pas très différents l'un de l'autre est définie.

Jusqu'ici, je suis restée dans le domaine des structures algébriques, mais les notions de voisinage et de continuité sont la base de toutes les théories de structures topologiques. Sans entrer dans le détail, je l'expliquerai en quelques mots parce que l'idée de base est très simple et très importante.

Il nous sera commode d'avoir encore un symbole logique a (E à l'envers qui se lit: -il existe"). C'est d'ailleurs le dernier des symboles logiques dont nous aurons besoin ici.

Voici maintenant l'ensemble de départ A, l'ensemble d'arrivée B d'une application f (fig. 11).



(Fig. 11)

Soit y c B l'image f (x) d'un élément x c A par f. L'image d'une partie V de A par f sera notée f (V). Que f soit continue en x veut dire ceci: je veux rester dans un voisinage W de y dans B. Il existe un petit voisinage V de x tel que f (V) c W. On peut écrire ceci en signe:

VW, 'JV tel que f(V) c W

C'est très simple, et quand des enfants de treize à quatorze ans arrivent à découvrir ceci à force de préciser leur pensée, je vous promets qu'ils sont fiers. Si nos élèves de philosophie arrivent à écrire et lire ces signes, c'est vraiment un triomphe pour eux: ils ont compris l'idée fondamentale.

Je me permets une question: si j'ouvre vos livres de second degré jusqu'a la classe terminale, trouverai-je ces signes écrits, ou est-ce seulement à l'Université que vous écrivez cela? - (Réponse: Maintenant, on commence à les introduire dans l'enseignement secondaire). C'est exactement la même chose chez nous; il y avait des professeurs qui conduisaient l'enfant à écrire ainsi vers treize ou quatorze ans. Maintenant, cela fait partie des programmes dans notre classe terminale. Nul ne sait d'ailleurs quels seront les programmes dans quelques années.

Pour terminer, je voudrais écrire ici le nom de VIETE (mathématicien français, 1543-1603) qui, entre autres choses, a inventé l'utilisation des lettres et signes pour représenter objets mathématiques et relations. Ses collègues, en 50 ans de discussions, ont adopté ces signes (+, -, =, ...) De ce jour, l'algèbre était crée et était accessible aux enfants de quatorze «ans. Pensons aussi, si vous le voulez bien, à la numération décimale. Autrefois, la division a été étudiée à la Faculté et c'est la numération de position qui a permis de l'enseigner aux enfants de dix ans. Il est tout de même curieux qu'il ait fallu tant d'années pour introduire quelques signes. Maintenant, il s'agit d'introduire seulement les signes c, c, n, U, =>, V, a. Nous ne pouvons pas encore mesurer les conséquences du bouleversement introduit par cette rénovation. Je vous remercie d'avoir été si nombreux à m'écouter et si attentifs à ce simple exposé.

Lucienne FELIX
Agrégée de Mathématiques