1

UNIVERSITE DE BORDEAUX-I IREM DE BORDEAUX

Lucienne FELIX

UN APERCU DES METHODES EN GEOMETRIE ELEMENTAIRE

---

2 textes de réflexions didactiques

mars 1991

Préface

Lucienne FELIX me fait l'honneur de me demander de préfacer cet "aperçu sur les méthodes utilisées en géométrie élémentaire".

On ne présente plus Lucienne FELIX aux professeurs de Mathématiques, sinon aux débutants.

Pour améliorer l'enseignement des mathématiques, dans la voie tracée par Henri LEBESGUE dont elle a été l'assistante à Sèvres entre les deux guerres (elle a d'ailleurs recueilli et achevé son ouvrage posthume sur les constructions géométriques), Lucienne FELIX a publié de nombreux ouvrages de réflexion, de culture mathématique et d'innovation, ainsi que des manuels très originaux pour les différents niveaux de l'enseignement secondaire. Ses livres ont été un appui décisif pour certains amoureux des mathématiques de ma génération et sur leur engagement au service d'une rénovation des pratiques de l'enseignement.

Elle a publié un hommage à Henri LEBESGUE où elle rassemble les citations les plus significatives du grand mathématicien au sujet de l'enseignement. Elles constituent de très intéressants sujets de méditation pour les professeurs.

Mais ce n'est pas moi qui peux la présenter puisque c'est elle, au contraire, qui m'a tenu sur les fonds baptismaux des études sur l'enseignement à la CIEAEM en 1960, et qui m'a, par la suite, guidé et aidé dans ce domaine.

A quel titre, autre que celui d'une amitié et de ma part d'une admiration profonde et si ancienne, puis-je assumer cet honneur ?

Il me semble y distinguer une raison (qui vaudra le crédit que vous voudrez bien lui accorder) disons de relégitimation.

Il est partout question, aujourd'hui, de didactique et du rôle que joue ce domaine dans la réorganisation de la formation des professeurs.

Quelle place tiennent dans ce nouveau secteur les activités "anciennes" des professeurs de mathématiques ?

L'art de fabriquer des problèmes par exemple : ce champ de "méthodes" qui permettait de réorganiser les connaissances à enseigner en une problématique où les élèves pouvaient, sur les talons de leurs professeurs, goûter aux plaisirs (transposés, scolarisés, modélisés, mais réels) de la chasse aux questions mathématiques.

L'art de fabriquer avec les résultats épars de recherches mathématiques, parfois pénibles et obscures, un exposé séduisant qui permet soudain l'accès fulgurant à un domaine nouveau.

L'art de réorganiser en une vaste synthèse les connaissances mathématiques nécessaires pour la communauté qui permette à la fois le maintien d'une cohésion culturelle suffisante et la préparation des élèves à des métiers fort différents.

La didactique des mathématiques est-elle l'héritière des efforts de tous les mathématiciens qui se sont attachés à la diffusion de leur discipline ("populaire" comme STEVIN, ou non) et de tous les professeurs qui ont "naïvement", dirait-ont aujourd'hui, consacré leurs efforts à maintenir vivante une aventure que d'aucuns déclarent si austère?

ou les rejette-t-elle définitivement dans la préhistoire et dans l'amateurisme ?

La didactique est-elle cette intrusion d'une méthodologie bureaucratique venue d'ailleurs que certains se plaisent à présenter? ou peut-elle intégrer, comprendre, critiquer, exploiter, dépasser, aider une activité mathématique des professeurs ?

A travers ma personne, je crois que Lucienne FELIX pose cette question à tous les didacticiens et à tous les professeurs.

Elle le fait à sa manière, comme toujours, par l'exemple : Elle prend sa plume et écrit ce qui lui paraît être le plus typique de l'activité mathématique d'un professeur.

Je donnerai une réponse plus étayée dans un autre texte, mais je suppose que vous entrevoyez ma position. Le jour où ce genre de texte, ni vraiment scientifique, ni pédagogique, ni didactique, n'aura plus d'intérêt pour nous sera bien proche du jour où l'on ne fera plus de mathématiques nulle part.

Guy BROUSSEAU

INTRODUCTION

Il y a une quarantaine d'années, à la première rencontre de la CIEAEM, on évoqua la formule de Ptolémée. Un collègue anglais, devenue depuis un ami, Owen Storer, présenta ce théorème comme le type même dont la solution doit être apprise par coeur, trop astucieuse pour être retrouvée (je ne sais plus laquelle il proposa, peut-être du type de la 5ème ci-après : un point miraculeusement introduit en est la clef !).

Je m'indignai et, à l'époque, bien entraînée à résoudre des problèmes de géométrie élémentaire, je proposai immédiatement plusieurs solutions. Mais la vieillesse m'ayant privée de mémoire, je me trouve dépourvue et, refusant de faire appel aux documents qui ne manquent pas, je fais face à la situation. Je comprends autrement la réflexion de mon collègue : Devant un champ trop riche de connaissances variées mais sans voies tracées vers le but, quels chemins prendre ? D'où partir ?

Au départ, il faut préciser de quoi il s'agit. On demande de découvrir ou, à la rigueur, de vérifier des relations métriques conséquences de l'inscriptibilité dans un cercle d'un quadrilatère convexe (4 côtés et 2 diagonales). Ma première idée (je ne prétends pas que c'est la meilleure !) fut de faire appel aux théorèmes sur les angles inscrits ou sur les couples d'angles opposés supplémentaires. D'autres voies d'accès furent envisagées ensuite, et les questions des réciproques se présentèrent.

Nous exposons ici des démonstrations du théorème direct. Leur variété pose des questions dont nous faisons ensuite l'étude dans la deuxième partie.

JUSTIFICATION DE L'ETUDE

La question posée est simple et claire.

"Démontrer que, dans tout quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés" (formule dite de Ptolémée).

Tous les cours de **géométrie classique**, depuis l'enseignement des Jésuites au XVIIème siècle, proposent une démonstration (sinon plusieurs), tel le manuel "La géométrie des dames" publié vers 1790, jusqu'aux traités de notre siècle (tel celui qui fut le plus réputé aux environs de 1900, rédigé par **Hadamard**, dans la collection dirigée par Darboux de mathématiques élémentaires).

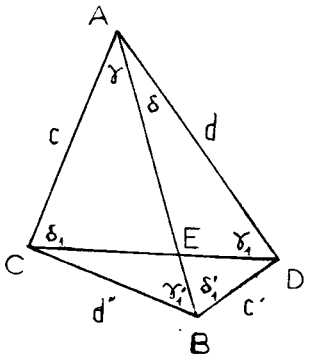
Cette célébrité s'explique par l'importance historique de la formule en question : Les progrès de l'astronomie, en relation avec ceux de la navigation ont conduit Ptolémée, vers 150 apr. J.C., à créer le "théorème des cordes" pour l'étude des angles et arcs de cercle et de la sphère. Prolongeant les résultats d'Hipparque, la construction de la "table des cordes" est, pour nous, la **table des sinus** des angles aigus et le théorème, objet de notre étude, est la clef de ce que deviendra, avec l'introduction des tangentes des angles, notre trigonométrie plane et sphérique.

Mais notre étude ne concerne pas cet historique. En quoi, alors, le théorème nous intéresse-t-il? En feuilletant les traités et manuels, on est frappé par la **diversité des démonstrations**, diversité telle que la formule est devenue **inutile**, simple remarque depuis l'introduction des puissantes théories : transformations géométriques, trigonométrie, géométrie analytique, nombres complexes, mais elle est l'**occasion d'une recherche** sur les méthodes de géométrie élémentaire : position du problème (il s'agit de **deux** formules!), réciproques, extension des propriétés d'une figure à tout le plan, comparaison des voies d'exploitation d'une situation, etc...

C'est ce que nous allons tenter d'explorer.

ELEMENTS INTRODUITS DANS L'ETUDE DU QUADRILATERE CONVEXE

1) Notations générales



<u>Cercle</u> centre O, rayon R

<u>Diagonales</u> AB et CD se coupant en E

<u>Côtés</u> AC , CB , BD , DA

<u>Longueurs</u> AC = c , AD = d , AB = a

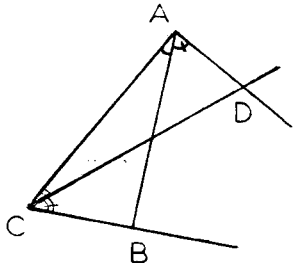
BD = c', CB = d', CD = a'

<u>Angles</u> **BAC** = γ **ADC** = γ_1 **BDC** = γ' **ABD** = γ'_1

BAD = δ **ACD** = δ_1 **BCD** = δ' **ABC** = δ'_1

CAD = $\widehat{A} = \gamma + \delta$ **ADB** = $\widehat{D} = \gamma_1 + \gamma'$

CBD = $\widehat{B} = \gamma'_1 + \delta'_1$ **ACB** = $\widehat{C} = \delta_1 + \delta'$



<u>Triangles</u> : Les angles satisfont à

$$\pi = \gamma + \delta + \gamma_1 + \delta_1 = \gamma' + \delta' + \gamma'_1 + \delta'_1$$
$$= \gamma + \gamma'_1 + \delta_1 + \delta' = \delta_1 + \delta'_1 + \gamma_1 + \gamma'$$

<u>Degré de liberté du système</u>. Sur les 12 angles, on peut en choisir 4 indépendants qui permettent de construire la figure. Par exemple à partir de AC on porte (γ, δ, δ_1 , δ'). Il y a donc un système de 8 équations indépendantes déterminant les 8 autres angles. Le degré de liberté est 4.

2) Conditions d'inscriptibilité

Les propriétés du cercle prouvent qu'**une égalité** telle que $\gamma = \gamma'$ (angles inscrits découpant le même arc) entraîne l'inscriptibilité d'où 3 angles arbitraires. La situation correspond maintenant au système de 9 relations :

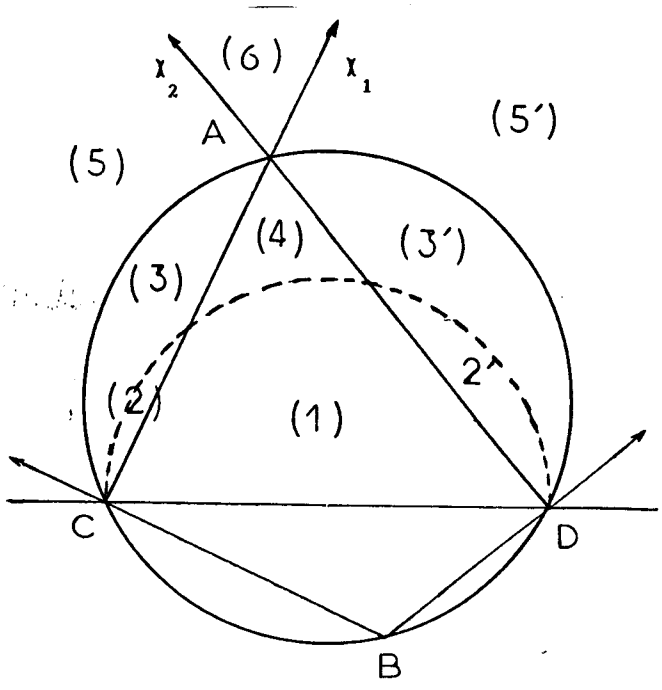
$$\gamma + \delta + \gamma_1 + \delta_1 = \pi \quad \gamma' = \gamma, \quad \delta' = \delta, \quad \widehat{A} = \gamma + \delta, \quad \widehat{B} = \gamma'_1 + \delta'_1$$
$$\gamma'_1 = \gamma_1, \quad \delta'_1 = \delta_1, \quad \widehat{C} = \delta + \delta'', \quad \widehat{D} = \gamma_1 + \gamma''$$

<u>Longueurs</u> L'inscriptibilité entraîne "l'homologie des sinus

$$\frac{c}{\sin\gamma_1} = \frac{\delta}{\sin\delta_1} = \frac{c'}{\sin\delta} = \frac{d'}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\widehat{C}} = \frac{a'}{\sin\widehat{A}} \; [= 2R]$$

Les 6 longueurs des côtés et diagnonales sont liées par **5** équations homogènes déterminées par **3** paramètres angulaires indépendants. Ainsi 2 **relations homogènes métriques indépendantes lient les 6 longueurs du quadrilatère inscriptible**. Le couple le plus simple est celui des **deux relations de Ptolémée**, objet de l'étude.

Remarque : Cas de figure du point de vue de la comparaison des angles à 1 droit.



La somme des 4 angles du quadrilatère convexe est égale à 4 droits, donc au moins un des angles est obtus.

Soit $\hat{B}$ > droit

La comparaison à 1 droit de $\hat{C}$ et de $\hat{D}$ fait tracer

$Cx_1 \perp CB$

$Dx_2 \perp BD$

La comparaison de $\hat{A}$ à 1 droit fait tracer le cercle de diamètre CD,

et celle de $\hat{A}$ à $\pi - \hat{B}$ fait tracer le cercle circonscrit à CBD.

Nous obtenons 9 régions :

$\hat{B}$ est obtus

$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$	Région
obtus	obtus	obtus	
		aigu	(2)
	aigu	obtus	(2')
		aigu	(1)
aigu	obtus	obtus	(6)
		aigu	(3) et (5)
	aigu	obtus	(3') et (5')
		aigu	(4)

L'étude fait considérer aussi le cercle ensemble des points correspondant à l'inscriptibilité. Il sépare les régions (3) et (5) et les régions (3') et (5').

PREMIERE PARTIE

Diverses démonstrations des formules de Ptolémée

PREMIERE DEMONSTRATION - (Triangles dont un côté est une diagonale)

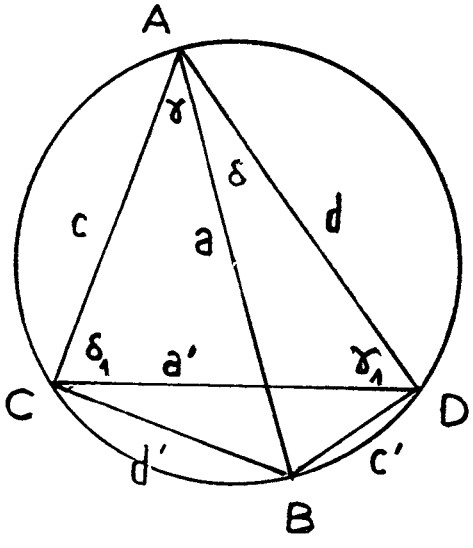
L'inscriptibilité résulte de $\widehat{A} + \widehat{B} = \pi$, donc $\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A}$

Dans les triangles CDA et CDB, nous utilisons la formule

$$\begin{cases} a'^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd \cos \widehat{A} & [c'd'] \\ \quad\;\; = c'^2 + d'^2 - 2\,c'd' \cos \widehat{B} & [\,cd\,] \end{cases}$$

donc, avec $\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A}$,

$$(c.d + c'.d')\, a'^2 = (c^2 + d^2)\; c'd' + (c'^2 + d'^2)\, cd$$
$$= (cc' + dd')\,(cd' + dc')$$



Ainsi

$$a'^2 = \frac{(cc' + dd')\,(cd' + dc')}{cd + c'd'}$$

de même

$$a^2 = \frac{(cc' + dd')\,(cd + c'd')}{cd' + dc'}$$

par suite

$$\mathbf{aa' = cc' + dd'} \qquad (\mathcal{P}_1)$$

et

$$\frac{a}{a'} = \frac{cd + c'd'}{cd' + dc'} \qquad (\mathcal{P}_2)$$

Conclusion : Enoncés des **formules de Ptolémée** :

$(\mathcal{P}_1)$: Dans un quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

$(\mathcal{P}_2)$: Dans un quadrilatère convexe inscriptible, le rapport des diagonales est égal au rapport des sommes des produits des côtés aboutissant aux extrémités de cette diagonale.

P.S. : nous disons ici "côté" pour "longueur des côtés".

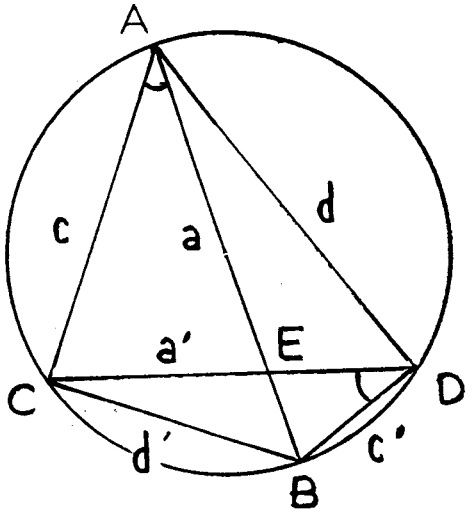
DEUXIEME DEMONSTRATION - (Egalité des angles inscrits = Similitude)

$$\widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \gamma, \quad \text{équivalant à} \quad \widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \delta$$

exprime l'inscriptibilité

$$d'^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\gamma = a'^2 + c'^2 - 2\,a'c'\cos\gamma$$

donc, éliminant $\cos\gamma$,



$$(ac - a'c')\,d'^2 = (a'^2 + c'^2)\,ac - (a^2 + c^2)\,a'c'$$

$$= (aa' - cc')(a'c - ac)$$

donc $$d'^2 = \frac{(aa' - cc')(a'c - ca')}{ac - a'c'}$$

et, de même $$d^2 = \frac{(aa' - cc')(ac - a'c')}{a'c - c'a}$$

donc

$$(dd')^2 = (aa' - cc')^2 \quad , \quad \left(\frac{d}{d'}\right)^2 = \left(\frac{ac - a'c'}{a'c - ac'}\right)^2$$

Il est nécessaire, pour supprimer les carrés, d'étudier les signes des différences

$$\Delta_1 = \mathbf{aa' - cc'} \quad , \quad \Delta_2 = \mathbf{ac' - a'c} \quad , \quad \Delta_3 = \mathbf{ac - a'c'}$$

en remarquant que, d'après la formule donnant d'^2 (ou celle qui donne d^2),

$\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3$ **est positif.**

L'étude des produits de côtés consécutifs fait songer aux surfaces des triangles. Supposons, par exemple, $c > c'$. L'égalité des angles γ, déjà utilisée, prouve similitude des triangles AEC et DEB, le rapport de similitude étant

$$\frac{AC}{DB} = \frac{c}{c'} \text{ donc} > 1$$

Les surfaces vérifient alors

$$\mathbf{S\,(EAC) > S\,(EDB)} \Rightarrow \mathbf{S\,(DAC) > S\,(DAB)} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a'c > ac'}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S\,(BCA) > S\,(BCD)} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{ac > a'c'}$$

Ainsi $c > c'$ entraîne $\Delta_2 > 0$ et $\Delta_3 > 0$, donc aussi $\Delta_1 > 0$. D'où les conclusions

$$\begin{cases} dd' = aa' - cc' \\ \dfrac{d}{d'} = \dfrac{ac - a'c'}{a'c - ac'} \end{cases} \quad , \quad \text{équivalant à} \quad \begin{cases} aa' = cc' + dd' & (\mathcal{P}_1) \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{cd + c'd'}{cd' + dc'} & (\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

TROISIEME DEMONSTRATION - (Trigonométrie. Homologie des sinus)

Dans un cercle, les sinus des angles inscrits sont proportionnels aux cordes découpées. Etudions donc ces sinus. Les angles inscrits $\gamma, \gamma_1, \delta, \delta_1$ sont tels que

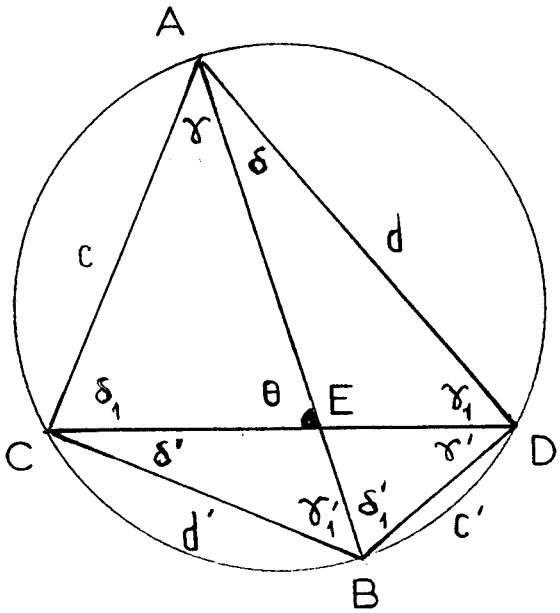
$$\gamma + \gamma_1 + \delta + \delta_1 = \pi \ , \quad \widehat{A} = \gamma + \delta \ , \quad \widehat{B} = \pi - A = \gamma_1 + \delta_1$$

$$\widehat{C} = \delta + \delta_1 \ , \quad \widehat{D} = \pi - C = \gamma + \gamma_1$$

D'où, par exemple, $\widehat{A} - \widehat{C} = \gamma - \delta_1 \ , \quad \widehat{A} + \widehat{C} = \pi + (\gamma_1 - \delta)$

Nous posons $\theta = \delta + \gamma_1 = \pi - (\gamma + \delta_1)$, angle des diagonales

1) Produits de côtés opposés



$$\begin{cases} \sin\gamma \ \sin\delta_1 = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\gamma - \delta_1) + \cos\theta\right] \\ \sin\gamma_1 \ \sin\delta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\gamma_1 - \delta) - \cos\theta\right] \end{cases}$$

donc

$$\sin\gamma \sin\delta_1 + \sin\gamma_1 \sin\delta = \frac{1}{2}\left[\cos(\gamma - \delta_1) + \cos(\gamma_1 - \delta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(A - C) + \cos(A + C)\right]$$

$$= \sin\widehat{A} \ \sin\widehat{C} \qquad (\Pi_1)$$

donc **cc' + dd' = aa'** $\quad (\mathcal{P}_1)$

2) Produits de côtés consécutifs

$$\sin\gamma \ \sin\delta + \sin\gamma_1 \sin\delta_1 = \frac{1}{2}\left[\cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma_1 - \delta_1) - \cos(\gamma_1 + \delta_1)\right]$$

mais $\cos(\gamma + \delta) = -\cos(\gamma_1 + \delta_1)$

donc $\sin\gamma \ \sin\delta + \sin\gamma_1 \sin\delta_1 = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\gamma - \delta) + \cos(\gamma_1 - \delta_1)\right]$

$$= \sin\widehat{C} \ \sin\widehat{\theta}$$

de même $\sin\gamma \sin\delta_1 + \sin\gamma_1 \ \sin\delta = \sin\widehat{A} \sin\widehat{\theta}$

donc $$\frac{\sin\gamma \ \sin\delta + \sin\gamma_1 \ \sin\delta_1}{\sin\gamma \ \sin\delta_1 + \sin\gamma_1 \ \sin\delta} = \frac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}} \qquad (\Pi_2)$$

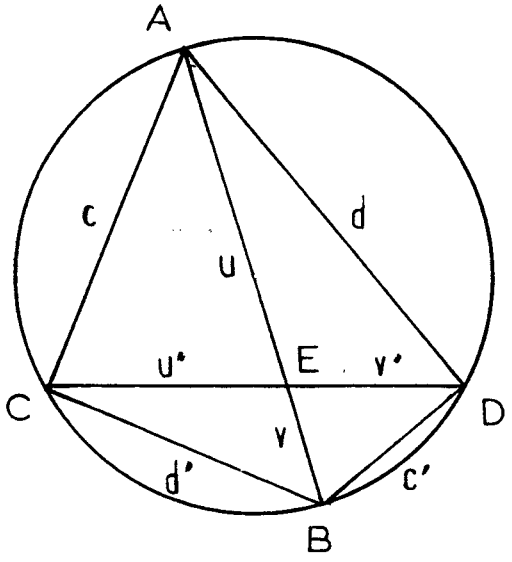
ainsi $$\frac{\mathbf{d'c' + cd}}{\mathbf{dd' + cc'}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} \qquad (\mathcal{P}_2)$$

QUATRIEME DEMONSTRATION - (Le croisillon des diagonales)

Introduisons les longueurs $\begin{cases} EA = u \ , \ CB = v \\ EC = u' \ , \ ED = v' \end{cases} \left[\begin{array}{l} (u + v = a) \\ (u' + v' = a') \end{array} \right.$

D'après la similitude des triangles

$$\begin{cases} EAC \\ EDB \end{cases} \text{ et } \begin{cases} EAD \\ ECB \end{cases} \text{ donnent } \begin{cases} \dfrac{u}{v'} = \dfrac{u'}{v} = \dfrac{c}{c'} \\ \dfrac{u}{u'} = \dfrac{v'}{v} = \dfrac{d}{d'} \end{cases}$$



1) La formule de Chasles

$u + v = a \ , \ u' + v' = a'$ donne

$$\begin{cases} a = v' \left(\dfrac{c}{c'} + \dfrac{d'}{d}\right) \quad \text{avec} \quad \dfrac{v'}{d} = \dfrac{v}{d'} \quad \text{d'où} \\ a' = v \left(\dfrac{c}{c'} + \dfrac{d}{d'}\right) \quad \dfrac{a}{a'} = \dfrac{d\,d'cd + c'd'}{d'd\,cd' + dc'} \quad \text{donc} \end{cases}$$

$$\mathbf{\frac{a}{a'} = \frac{cd + c'd'}{cd' + c'd}} \qquad (\mathcal{P}_2)$$

2) La formule de Stewart (1)

appliquée à (A,C,E,D) s'écrit $c^2 v' + d^2 u' = a' (u^2 + u' v')$

or, le premier membre peut s'écrire

$$c\,(cv') + d\,(du') = c\,(c'v') + d\,(d'u) = u.\,(cc' + dd')$$

le deuxième membre s'écrit

$$a' \left[u \left(u + \frac{u'v'}{u}\right) \right] = a'u\,(u + v) = uaa'$$

donc l'égalité s'écrit

$$\mathbf{cc' + dd' = aa'} \qquad (\mathcal{P}_1)$$

(1) Cette formule classique liant les distances mutuelles des 3 sommets d'un triangle et d'un point situé sur un de ses côtés sera étudiée en fin de la seconde partie.

4 bis: AUTRE PRESENTATION - (Les similitudes donnent)

$$(1)\ \left[\frac{u}{d}=\frac{u'}{d'}\right] \qquad (3)\ \left[\frac{v'}{d}=\frac{v}{d'}\right]$$

$$(2)\ \left[\frac{u}{c}=\frac{v'}{c'}\right] \qquad (4)\ \left[\frac{u'}{c}=\frac{v}{c'}\right]$$

Faisons apparaître les produits de côtés consécutifs en multipliant les 2 dénominateurs dans chaque égalité par un même nombre bien choisi pour obtenir une suite de rapports égaux.

Ainsi,

$$\frac{u}{dc}=\frac{u'}{d'c}$$

Nous obtenons la suite d'égalités :

$$\frac{u}{dc}=\frac{u'}{d'c}=\frac{v}{d'c'}=\frac{v'}{dc'}$$

$$(1) \qquad (2) \qquad (3)$$

Ajoutons numérateur et dénominateur convenables :

$$\frac{u+v}{dc+d'c'}=\frac{u'+v'}{cd'+c'd}\ ,\ \text{c'est-à-dire}\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{cd+c'd'}}=\frac{\mathbf{a'}}{\mathbf{cd'+c'd'}} \qquad (\mathcal{P}_2)$$

Pour $(\mathcal{P}_1)$, suivant la même idée, faisons apparaître les produits des côtés opposés.

(1) s'écrit sous la forme

$$\frac{u}{dd'}=\frac{u'}{d'^2}\ ,\ \frac{u}{cc'}=\frac{v'}{c'^2}$$

donc

$$cc'+dd'=\frac{1}{u}(c^2v'+d^2u')$$

Or, la formule de Stewart donne

$$c^2v'+d^2u' \ = \ u^2a'+u'v'a' \ = \ a'(u^2+v'u') \ = \ a'au$$

donc, en conclusion

$$\mathbf{cc'+dd'=aa'} \qquad (\mathcal{P}_1)$$

CINQUIEME DEMONSTRATION -(Un point utile)

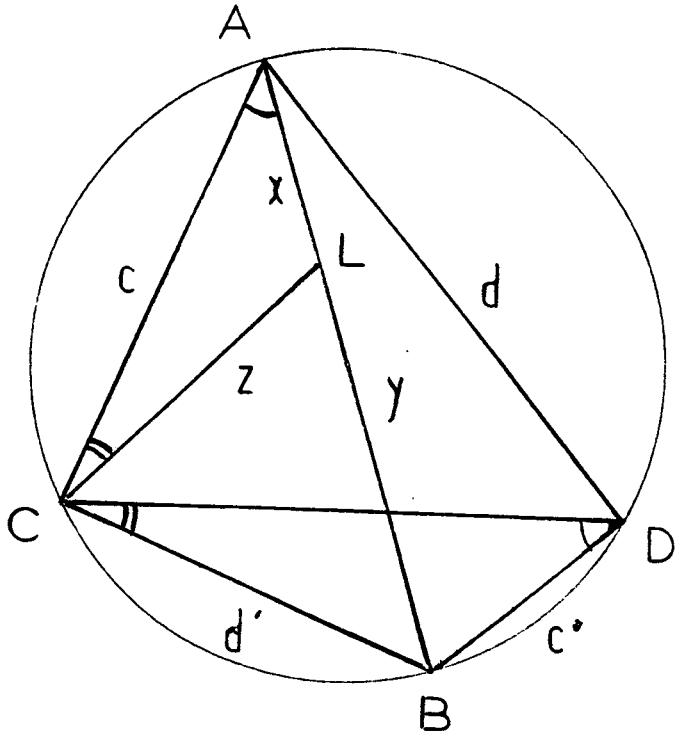
Puisque $\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{CDB}$, il existe un point L de AB, construit par $\widehat{ACL} = \widehat{DCB}$ qui assure les 2 similitudes

$$\begin{pmatrix} L,A,C \\ B,D,C \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} L,B,C \\ A,D,C \end{pmatrix}$$

Posons $AL = x$, $BL = y$, $CL = z$,

on a $\dfrac{x}{c'} = \dfrac{c}{a'} = \dfrac{z}{d'}$, $\dfrac{y}{d} = \dfrac{d'}{a'} = \dfrac{z}{c}$,

c'est-à-dire $x = \dfrac{cc'}{a'}$, $y = \dfrac{dd'}{a'}$, $z = \dfrac{cd'}{a'}$



- La formule de Chasles , $x + y = a$ donne $aa' = cc' + dd'$ $(\mathcal{P}1)$

- La formule de Stewart , donne dans ABC avec L sur AB,

$$c^2 y + d'^2 x = a (z^2 + xy)$$

donc $a' [c^2 dd' + d'^2 cc'] = a [c^2 d'^2 + cc'dd']$

donc $a' (cd + c'd') = a (cd' + dc')$

C'est-à-dire $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{cd + c'd'}{cd' + dc'}$ $(\mathcal{P}_2)$

SIXIEME DEMONSTRATION - (une droite utile)

Puisque $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires, toute droite X'X telle que

(BA, X') = (CB, CA) , assure aussi (BA, X) = (DB, DA)

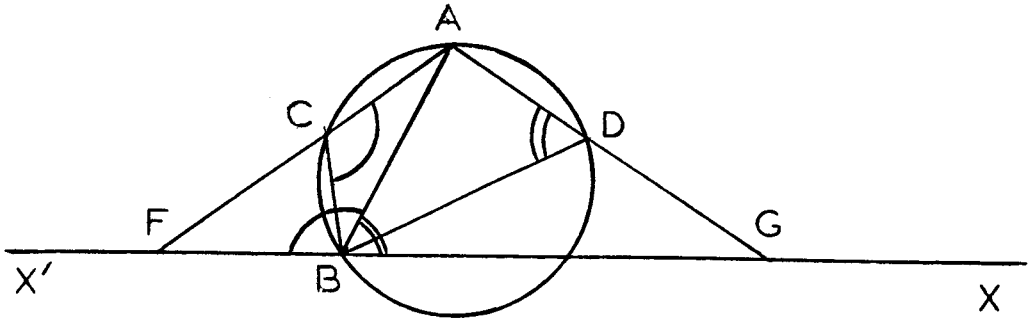
Menons cette droite X'X par B . Elle coupe respectivement les droites AC et AD en F et G , formant 2 couples de triangles semblables

$$\begin{cases} A,B,F \\ A,C,B \end{cases} : \left\{ \frac{a}{c} = \frac{AF}{a} = \frac{BF}{d'} \right\} \quad \begin{cases} A,B,G \\ A,D,B \end{cases} : \left\{ \frac{a}{d} = \frac{AG}{a} = \frac{BG}{c'} \right\} \Rightarrow \begin{cases} AF = \frac{a^2}{c}, BF = \frac{ad'}{c} \\ AG = \frac{a^2}{d}, BG = \frac{ac'}{d} \end{cases}$$

donc $\frac{AG}{AF} = \frac{AD}{AF} = \frac{d}{c}$

d'où la similitude des triangles

$$\begin{matrix} A,F,G \\ A,D,C \end{matrix} : \frac{AF}{d} = \frac{AG}{a} = \frac{FG}{a'} \qquad \text{donc} \qquad FG = \frac{a^2 a'}{ad}$$



- La formule de Chasles donne

$$FG = BF + BG \Rightarrow \frac{a^2 d'}{cd} = \frac{ad'}{c} + \frac{ac'}{d}$$

d'où $aa' = cc' + dd'$ $\quad (\mathcal{P}_1)$

- La formule de Stewart

$$AF^2 . BG + AG^2 . BF = (AB^2 + BG . BF) . FG$$

donne $\frac{a^5 (cc' + dd')}{c^2 d^2} = \frac{a^6 a'}{cd} + \frac{a^4 a'c'd'}{c^2 d^2}$ donc $a (cd' + dc') = a' (cd + c'd')$

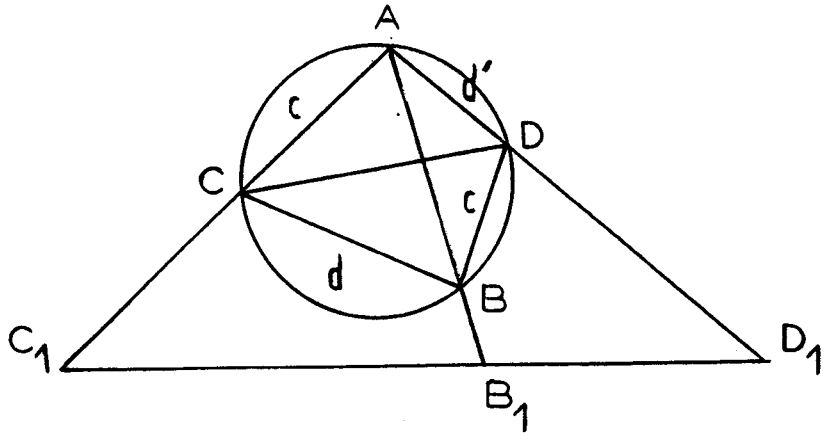
c'est-à-dire $\frac{a}{a'} = \frac{cd + c'd'}{cd' + dc'}$ $\quad (\mathcal{P}_2)$

-

SEPTIEME DEMONSTRATION - (inversion)

L'inversion est la transformation ponctuelle qui, étant choisi un pôle (ici, A) et une puissance p (ici positive), transforme tout point M en M_1 sur la demi-droite $\overrightarrow{AM}$ à la distance $AM_1 = \frac{p}{AM}$ Transformons les points C, B, D en C_1, B_1, D_1

$$AB_1 = \frac{p}{a}\ ,\quad AC_1 = \frac{p}{c}\ ,\quad AD_1 = \frac{p}{d}$$



La figure présente 3 couples de triangles semblables

$$\begin{pmatrix} A, C, B \\ A, B_1, C_1 \end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix} A, D, B \\ A, B_1, D_1 \end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix} A, C, D \\ A, D_1, C_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{c}{AB_1} = \frac{a}{AC_1} = \frac{d'}{B_1C_1}\ ,\quad \frac{d}{AB_1} = \frac{a}{AD_1} = \frac{c}{B_1D_1}\ ,\quad \frac{c}{AD_1} = \frac{d}{AC_1} = \frac{a'}{C_1D_1}$$

donc $(\mathcal{K})$ $\mathbf{B_1\,C_1 = p\,\frac{d'}{ac}\ ,\ B_1\,D_1 = p\frac{c'}{ad}\ ,\ C_1\,D_1 = p\frac{a'}{cd}}$

- La **formule de Chasles**

$$B_1\,C_1 + B_1\,D_1 = C_1\,D_1 \qquad \text{donne} \qquad cc' + dd' = aa' \quad (\mathcal{P}_1)$$

- La **formule de Stewart**

$$AC_1^2 \,.\, B_1\,D_1 + A\,D_1^2 \,.\, B_1\,C_1 = AB_1^2 \,.\, C_1\,D_1 + B_1\,D_1 \,.\, B_1\,C_1 \,.\, C_1\,D_1$$

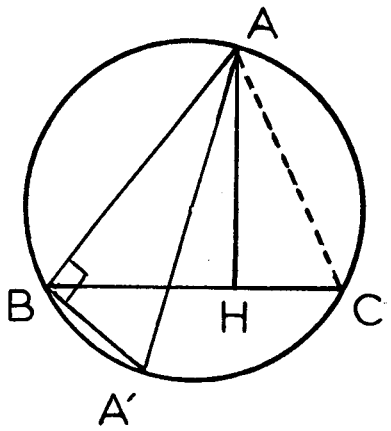
donne $$p^3\left[\frac{c'}{c^2ad} + \frac{d'}{d^2ac}\right] = p^3\left[\frac{a'}{a^2cd} + \frac{a'c'd'}{a^2c^2d^2}\right]$$

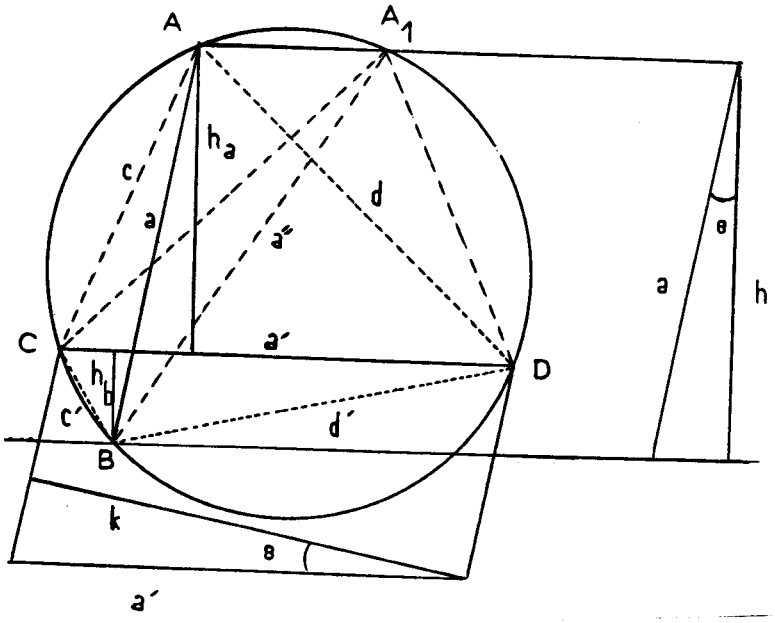
donc $$\frac{c}{c'} + \frac{d}{d'} = \frac{a'}{a} + \frac{a'c'd'}{acd} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{a'}{a} = \frac{cd + c'd'}{cd' + dc'} \qquad (\mathcal{P}_2)$$

HUITIEME DEMONSTRATION - (Hauteurs. Appel à (Q_1), (Q_2), (Q_3))

Préliminaire : Dans tout triangle, le produit de 2 côtés est égal au produit de la hauteur relative au 3ème côté par le diamètre du cercle circonscrit. En effet, avec les notations usuelles, si A' est diamétralement opposé à A , les triangles

$$\left|\begin{array}{l} ACH \\ AA'B \end{array}\right. \quad \text{sont semblables} \quad \frac{2R}{b} = \frac{c}{h_a} \quad \text{donc} \quad 2R\, h_a = bc \qquad (1)$$





Application

1) Pour mettre en évidence les hauteurs des triangles ACD et BCD , traçons les parallèles à la diagonale CD par les points A et B.

Les deux hauteurs h_a et h_b vérifient

$$\left.\begin{array}{l} 2R\, h_a = cd \\ 2R\, h_b = c'd' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{2R\, h = cd + c'd'} \qquad (2)$$

De même, en nommant k la distance des parallèles menées de C et D à AB ,

$$\mathbf{2R\, k = cd' + dc'} \qquad (2')$$

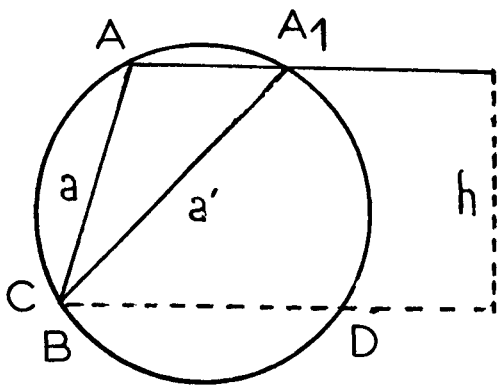
donc $\dfrac{h}{k} = \dfrac{cd + c'd'}{cd' + dc'}$. Or $\sin\theta = \dfrac{h}{a} = \dfrac{k}{a'}$, donc $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{cd + c'd'}{cd' + dc'}$ $\qquad (\mathcal{P}_2)$

2) Pour introduire cc' et dd' , échangeons c et d sans changer c' et d' : Le point A devient A_1 et a = AB devient a" = A_1B ; h est conservé. La formule **(1)** donne

aa" = 2R h donc, d'après **(2)** **aa" = cd + c'd'** **(3)**

et $(\mathcal{P}_2)$, appliquée au quadrilatère A_1CBD donne

$\dfrac{a''}{a'} = \dfrac{cd + c'd'}{dd' + cc'}$ donc **aa' = cc' + dd'** $(\mathcal{P}_1)$

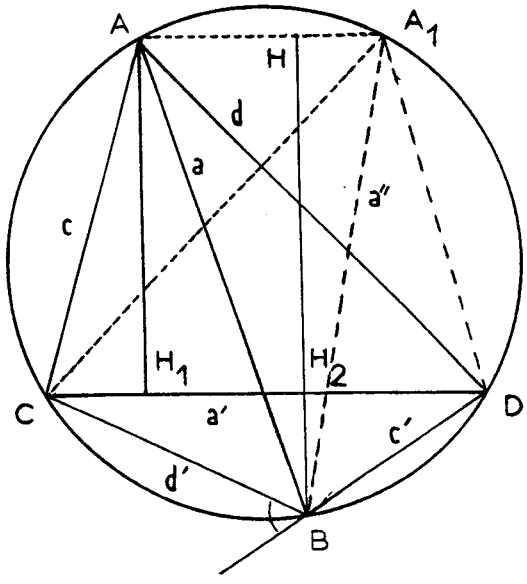


NEUVIEME DEMONSTRATION - (des aires)

Un quadrilatère

$$(Q_1) \quad (C, A, D, B) \quad \left| \begin{array}{l} AC = c,\ AD = d,\ AB = a \\ DB = c',\ BC = d',\ CD = a' \end{array} \right|$$

convexe est inscrit dans un cercle. On lui adjoint (Q_2) (C, A1 , D, B) inscrit dans c cercle, avec AA1 // CD; c'est dire qu'on intervertit c et d. On pose $BA_1 = a''$



1] Les triangles (CAD) et (DA_1C) sont égaux. Donc Q_1 et Q_2 ont même aire $\mathcal{A}$ qui s'exprime par

$$2\mathcal{A} = (cd + c'd') \sin \widehat{CAD} + (cd' + dc') \sin \widehat{ADB} = (cc' + dd') \sin \widehat{A_1DB} \qquad \textbf{(I)}$$

Mais, dans un cercle, les sinus des angles inscrits sont proportionnels a cordes sous-tendues, donc

$$(cd + c'd')\, a' = (cd' + dc')\, a = (cc' + dd')\, a''$$

donc, pour Q_1 $\quad \dfrac{a'}{a} = \dfrac{cd' + dc'}{cd + c'd'} \qquad (\mathcal{P}_2)$

2] Evaluons les aires en considérant les hauteurs AH_1 pour (CAD) BH_2 pour (CB BH pour (ABA_1)

$$2\mathcal{A} = a'(AH_1 + BH_2) = a'\,BH$$

or $\quad BH = a \sin(\widehat{A_1AB}) = a \sin(\widehat{A_1DB})$

donc $\quad \mathbf{2\mathcal{A} = aa' \sin(\widehat{ADB})} \qquad \textbf{(II)}$

(I) et **(II)** donnent $\quad \mathbf{cc' + dd' = aa'} \qquad (\mathcal{P}_1)$

DIXIEME DEMONSTRATION - (dans le plan complexe)

a) Préliminaire Considérons les vecteurs de la figure comme images de nombres complexes, l'axe réel X étant quelconque.

Notation

vecteur	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DC}$
nombre complexe	p	p'	q	q'	r	r'

$$\left\{\begin{array}{l} r = p - q' = q + p' \\ r' = p - q = p' + q' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ r\,r' = (p-q')\,(p'+q') = p\,p' + q'\,(p - p' - q') \right\}$$

c'est-à-dire $\quad \mathbf{r\,r' = p\,p' + q\,q'} \qquad (\Pi_1)$

et $\quad p\,q + p'q' = p\,(r - p') + p'\,(p - r) = (p - p')\,r$

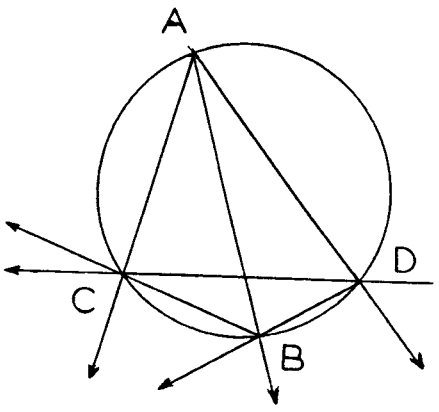
$\quad p\,q' + q\,p' = p\,(r' - p') + p'\,(p - r') = (p - p')\,r'$

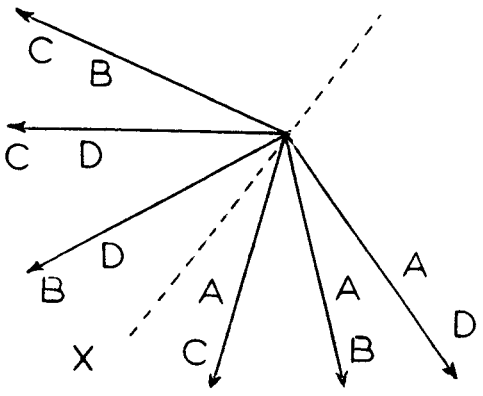
donc $\quad \dfrac{r}{r'} = \dfrac{p\,q + p'q'}{p\,q' + q\,p'} \qquad (\Pi_2)$

Ces 2 formules sont générales pour tout quadrilatère.

b) condition d'inscriptibilité. Les 3 couples de vecteurs

$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \;|\; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \;|\; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \;|$$





ont même direction de bissectrice X. En effet

$$\left[(X, \overrightarrow{AC}) = -(X, \overrightarrow{DB})\right] \Leftrightarrow \left[(X, \overrightarrow{AB}) = -(X, \overrightarrow{DC})\right]$$

puisque $\quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB})$

et, de même, $\quad (X, \overrightarrow{AD}) = -(X, \overrightarrow{BC})$

c) <u>Conséquence</u> Prenons X comme axe des réels dans le plan complexe, et évaluons les arguments des produits qui interviennent.

1) <u>Pour</u> $(\mathcal{P}_1)$ les produits pp' , qq' et r r' sont réels donc égaux à leurs modules, d'où

$$\mathbf{AB \,.\, CD = AC \,.\, BD + BC \,.\, AD} \qquad (\mathcal{P}_1)$$

2) <u>Pour</u> $(\mathcal{P}_2)$

$$\text{Arg}\,(p.q) = (\vec{X}, \overrightarrow{AC}) + (\vec{X}, \overrightarrow{AD}) = (\vec{X}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{X}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Arg}\,(p'.q') = (\vec{X}, \overrightarrow{DB}) + (\vec{X}, \overrightarrow{BC}) = (\vec{X}, \overrightarrow{DB}) - (\vec{X}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB})$$

arguments égaux, donc le module de pq + p'q' est la somme des modules

$$|\, pq + p'q' \,| = AC \,.\, AD + BC.\, BD$$

de même $|\, p\,q' + q\,p' \,| = AC \,.\, BC + AB \,.\, DB$

donc (Π_2) donne

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CD}} = \frac{\mathbf{AC.AD + BC.BD}}{\mathbf{AC.BC + AD.BD}} \qquad (\mathcal{P}_2)$$

C'est-à-dire, avec les notations utilisées

$$\mathbf{aa' = cc' + dd'} \quad , \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a'}} = \frac{\mathbf{cd + c'd'}}{\mathbf{cd' + dc'}}$$

Deuxième partie
Réflexions sur les démonstrations précédentes : Réciproques – Discussions de méthodes

I – Préliminaires

1 – Rappel de quelques définitions et notations

(Nous prenons les exemples dans l'étude en question)

1) Une **situation** est précisée (ex. 5) : géométrie euclidienne plane, Relations métriques dans les quadrilatères convexes inscriptibles

Nous disposons d'un référentiel (W) : ensemble des notions acquises : Ensemble d'axiomes, de notions, de théorèmes démontrés suivant une logique connue. Il a fallu préciser les dénominations, un vocabulaire, des notations et écritures choisies. Toutefois il reste une certaine liberté de choix suivant les circonstances. Ici (W) nous renseigne sur l'ensemble (Q) des quadrilatères Q convexes. L'écriture $Q \in (Q)$ peut être sous entendue.

Pour un quadrilatère Q, l'inscriptibilité (i) peut être « vraie » ou « fausse », à l'exclusion des nuances « parfois », en général, « peut être »...

2) L'assertion « Q est inscriptible » sera notée i(Q) ou simplement $\boldsymbol{i}$ si Q est sous-entendu. Au point de vue ensembliste on écrira $Q \in (\boldsymbol{i})$

La négation de (i) : « Q est non inscriptible sera notée $(\tilde{\boldsymbol{i}})$

Les quantificateurs, s'il y a lieu, seront notés

- « Tout quadrilatère Q est inscriptible » : $\forall Q, Q \in (\boldsymbol{i})$
- « Il existe un quadrilatère inscriptible » : $\exists\, Q, Q \in (\boldsymbol{i})$

Autre exemple d'assertion : Il s'agit des quadrilatères Q de côtés c,d,c',d', de diagonales a et a' et d'une assertion relative à un polynôme (P) donné.

L'assertion « Pour Q, (P) = 0 est vrai » sera notée (P)(Q), ou si Q est sous entendu, (P) ou, au point de vue ensembliste, $Q \in (P)$

Remarque : par abus de langage, un segment, sa longueur et la mesure de cette longueur sont très souvent désignés par la même lettre a , x_1 ... ou toute autre lettre minuscule. Même, écrire AB signifie, suivant le contexte, un segment, une longueur, un nombre attaché à la paire (A,B) de points.

3) **Une inférence** est une assertion au sujet de deux assertions, du type "Si $(\mathcal{A})$, **alors** $(\mathcal{B})$" noté $\left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B})\right]$

EXEMPLE : la négation. Notre logique à 2 valeurs associe à toute assertion $(\mathcal{A})$ sa négation $(\mathit{non}\ \mathcal{A})$ que nous noterons $(\widehat{\mathcal{A}})$

Le signe de négation suit la **règle de double négation** :

" (non $(\mathit{non}\ \mathcal{A})$) est synonyme de $(\mathcal{A})$".

ce qui s'écrit sous forme d'inférence

$$\text{"Si } \left[(\mathcal{B}) = (\widetilde{\mathcal{A}})\right] \text{, alors } \left[(\widetilde{\mathcal{B}}) = (\mathcal{A})\right] \text{"}$$

Comme $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$ jouent le même rôle, il y a **équivalence logique**

$$\left[(\mathcal{B}) = (\widetilde{\mathcal{A}})\right] \Leftrightarrow \left[(\widetilde{\mathcal{B}}) = (\mathcal{A})\right]$$

- Un **théorème** d'une théorie est une inférence entre deux assertions et leurs négations : avec $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{B})$, $(\widetilde{\mathcal{A}})$, $(\widetilde{\mathcal{B}})$, 8 énoncés de théorèmes sont à considérer.

-Une **démonstration des théorèmes** d'une théorie est soumise à des règles logiques, en particulier, la **règle de non contradiction** que nous énonçons

$$(\mathcal{T}h) : \left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B})\right] \quad \textbf{exclut} \quad \left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\widetilde{\mathcal{B}})\right]$$

- La **transitivité de l'inférence** impose

$$\left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B})\right] \quad \textbf{exclut} \quad \left[(\widetilde{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\mathcal{A})\right]$$

(puisque avec $(\mathcal{T}h)$ on aurait $\left[(\widetilde{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\mathcal{B})\right]$ qui est **absurde**).

Par suite

$$(\mathcal{Th}) : \left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B})\right] \quad \textbf{assure} \quad (\mathcal{Th}') \left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\widetilde{\mathcal{A}})\right]$$

mais, de même, d'après la double négation,

$$(\mathcal{Th}') \text{ assure } (\mathcal{Th})$$

Ainsi, les 2 assertions $(\mathcal{Th})$ et $(\mathcal{Th}')$ sont **équivalentes**. Ce sont **deux énoncés contraposés** du même fait logique.

Finalement les 4 énoncés possibles sont les expressions de 2 théorèmes :

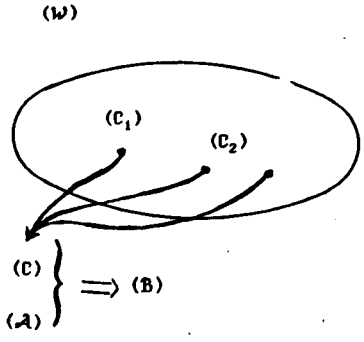
l'un sera considéré comme **théorème direct**, par exemple

$$\left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B})\right] \quad \textbf{équivalant à} \quad \left[(\widetilde{\mathcal{B}}) \Rightarrow (\widetilde{\mathcal{A}})\right]$$

l'autre comme **théorème réciproque**

$$\left[(\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A})\right] \quad \textbf{équivalant à} \quad \left[(\widetilde{\mathcal{A}}) \Rightarrow (\widetilde{\mathcal{B}})\right]$$

Remarque - Une assertion est, en réalité, réunion de plusieurs assertions. C'est nécessairement conséquence du vocabulaire. Par exemple, le mot "carré" contient plus d'assertions que le mot "rectangle". Ainsi, une hypothèse est toujours complexe. En outre, la démonstration exige le recours à des énoncés du référentiel (W). Ainsi le schéma d'un **théorème** est, par exemple :



Il s'agit d'un quadrilatère Q de diagonales AB et CD se coupant en E.

$$(\mathcal{A}) \begin{Bmatrix} AB = CD \\ AE = EB \\ CE = ED \end{Bmatrix} \Rightarrow \left[\widehat{CAD} = 1 \text{ droit}\right]$$

et la démonstration de type $(\mathcal{D}_1)$

Noter que

$$(\mathcal{A}) \Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{B}_1) \\ (\mathcal{B}_2) \end{cases} \quad \text{signifie} \quad \left[\left[(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B}_1) \text{ et } (\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B}_2)\right.\right.$$

(2 théorèmes)

4) Réciproques

Supposons qu'une "étude directe" a démontré le **théorème direct**

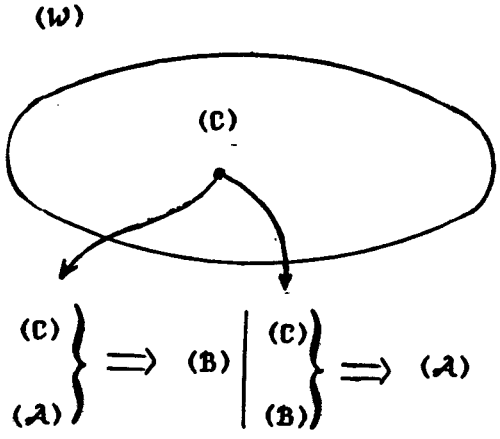
$$(\mathfrak{th}) \qquad [(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B})]$$

L'étude réciproque cherche à démontrer le **théorème réciproque**

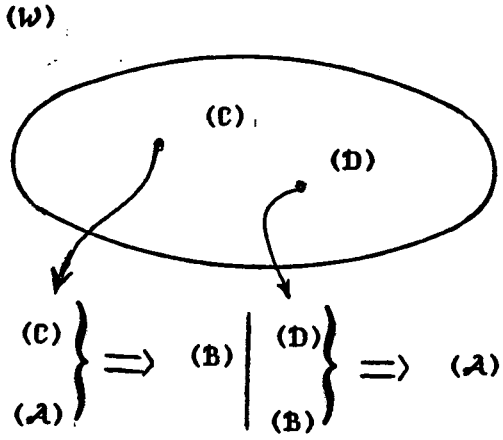
$$(\mathfrak{thr}) \qquad [(\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A})],$$

ce qui est vrai ou non.

La démonstration peut suivre plusieurs schémas. Les plus simples sont les suivants :



Réciproque par marche inverse



La réciproque fait appel à une autre assertion de $(\mathcal{W})$

5) L'étude est-elle complète après l'étude de la réciproque ? En général, **non** même si, réciproque démontrée, on a conclu à l'équivalence $(\mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{B})$.

Que dire alors en cas contraire $(\widetilde{\mathcal{A}})$? . Certes, on sait que $(\mathcal{B})$ est faux, mais r peut-on compléter cette réponse purement négative ?

Par exemple

" M vérifie f(M) = 0 " , équivaut à " M $\notin$ (C) ".

Mais que vérifie-t-il s'il n'appartient pas à la courbe (C) ? Qu'est-ce qui disting les régions déterminées par (C) ?

Nous nous efforcerons d'obtenir des études complètes.

B - L'objet de notre étude

La première partie nous permet de réfléchir à l'ensemble de la situation à éclaircir. Elle a fait apparaître, au cours de l'étude des côtés c,c',d,d' des quadrilatères convexes inscriptibles, les sommes

$$S_1 = cc' + dd', \quad S_2 = cd' + dc', \quad S_3 = cd + c'd'$$

qui apparaissent constamment (transformées dans la 2ème démonstration en

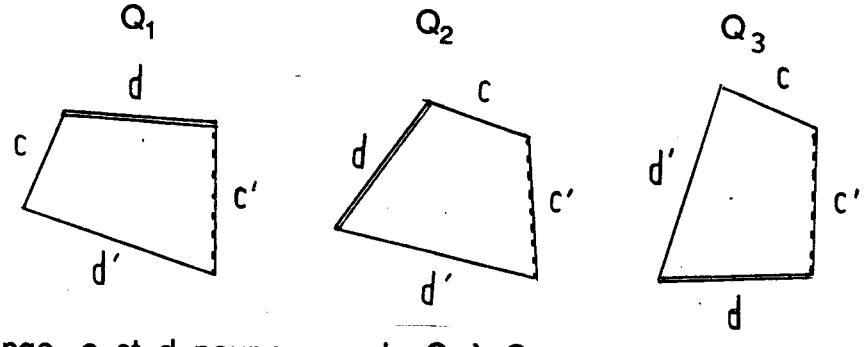
$$\Delta_1 = aa' - cc', \quad \Delta_2 = ac' - a'c, \quad \Delta_3 = ac - c'a'$$

qui détruisent la symétrie).

Les sommes S_1, S_2, S_3, correspondent **aux 3 ordres cycliques de 4 éléments**, ordres non orientés :

... d', | c,d,c',d' | c ... | ... d',d,c,c',d' | d ...| ... c'| c,d',d,c' | c ...

donc, aux types de quadrilatères convexes



On échange c et d pour passer de Q_1 à Q_2, c et d' pour passer de Q_1 à Q_3. Chaque cycle correspond à une infinité de quadrilatères dite **"quadrilatère articulé"**. Les 4 côtés ayant des longueurs données, un quadrilatère de type donné est déterminé par une donnée supplémentaire : longueur d'une diagonale, un angle, une aire ...

La **convexité** entraîne entre les angles de tout quadrilatère la relation :
la somme de 4 angles vaut 2π.

Remarque - On ne restreint pas la généralité de l'étude par certaines **conventions de notation**, telles que

$$\widehat{C} \leq \widehat{D} \quad \text{ou bien} \quad c > c' \text{ avec } d > d',$$

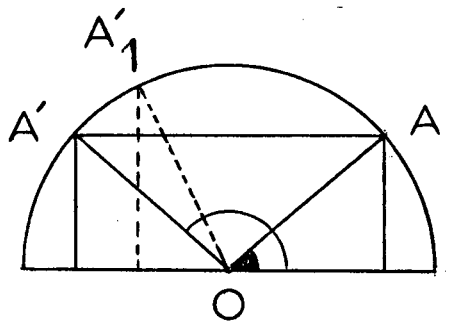
$$\text{ou bien} \quad \widehat{A} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ou bien} \quad \widehat{A} + \widehat{B} \leq \pi \ldots,$$

ceci pour Q_1 du premier type que nous considérons au départ.

II - EXAMEN DES DIVERSES DEMONSTRATIONS EXPOSEES DANS LA PREMIERE PARTIE ET DES RECIPROQUES ASSOCIEES

SUR LA PREMIERE DEMONSTRATION

On a choisi dans $(\mathcal{W})$ une formule connue entre les côtés et un angle d'un triangle. Malgré l'emploi d'un cosinus, la **méthode n'appartient pas à la trigonométrie**, car nous n'utilisons le cosinus que pour abréger l'énoncé purement de géométrie métrique : "Le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des autres côtés, moins ou plus le double produit d'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui" - "Moins" si l'angle est aigu, "plus" s'il est obtus. (On voit la commodité de l'emploi du "cosinus" qui unifie l'énoncé quel que soit l'angle).



De plus, pour des angles saillants $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$,

$$\left[\widehat{A}+\widehat{B}=\pi\right] \Leftrightarrow \left[\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}=0\right]$$

et $$\left[\widehat{A}+\widehat{B}<\pi\right] \Leftrightarrow \left[\cos\widehat{A}+\cos\widehat{B}>0\right]$$

ce qui apparaît clairement sur la figure.

Schéma de la démonstration

Posons $S_1 = cc' + dd'$ $\quad S_2 = cd' + dc'$ $\quad S_3 = cd + c'd'$

$$(\mathcal{I}) \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}=\pi \begin{cases} \text{e} & a'^2 = \dfrac{S_1 S_2}{S_3} \\ \text{p} & a^2 = \dfrac{S_1 S_3}{S_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aa' = S_1 & (\mathcal{P}_1) \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{S_3}{S_2} & (\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

a) La réciproque $\begin{Bmatrix} \mathcal{P}_1 \\ \mathcal{P}_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow (\mathcal{I})$ se démontre en inversant la démarche directe.

b) Les réciproques $(\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{I})$ et $(\mathcal{P}_2) \Rightarrow (\mathcal{I})$ peuvent être étudiées sous les formes contraposées, comme conséquence de la non-inscriptibilité $(\tilde{\mathcal{I}})$

$$(\tilde{\mathcal{I}}) \Rightarrow \left[\widehat{A}+\widehat{B}\neq\pi\right]$$

Supposons pour la suite

$$(\mathbf{k}) \quad \hat{A}+\hat{B} \geq \pi, \quad \text{donc } \hat{C}+\hat{D} \leq \pi \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\hat{A}+\cos\hat{B} \leq 0 \\ \cos\hat{C}+\cos\hat{D} \geq 0 \end{cases}$$

L'égalité correspond à l'inscriptibilité.

Or, le calcul donne :

$$\begin{cases} 2\,cd\ c'd'(\cos\hat{A}+\cos\hat{B}) = -S_3 a'^2 + S_1 S_2 \leq 0 \\ 2\,cd\ c'd'(\cos\hat{C}+\cos\hat{D}) = -S_2 a^2 + S_1 S_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi $\left[a'^2 \geq S_1 \frac{S_2}{S_3}\right] \Leftrightarrow \left[a^2 \leq S_1 \frac{S_2}{S_3}\right]$, l'égalité caractérisant l'inscriptibilité.

Il en résulte, comme conséquence de **(k)**,

$$\mathbf{a'\ S_3 \geq a\ S_2}$$

Ainsi $(\mathcal{I}) \Rightarrow (\mathcal{P}_2)$, c'est-à-dire $(\mathcal{I}) \Leftrightarrow (\mathbf{aS_3 + a'S_2})$

et la non inscriptibilité est caractérisée par $i = aS_2 = a'S_3$ si **a** est la diagonale joint les sommets des angles dont la somme est **supérieure à** π.

Etude de $(\mathcal{P}_1)$

1) On vérifie l'identité algébrique

$$(\mathcal{J}) \quad \left(a^2 - \frac{S_1 S_3}{S_2}\right)\left(a'^2 - \frac{S_1 S_2}{S_3}\right) \equiv (aa' - S_1)^2 - \frac{S_1}{S_2 S_3}\left(aS_2 - a'S_3\right)^2$$

Nous avons vu que le 1er membre est négatif ou nul, donc

$$[\,a\,S_2 - a'\,S_3 = 0\,] \Rightarrow [\,aa' - S_1 = 0\,]$$

Ainsi

$$(\mathcal{I}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_2) \Rightarrow (\mathcal{P}_1)$$

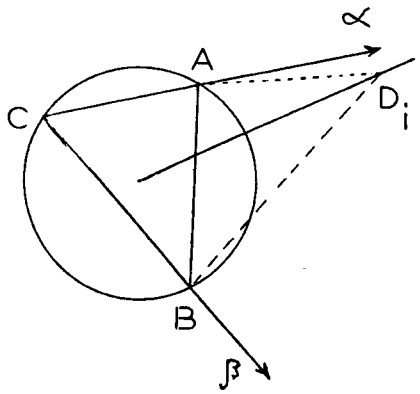
(cas où toutes les parentèses de $(\mathcal{J})$ sont nulles).

2) Examinons les conséquences de $(\mathcal{P}_1)$,

c'est-à-dire de $p = aa' - (cc' + dd') = 0$ et plus généralement le signe de p.

Un angle au moins du quadrilatère convexe est aigu, soit $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$

Le 4ème sommet D du quadrilatère convexe ACBD est intérieur à $(\alpha AB\beta)$.

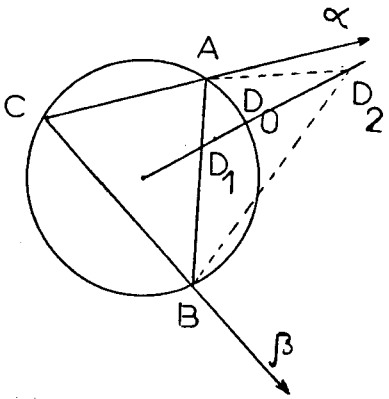


Pour un point D_i, nous posons

$$AD_i = d_i \ , \quad BC_i = c'_i \ , \quad CD_i = a'_i$$

Soit D_o un point de l'arc AB du cercle (ABC) de centre O, de rayon r. Si l'on prend sur un rayon OD_o deux points D_1 et D_2 associés par $OD_1 \cdot OD_2 = r^2$, un théorème (que nous puisons dans $(\mathcal{W})$ exprime que **le lieu des points M tels que** $\frac{MD_2}{MD_1} = \frac{D_oD_2}{D_oD_1}$

est le cercle de centre O passant par D_o, donc le cercle (ABC). Ainsi, par suite de l'homogénéité en a',c',d de $p = aa' - (cc' + dd')$,

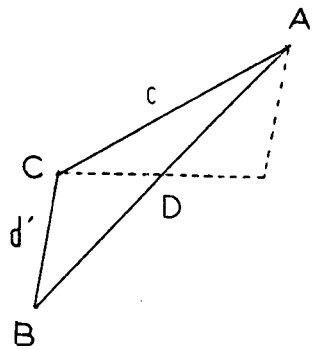


de $\frac{a'_2}{a'_1} = \frac{c'_2}{c'_1} \frac{d'_2}{d'_1} = k \qquad \left(k = \frac{D_oD_2}{D_oD_1} > 0\right)$

on déduit $p_2 = k\, p_1$.

Ainsi **p_2 et p_1 sont de même signe**... s'ils ne sont pas nuls. (On précise même que, si D_1 est intérieur au cercle, k est supérieur à 1, donc $p_2 > p_1$... par suite non nul !).

Mais il reste toujours à démontrer que $(\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{J})$.



Si c'est exact, p_1 et p_2 ne sont pas nuls quand D_1 et D_2 ne sont pas sur le cercle et, par continuité, une seule position de D suffit pour déterminer le signe de p.

Par exemple, prenons D au milieu de AB,

donc $d = c' = \frac{a}{2}$ alors $p = \frac{a}{2}\left[2a' - (c + d')\right] < 0$

Ainsi, s'il est vrai que $(\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{J})$, un quadrilatère convexe non inscriptible vérifie $aa' < cc' + dd'$.

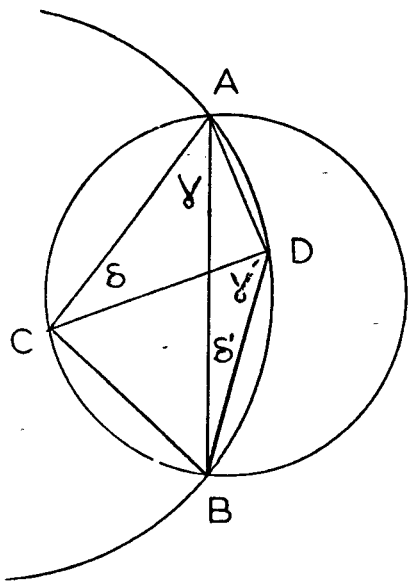
Nous verrons plus loin des démonstrations de $(\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{J})$. Mais la réciproque en question n'est toujours par démontrée.Il faudra puiser dans $(\mathcal{W})$!

SUR LA DEUXIEME DEMONSTRATION

L'inscriptibilité est exprimée par l'égalité de 2 angles inscrits, ce qui donne un rôle spécial à une des paires de côtés opposés (d,d') alors que (c,c') est traité comme (a,a').

Il en résulte qu'au lieu des sommes S_1, S_2, S_3, apparaissent des différences.

$$\Delta_1 = aa' - cc' , \qquad \Delta_2 = ac' - ca' , \qquad \Delta_3 = ac - a'c'$$



Pour étudier la réciproque, reprenons le calcul sans l'hypothèse d'inscriptibilité.

$\widehat{CAB} = \gamma$, $\widehat{COB} = \gamma'$

Par exemple $\gamma < \gamma'$ donc $\delta > \delta'$

$\widehat{ACD} = \delta$, $\widehat{ABD} = \delta'$

c'est-à-dire

$$\cos\gamma > \cos\gamma' \quad , \quad \cos\delta < \cos\delta'$$

$d'^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma = a'^2 + c'^2 - 2\,a'c'\cos\gamma'$

donne

$2\,dca'c'(\cos\gamma - \cos\gamma') = (d'^2\,\Delta_3 + \Delta_1\Delta_2) > 0$

$2\,aca'c'(\cos\delta - \cos\delta') = -(d'^2\,\Delta_3 + \Delta_1\Delta_3) > 0$

On ne peut poursuivre sans l'étude des signes de Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Dans la démonstration directe, cette étude a été faite au moyen d'une similitude conséquence de l'inscriptibilité. On est désarmé sans cette hypothèse. La méthode valable pour le théorème direct ne conduit pas à une démonstration des réciproques.

On notera comment une méthode, qui rompt la symétrie des rôles des éléments complique profondément l'étude en cachant la structure symétrique du problème.

SUR LA TROISIEME DEMONSTRATION

La méthode est très naturelle pour qui connaît la trigonométrie. Elle permettra l'étude des relations métriques en question. Les formules fondamentales de la trigonométrie, "formules d'addition" sont du second degré en cosinus et sinus.
Les rôles symétriques des côtés font naturellement étudier les produits

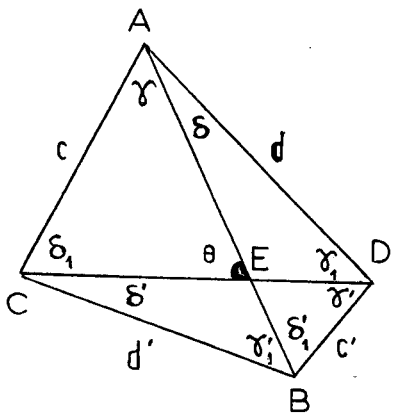
cc' et dd' ; cd et c'd' ; cd' et dc';

donc [$\sin\gamma_1 \sin\delta_1$ et $\sin\gamma \sin\delta_1$] ; [$\sin\gamma \sin\delta$ et $\sin\gamma' \sin\delta'$] ;

et [$\sin\gamma \sin\delta_1$ et $\sin\gamma_1 \sin\delta_1$] .

D'où la solution donnée, très naturelle bien qu'elle semble être une vérification.
(On remarquera la souplesse des calculs trigonométriques par opposition à la rigidité des calculs algébriques. Encore faut-il de l'expérience pour bien les diriger! Ceci est particulièrement sensible dans l'étude des réciproques).

Réciproques - L'hypothèse est l'ensemble des relations :



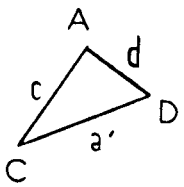
$$\begin{cases} cc' = dd' = aa' & (\mathcal{P}_1) \\ \dfrac{cd + c'd'}{cc' + dd'} = \dfrac{a}{a'} & (\mathcal{P}_2) \end{cases}$$

Comment s'inspirer de la démonstration directe ?
8 angles interviennent sans compter
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ liés par $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 2\pi$

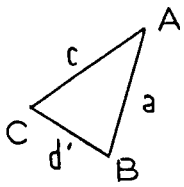
$\theta = \delta + \gamma_1 = \delta' + \gamma'_1$ $\quad \hat{A} = \gamma + \delta$ $\quad \hat{B} = \gamma'_1 + \delta'_1$

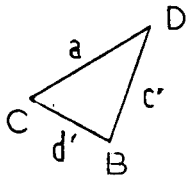
$\pi - \theta = \gamma + \delta_1 = \gamma' + \delta'_1$ $\quad \hat{C} = \delta_1 + \delta'$ $\quad \hat{D} = \gamma_1 + \delta'$

Les 4 côtés c,d,c',d' sont liés aux diagonales a,a', par

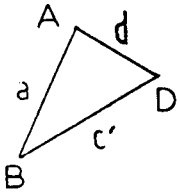


$$\frac{a'}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\gamma'} = \frac{d}{\sin\delta_1} \qquad \frac{a}{\sin\hat{C}} = \frac{c}{\sin\gamma_1} = \frac{d'}{\sin\gamma}$$





$$\frac{a'}{\sin\hat{B}} = \frac{c'}{\sin\delta'} = \frac{d'}{\sin\gamma'} \qquad \frac{a}{\sin\hat{D}} = \frac{c'}{\sin\delta} = \frac{d}{\sin\delta'_1}$$



Chacune des relations $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, $\gamma_1 = \gamma'_1$, $\delta_1 = \delta'_1$, suffit à exprimer l'inscriptibilité et en déduire $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$. Il faut donc démontrer l'une d'elles, mais ce qui précède ne nous guide pas.

On peut, **de diverses manières**, exprimer dans le cas général

$$x = \frac{cc' + dd'}{a\,a'} \quad \text{et} \quad y = \frac{a\,(dd' + cc')}{a'\,(cd + c'd')}$$

en fonction des angles.

Quelle voie suivre pour étudier les signes de x et y et au moins voir que

$$x = 1 \quad \text{et} \quad y = 1]$$

entraîne l'une des conditions qui exprime l'inscriptibilité ?
Nous abandonnons ces calculs, ayant seulement démontré:

$$\begin{tikzcd} & (\mathcal{P}_1) \\ (\mathcal{I}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & (\mathcal{P}_2) \end{tikzcd}$$

Remarque

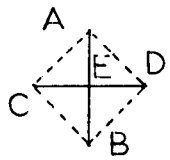
Nous ne persistons pas à suivre des calculs quand nous ignorons comment les diriger. Certes, la persévérance est une vertu, mais l'illustre mathématicien Emile BOREL aimait à affirmer : "La première qualité d'un mathématicien, c'est la paresse ... Ça veut dire qu'il faut réfléchir au lieu de travailler". Dans notre cas, "travailler" signifiait "calculer". Devant un problème inattendu, Borel marchait longuement de long en large, jusqu'à s'arrêter et déclarer d'une voix calme : "Eh bien, voilà ! ", et la méthode à suivre était énoncée, avec ses points forts ou délicats. Le reste était un travail de tâcheron bien dirigé (non sans difficultés parfois, et souvent très intéressant pour nous !).

Accepter de toujours suivre n'importe quel filet d'eau dans la steppe conduit trop souvent, non pas au lac espéré mais au désert où il se perd.

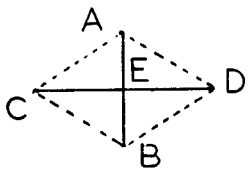
SUR LA QUATRIEME DEMONSTRATION

Préliminaire : Remarque sur les croisillons et "les géométries".

On peut mettre les croisillons à la base des diverses théories géométriques dont l'ensemble constitut la géométrie élémentaire. (Cf. Un itinéraire de géométrie élémentaire - Lucienne Félix, IREM de Bordeaux - document interne).
Nous nommons "croisillon" l'ensemble de 2 segments AB , CD qui se coupent en un point E . Présentons-les en allant du singulier au général.



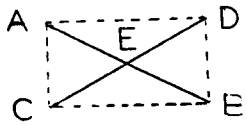
1) **Croisillon du carré** : deux segments perpendiculaires, se coupant au milieu de chacun d'eux.



1') **Croisillon du losange** : segments perpendiculaires, se coupant au milieu de chacun d'eux.

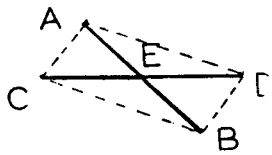
1") **Croisillon du rectangle** : segments égaux se coupant au milieu de chacun d'eux.

Ils sont à la base de la **géométrie métrique**.



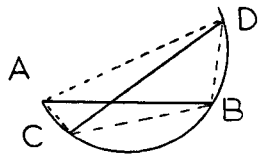
2) **Croisillon du parallélogramme** : segments se coupant au milieu de chacun d'eux.

Base de la **géométrie affine.**



3) **Croisillon inscriptible** EA . EB = EC . ED

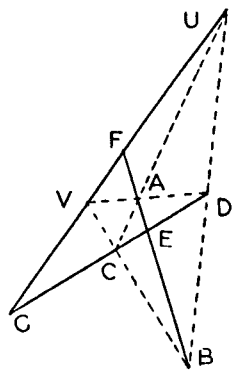
Base de la **géométrie anallagmatique (Inversion)**

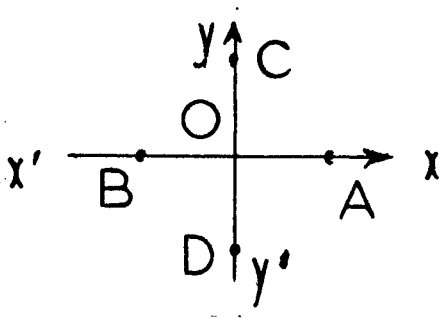


4) **Croisillon complet** : les 4 sommets du quadrilatère sont portés par **4 droites** qui se coupent 2 à 2 en 6 points (A, B, C, D et A' B'). Joints 2 à 2, ces 6 points déterminent 3 diagonales formant le triangle des 3 points diagonaux E , F , G .

Base de la **géométrie projective.**

(Birapports - Harmonicité)





5) On peut considérer le **croisillon du carré** comme base de la **géométrie de plan complexe** , les 2 segments perpendiculaires sont portés respectivement par

l'axe des réels : $\overline{OA} = 1$, $\overline{OB} = -1$ et

l'axe des imaginaires : $\overline{OC} = +i$, $\overline{OD} = -i$

ETUDE DE LA QUATRIEME DEMONSTRATION

Elle est basée sur le **croisillon inscriptible**, caractérisé par la formule

$$(\mathcal{I}) : uv = u'v'$$

L'étude fait appel aux similitudes de 2 paires de triangles, caractérisées par la proportionalité des côtés. Quelle que soit la démarche qui introduit ceci, la démonstration, depuis son hypothèse jusqu'à ses conclusions, est uniquement métrique avec l'appel aux formules de Chasles et de Stewart.

1) Le problème des réciproques

Si vraiment les angles n'interviennent pas, on peut supposer, dans des calculs intermédiaires, que l'angle θ des diagonales est **droit** - alors $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ s'expriment immédiatement grâce à la formule de Pythagore en introduisant les 4 radicaux

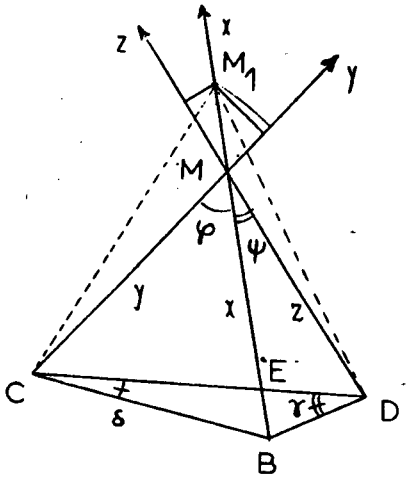
$$\sqrt{u^2+u'^2} \quad , \quad \sqrt{v^2+v'^2}$$
$$\sqrt{u^2+v^2} \quad , \quad \sqrt{u'^2+v'^2}$$

Le problème est de démontrer que $(\mathcal{I})$ $uv + u'v' = 0$ entraîne $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ et, inversement, que le système $(\mathcal{P}_1)$,$(\mathcal{P}_2)$ ou même, si possible, que chaque assertion $(\mathcal{P}_1)$ ou $(\mathcal{P}_2)$ entraîne $(\mathcal{I})$. Ceci paraît sans espoir. Et que serait-ce sans l'hypothèse $\theta = \frac{\pi}{2}$!

Et pourtant, grâce aux formules de proportionalité, on démontre $(\mathcal{P}_2)$ sans peine... Et même la démonstration (4') montre que cette démonstration n'est qu'un **jeu d'écriture** sur les formules de proportionnalité et la notion d'addition des longueurs. Mais la démarche ne peut s'inverser, car il a fallu associer 3 formes de la condition d'inscriptibilité pour en déduire $(\mathcal{P}_2)$.

Pour $(\mathcal{P}_1)$ il nous a fallu faire appel à une formule non évidente, celle de Stewart, par une démarche géométrique. De plus, cette formule est remarquablement simple. On comprend qu'elle ait été distinguée, même si son importance est surtout historique (introduction de la trigonométrie dans la science). C'est elle, **la** formule de Ptolémée. Quant à la réciproque, la méthode que nous étudions ne peut être inversée puisque 3 aspects de l'inscriptibilité sont utilisés.

2) Appel à des fonctions



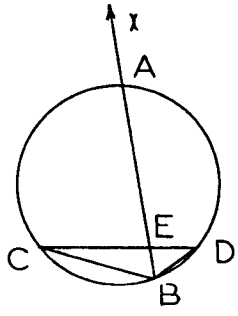
Etant choisis le triangle CBD et le point E sur CD, faisons varier $x = BM$, donc les longueurs qui en dépendent $CM = y$, $OM = z$ et les angles $\widehat{OMC} = q$ et $\widehat{BMO} = \psi$.

Si x subit l'accroissement Δx, y et z subissent des accroissements qui, au 2ème ordre près, sont $\Delta y = \Delta x . \cos\varphi$, $\Delta z = \Delta x \cos\psi$.

a) Pour $(\mathcal{P}_1)$ nous étudions le polynome

$P_1(x) = a'x - (c'y + d'z)$ dont la dérivée par rapport à x est

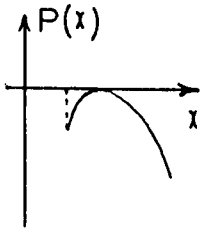
$P'_1(x) = a' - (c' \cos\varphi + d' \cos\psi)$



Si **M est au point A** sur le cercle dirconscrit à CBD nous savons que $x = a$ et $P_1(a) = 0$ (théorème direct)

Or, alors $\varphi = \gamma$, $\psi = \beta$ et $P'_1(a) = 0$

Si **M est extérieur au cercle**, $(x > a)$, on a $\varphi < \gamma$, $\psi < \delta$ donc la dérivée $P'_1(x)$ est négative.



Si **M est intérieur au cercle** $(x < a)$, alors $P'_1(x)$ est positive.

Conclusion complète pour $(\mathcal{P}_1)$

$$(\mathcal{I}) \Leftrightarrow \left[(P_1) = 0\right] \quad , \quad (\tilde{\mathcal{I}}) \Leftrightarrow \left[(P_1) < 0\right]$$

b) Pour ($\mathcal{P}_2$) le polynome à étudier est

$$P_2(x) = x(d'y + c'z) - a'(yz + c'd') \ , \quad \text{nul pour} \quad x = a$$

$$P_2(a) = a(d'c + c'z) - a'(cd + c'd') = 0$$

donc $\quad P'_2(x) = (d'y + c'z) + (d'x - a'z)\cos\varphi + (c'x - a'y)\cos\psi$

puisque $\quad y'_x = \cos\varphi \ , \quad z'_x = \cos\psi$.

Au voisinage de A ($x = a$, $y = c$, $z = d$, $\varphi = \gamma$, $\psi = \delta$), nous reconnaissons les expressions connues

$$\begin{cases} S_3 = cd' + c'd' \\ S_2 = cd' + dc' \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_2 = ac' - ca' \\ \Gamma_2 = ad' - d'a \end{cases}$$

$$P_2(a) = aS_2 - a'S_3 = 0$$

$P'_2(a) = S_2 + \Gamma_2 \cos\gamma + \Delta_2 \cos\delta$ dont nous cherchons le signe.

Sans restreindre l'étude, on peut supposer $c > c'$, $d > d'$ en choisissant les notations. A l'occasion de la 2ème démonstration, nous avons démontré qu'alors on a, outre

$$S_2 > 0 \ , \quad \Gamma_2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_2 > 0 \quad \text{donc} \quad P'_2(a) > 0 \ .$$

Donc, **au voisinage de A** , point du cercle (CBD) , **$P_2(x)$ est croissant.**

Si M est intérieur au cercle, $\dfrac{a}{a'} < \dfrac{cd + c'd'}{cd' + dc'}$

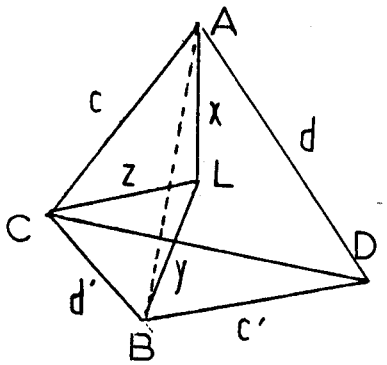
Si M lui est extérieur, $\dfrac{a}{a'} > \dfrac{cd + dd'}{cd' + dc'}$, c'est-à-dire $\dfrac{a'}{a} < \dfrac{cd' + dc'}{cd + c'd'}$

Il faudrait compléter cette étude en étendant ce résultat à toute la région où M peut être, mais la méthode suivie ici ne semble pas s'y prêter. Encore une fois, nous abandonnons l'étude.

SUR LA CINQUIEME DEMONSTRATION

L'introduction du point L est une astuce remarquable. On n'y pense pas naturellement, car les similitudes en évidence d'après l'énoncé sont celles que forment les diagonales. Les 2 similitudes concernant L donnent immédiatement $(\mathcal{P}_1)$ et indirectement $(\mathcal{P}_2)$.

La **réciproque** s'étudie en reprenant la construction de L dans le cas d'un quadrilatère quelconque.



Le point L se construit par $\begin{cases} \widehat{CAL} = \widehat{CDB} \\ \widehat{ACL} = \widehat{DCB} \end{cases}$

La similitude de $\begin{cases} CAL \\ CDB \end{cases}$

donne $\dfrac{c}{a'} = \dfrac{x}{c'} = \dfrac{z}{d'}$ donc $\mathbf{x = \dfrac{cc'}{a'}}$

Mais $\widehat{ACD} = \widehat{LCB}$, avec $\dfrac{c}{a'} = \dfrac{z}{d'}$ assure la similitude

$\begin{cases} ACL \\ LCB \end{cases}$ donc $\dfrac{y}{d} = \dfrac{d'}{a}$ donc $y = \dfrac{dd'}{a'}$

Ainsi, **pour tout quadrilatère convexe,**

$$\mathbf{a'(x+y) = cc' + dd'}$$

Pour $(\mathcal{P}_1)$ $[aa' = cc' + dd'] \Leftrightarrow x + y = a$

Or, l'alignement A, L, B donne $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ qui exprime l'inscriptibilité, donc

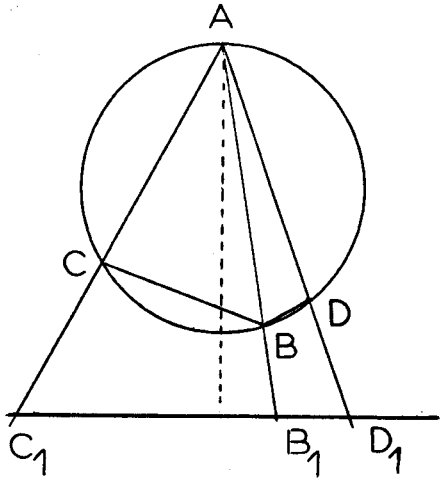
$$(\mathcal{I}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_1) \quad \text{et} \quad (\tilde{\mathcal{I}}) \Leftrightarrow [aa' < cc' + dd']$$

Pour $(\mathcal{P}_2)$ l'étude conduit si directement à $(\mathcal{P}_1)$ que l'on songe à utiliser $(\mathcal{P}_1)$ pour étudier $(\mathcal{P}_2)$ car la méthode proposée ici se prête mal à l'étude de sa réciproque.

Rappelons que l'on sait passer de $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_2)$ en considérant Q_1, Q_2, Q_3.

Remarque : L'introduction de L qui "tombe du ciel" est, pour l'élève, le type même d'une démonstration qu'il déclare "très maligne, mais qu'il faut apprendre par coeur" !

SUR LA SIXIEME ET LA SEPTIEME DEMONSTRATIONS

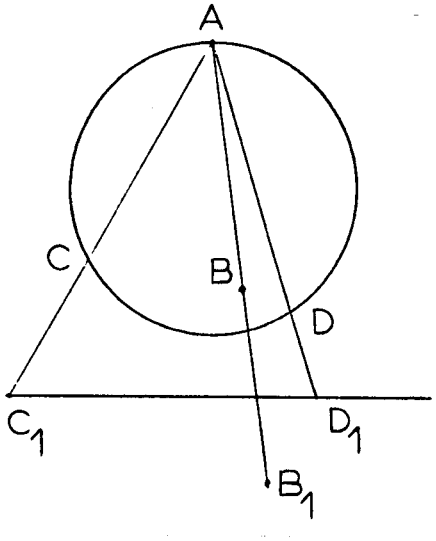


Ces deux démonstrations ne sont pas, en réalité, distinctes, mais nous avons gardé les deux rédactions pour mettre en évidence les aspects différents d'un exposé suivant que l'on utilise des propriétés démontrées dans le cas particulier en question ou bien comme application d'une théorie générale connue.

Ainsi, la 6ème démonstration apparaît ici comme "tombée du ciel", comme la 5ème démonstration. Au lieu d'annoncer "il y a un point remarquable", nous lisons ici "il y a une droite remarquable". En réalité, nous appliquons la transformation par inversion d'un cercle en droite, annoncée dans la 7ème présentation.

On notera que dans la 6ème démonstration (la 1ère de celles que nous examinons ici), nous construisons 2 couples de triangles semblables et en déduisons le 3ème couple, tandis qu'avec la connaissance de la théorie, l'inversion, nous connaissons les 3 couples de triangles semblables dès le départ.

Réciproques. L'inversion traduit les propriétés de la droite en celle du cercle, en particulier le théorème de Chasles sur la droite en propriété $(\mathcal{P}_1)$ de Ptolémée et inversement



$$(\mathcal{L}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_1)$$

De plus, si le quadrilatère n'est pas inscriptible, ayant transformé le cercle ACD en la droite $C_1 D_1$, le point B_1 n'est pas sur cette droite.

Alors $C_1 B_1 + B_1 D_1 > C_1 D_1$ donne $cc' + dd' > aa'$.

L'étude de $(\mathcal{P}_1)$ est complète.

Etude de $(\mathcal{P}_2)$

Suivons les notations de la 7ème démonstration.

Les calculs inverses de ceux qui ont été suivis font, grâce aux relations (K) remonter de $(\mathcal{P}_2)$ à la formule de Stewart

La réciproque complète de $(\mathcal{P}_2)$ oblige donc à étudier le cas de non alignement de $B_1C_1D_1$. L'inversion donne :

$$a = \frac{p}{AB_1}, \quad c = \frac{p}{AC_1}, \quad d = \frac{p}{AD_1},$$

$$a' = p\,\frac{C_1D_1}{AC_1 . AD_1}, \quad c' = p\,\frac{B_1C_1}{AD_1 . AB_1}, \quad d' = p\,\frac{B_1C_1}{AC_1 . AD_1}$$

donc (1) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{AC_1 . AD_1}{AB_1 . C_1D_1}$ d'où

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p^2}(cd + c'd') = \dfrac{1}{AC_1 AD_1} + \dfrac{BD_1 BC_1}{(AB_1)^2 AD_1 AC_1} = \dfrac{(AB_1)^2 + BD_1 . BC_1}{(AB_1)^2 + AD_1 . AC_1} \\ \dfrac{1}{p^2}(cd' + dc') = \dfrac{(AD_1)^2 . B_1C_1 + (AC_1)^2 . B_1D_1}{AB_1 . (AC_1)^2 . (AD_1)^2} \end{cases}$$

donc

$$(2) \qquad k = \frac{cd + c'd'}{cd' + dc'} = \frac{\left[AB_1^2 + BD_1 . BC_1\right] AC_1 . AD_1}{\left[AD_1^2 . BC_1 + AC_1^2 . B_1D_1\right] AB_1}$$

Etudions par exemple

$$(1') \qquad k \geq \frac{AC_1 . AD_1}{AB_1 . BD_1}$$

Pour éclaircir l'écriture, posons $AB_1 = b_1$, $AC_1 = c_1$, $AD_1 = d_1$, (1') s'écrit

$$(b_1^2 + B_1D_1 . B_1C_1)\, C_1D_1 \geq d_1^2 . B_1C_1 + c_1^2 . B_1D_1$$

L'alignement $B_1D_1 + B_1C_1 = C_1D_1$

donne l'égalité dans (1') par la formule de Stewart, donc $(\mathcal{P}_2)$.

Le non-alignement $B_1 D_1 + B_1 C_1 > C_1 D_1$
est compatible avec **(2)** à la condition

$$d_1^2 . B_1 C_1 + c_1^2 . B_1 D_1 < (B_1 D_1 + B_1 C_1)(b_1^2 + BD_1 . B_1C_1)$$

ce qui donne par inversion

$$a^2 < \frac{(cc' + dd')(cd + c'd')}{cd' + dc'}$$

Mais nous avons vu dans l'étude de la 1ère démonstration que cette inégalité correspond à $\hat{A} + \hat{B} > \pi$, ce qui est la condition pour avoir $\frac{a}{a'} < \frac{cd + c'd'}{cd' + dc'}$

L'étude est complète.

SUR LES HUITIEME ET NEUVIEME DEMONSTRATIONS

Enfin une étude géométrique ! De simples relations relatives aux triangles et aux cercles circonscrits conduisent aux formules désirées.

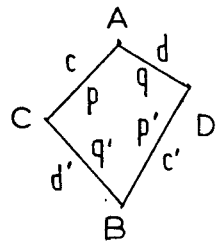
Etudiant des produits de longueurs, il est normal de songer aux surfaces, donc à des hauteurs de triangles. Il se trouve que la méthode conduit directement à $(\mathcal{P}_2)$. On obtient $(\mathcal{P}_1)$ par l'idée d'introduire le point A_1 qui associe au quadrilatère considéré un second quadrilatère avec la 3ème diagonale.

Si l'on avait clairement vu l'ensemble des 3 quadrilatères $Q\ Q_1\ Q_2$, on aurait pu démontrer d'abord $(\mathcal{P}_1)$ et en déduire $(\mathcal{P}_2)$.

Mais la recherche des réciproques ne se présente pas bien. Si le quadrilatère n'est pas supposé inscriptible, chaque triangle a son propre cercle circonscrit et rien ne reste du raisonnement.

Notons que les expressions $cd + c'd'$, $cd' + dc'$ et $cc' + dd'$ s'introduisent ici par des considérations géométriques relatives à des aires de triangles en évidence sur la figure. Cela fait mieux apparaître leur significiation et leur rôle que lorsqu'elles apparaissent au cours de calculs.

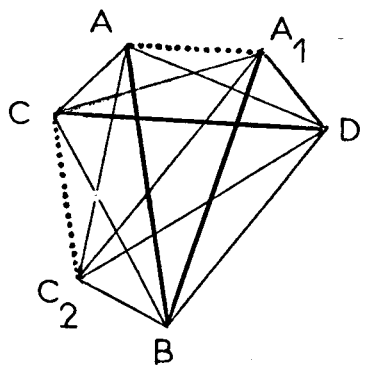
SUR LA DIXIEME DEMONSTRATION



Préliminaire.

Nous avons considéré un quadrilatère Q convexe de sommets A C B D , de côtés c, d, c', d' , de diagonales a, a' et lui avons associé 6 **vecteurs** (et leurs opposés), donc, dans le plan complexe, les 6 nombres complexes p, q , p', q', r, r' . Mais les formules qui nous intéressent ne comportent que les 4 **longueurs** des côtés et les 2 des diagonales qui s'en déduisent. Or, ces 4 longueurs de côtés permettent de construire 3 quadrilatères convexes. A partir du premier, Q , on peut construire Q_1 en permutant les segments de longueur $|p|$, $|q|$, et Q_2 en permutant les segments de longueur $|p|$, $|q'|$. Ainsi sont notés, avec $p = p' + q + q'$,

Q	vecteurs	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DC}$
	complexe	p	p'	q	q'	r	r'
Q_1	vecteurs	$\overrightarrow{A_1C}$	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{A_1D}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{A_1B}$	$\overrightarrow{DC}$
	complexe	p_1	$p'_1 = p$	q_1	$q'_1 = q'$	r_1	$r'_1 = r'$
Q_2	vecteurs	$\overrightarrow{AC_2}$	$\overrightarrow{DB}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BC_2}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DC_2}$
	complexe	p_2	$p'_2 = p$	$q_2 = q$	q'_2	$r_2 = r$	r'_2



avec $|p_1| = |q|$, $|q_1| = |p|$

$|p_2| = |q'|$, $|q_2| = |p'|$

Conséquence de la formule démontrée

Pour **Q** $\Pi = r r' - (p p' + q q') = 0$

Nous déduisons aussi bien

Pour $\mathbf{Q_1}$ $\Pi_1 = r_1 r'_1 - (p_1 p' + q_1 q') = 0$

Pour $\mathbf{Q_2}$ $\Pi_2 = r r'_2 - (p_2 p' + q q'_2) = 0$

Inscriptibilité. Les **cordes** égales $BC_2 = DA_1$ forment avec BD les cordes égales $C_2D = BA_1$, d'où 3 longueurs de diagonales que nous nommons

$|r| = a$, $|r'| = a'$, $|r_1| = a''$.

Ou bien les 3 quadrilatères sont inscriptibles, ou bien aucun n'est inscriptible.

Le théorème direct a montré, par l'étude des modules, que, dans le cas de l'inscriptibilité, on a les 3 formules

$(\mathcal{P}_1)$ $aa' = cc' + dd'$, $a'a_1 = cd' + dc'$, $a_1a = cd + c'd'$

et, dans le cas de non inscriptibilité,

$(\mathcal{P}_1)$ $aa' < cc' + dd'$, $a'a_1 < cd' + dc'$, $a_1a = cd + c'd'$

cas où les produits pp' , qq' , $r\,r'$ ne seraient pas de même argument, c'est-à-dire ne peuvent devenir réels par choix d'un axe X .

L'étude est complète pour $(\mathcal{P}_1)$. En particulier, pour le quadrilatère Q

$$(\mathcal{I}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_1) \quad \text{et} \quad (\tilde{\mathcal{I}}) \Rightarrow \left[\Pi < 0\right]$$

Etude de $(\mathcal{P}_2)$

Dans **le cas d'inscriptibilité**, les formules de $(\mathcal{P}_2)$ donnent

$$\frac{a}{a'} = \frac{cd + c'd'}{cd' + dc'} , \quad \frac{a'}{a_1} = \frac{cc' + dd'}{cd + c'd'} , \quad \frac{a_1}{a} = \frac{cd' + dc'}{cc' + dd'} \qquad (\mathcal{P}_2)$$

Mais ces formules ne permettent pas de conclure au sens des 3 inégalités correspondantes en cas de **non inscriptibilité** , ni même si une égalité subsiste. Il faut considérer les conditions géométriques concernant les **arguments** dans le cas de non-inscriptibilité.

Ainsi, $(\mathcal{I}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_1) \Rightarrow (\mathcal{P}_2)$ mais $(\mathcal{P}'_2)$ n'est pas étudié

L'étude géométrique des angles a été faite dans les commentaires sur la 1ère démonstration . L'énoncé démontré était

$[a\,(cd' + dc') < a'\,(cd + c'd')]$ si et seulement si $\left[\hat{A} + \hat{B} > \pi\right]$

[égalité, $(\mathcal{P}_2)$] si et seulement si $\left[\hat{A} + \hat{B} = \pi\right]$

Donc

$$\begin{tikzcd} & (\mathcal{P}_1) \\ (\mathcal{I}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & (\mathcal{P}_2) \end{tikzcd}$$

De plus, le cas $(\tilde{\mathcal{I}})$ est complètement élucidé.

L'étude est complète, mais cette fin ne fait plus appel aux nombres complexes.

III - NOTE SUR LES FORMULES DE CHASLES ET DE STEWART

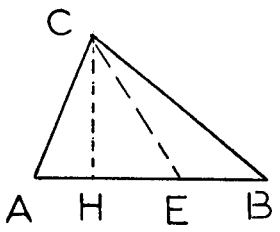
Ces formules nous servent toutes deux à exprimer l'alignement de 3 points sans introduire d'angles. Leurs rôles sont différents.

A) Usage de ces formules

Soient **2 points A et B**, $AB = a$

a) Par définition, E est un point du segment AB.
On pose $AE = u$, $BE = v$.
Ecrire $u + v = a$ est une façon de traduire la situation à l'aide des notations données.

b) Par définition, E vérifie $AE = u$, $BE = v$.
Alors la formule $a = u + v$ (**formule de Chasles**) exprime l'alignement de A,B,E, le point E entre A et B (c'est-à-dire $E \in AB$). C'est une condition nécessaire et suffisante pour l'alignement, car le non-alignement entraîne $a < u + v$ d'après les axiomes de longueur.



c) 3 points non alignés A,B,C déterminent un plan. La **formule de Stewart** est vraie quand E appartient au segment AB. Elle s'écrit

$$\textbf{(St)} : \quad AB.CE^2 = BE.CA^2 + AE.CB^2 - AE.BE.AB$$

ou encore

$$BE.CA^2 + AE.CB^2 = AB\,(CE^2 + AE.BE)$$

(Cette formule figure dans le "recueil de théorèmes généraux de géométrie" publié en 1746 par l'Ecossais Mathieu Stewart).

Mais **c'est la réciproque** qui exprimerait l'alignement.

La différence des rôles des deux formules en question est très clairement illustrée par la 4ème démonstration des formules de Ptolémée de notre 1ère partie :

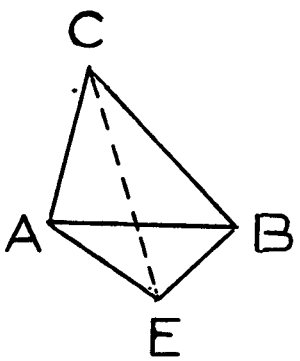
- D'abord, on considère **2 couples de segments** constituant les diagonales à étudier. La formule de Chasles, **deux fois utilisée** est donc à la base de l'étude. Des similitudes introduisent des rapports, étuments de la formule $(\mathcal{P}_2)$ du 3ème degré.

- D'autre part, **E est considéré comme point d'un segment côté commun de 2 triangles.** La base de l'étude sera donc **deux** applications de la formule de Stewart, ou bien, en simplifiant, **une** application de la formule de Stewart à l'un des triangles, complété par **une** application de la formule de Chasles introduisant le sommet du triangle non utilisé. C'est cette 2ème méthode que nous avons appliquée.

B - ETUDE DE LA FORMULE DE STEWART

1) Dans l'esprit de notre 1ère démonstration des formules de Ptolémée, introduisons 2 angles inscrits du quadrilatère convexe ACBE , ici $\widehat{CEA}$ et $\widehat{CEB}$

Des formules $\begin{cases} CA^2 \leq CE^2 + EA^2 - 2\,CE.EA\,\cos\widehat{CEA} & \mid EB \\ CB^2 = CE^2 + EB^2 - 2\,CE.EB\,\cos\widehat{CEB} & \mid EA \end{cases}$



nous déduisons, par combinaison linéaire :

$$CA^2.EB + CB^2.EA = CE^2\,(EA+EB) + EA.ED.\,\lambda$$

avec $\lambda = \left[(EA+EB) - 2\,CE\,(\cos\widehat{AEC} + \cos\widehat{BEC})\right]$

Or $[E \in AB] \Leftrightarrow [EA + EB = AB] \Leftrightarrow [\cos\widehat{AEC} + \cos\widehat{BEC} = 0]$

donc $\lambda = EA + EB$

$$[\mathbf{E \in AB}] \Rightarrow \mathbf{(St)}$$

Mais la réciproque n'est pas évidente :

$$[E \notin AB] \Leftrightarrow [EA + EB > AB] \Leftrightarrow [\cos\widehat{AEC} + \cos\widehat{BEC} \neq 0]$$

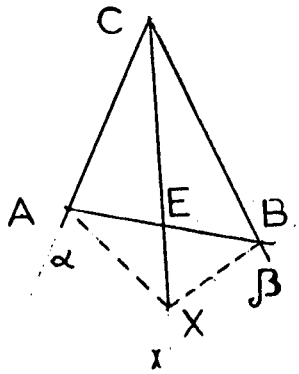
Il faudrait étudier λ

Nous abandonnons l'étude de la réciproque.

2) Suite de l'étude de la formule de Stewart.

Après cette décision d'abandonner, j'ai un remord et un souvenir : D'abord il est clair, d'après ce qui précède, qu'il s'agit en réalité d'une étude métrique du **quadrilatère**, donc au centre de notre sujet.

Et puis, un souvenir - A l'oral de mon concours d'entrée à l'ENS de Sèvres (en 1920, il y a 70 ans!), en réponse au problème de géométrie qui m'était posé, je proposai d'utiliser la formule de Stewart. L'examinateur, ironique (ou peut-être intéressé?) me demanda : "Etes-vous très calée sur le théorème de Stewart ?". Je répliquai que j'en connaissais deux démonstrations, et cela orienta l'examen. Et voici qu'aujoud'hui, j'abandonne la question au lieu de tenter de l'approfondir !



Précisons donc la question (nouvelles notations).

Il s'agit d'un quadrilatère A,B,C,X dont les sommets ABC sont donnés, le 4ème X , variable, appartient à la région a A B b pour assurer la convexité.

CX coupe AB en E et X est sur la demi-droite EX.

On considère la fonction

$$\Psi(ABC, X) = CA^2 . CX + CB^2 . AX - (CX^2 + AX . BX)(AX + BX)$$

Enoncé direct	$[X \in AB]$	$\Rightarrow$	$[\Psi(ABC, X) = 0]$	démontré
contraposé	$[\Psi \neq 0]$	$\Rightarrow$	$[X \notin AB]$	
Enoncé réciproque	$[\Psi = 0]$	$\Rightarrow$	$[X \in AB]$	à étudier
contraposé	$[X \notin AB]$	$\Rightarrow$	$[\Psi \neq 0]$	

Nous dirons qu'au cas $X \in AB$, le quadrilatère est **dégénéré.** La question est de savoir si la formule de Stewart caractérise les quadrilatères convexes dégénérés.

La question de la réciproque est toujours sans réponse.

3) Examen des conséquences de la formule de Stewart

Notations

EC' prolongeant CE

$$AE = \alpha\,,\ BE = \beta \qquad \begin{array}{lll} CA = a & CB = b & CE = t \\ C'A = a' & C'B = b' & C'E = t' \end{array}$$

Plaçons X en E puis en C', et appliquons la formule de Stewart aux 4 triangles :

$$(\mathcal{F}) \quad \begin{cases} (ABC, E) : \ \varphi_1 = a^2\beta + b^2\alpha - K_1 = 0 \ \ldots \text{avec} \ldots\ldots K_1 = (\alpha+\beta)(t^2 + \alpha\beta) \\ (ABC', E) : \ \varphi_2 = a'^2\beta + b'^2\alpha - K_2 = 0 \ \ldots \text{avec} \ldots\ldots K_2 = (\alpha+\beta)(t'^2 + \alpha\beta) \\ (ACC', E) : \ \varphi_3 = a^2 t' + a'^2 t - K_3 = 0 \ \ldots \text{avec} \ldots\ldots K_3 = (t+t')(\alpha^2 + t t') \\ (BCC', E) : \ \varphi_4 = b^2 t' + b'^2 t - K_4 = 0 \ \ldots \text{avec} \ldots\ldots K_4 = (t+t')(\beta^2 + t t') \end{cases}$$

Ces 4 relations ne sont pas indépendantes et on ne peut résoudre le système en a, a', b, b' . Les combinaisons linéaires d'élimination donnent seulement 2 relations.

$$(\mathcal{G}) \quad \begin{cases} (\beta t')\, a^2 - (\alpha t)\, b'^2 = H_1 \\ (\alpha t')\, b^2 - (\beta t)\, a'^2 = H_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} H_1 = t K_1 + \alpha K_4 = -t K_2 + \beta K_3 \\ H_2 = t K_1 + \beta K_3 = -t K_2 + \alpha K_3 \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$H_1 = t t' (\beta t' + \alpha t) + \alpha\beta\ (\alpha t' - \beta t)$$
$$H_2 = t t' (\alpha t' + \beta t) + \alpha\beta\ (\beta t' + \alpha t)$$

Finalement, le problème de la réciproque peut s'énoncer :
Connaissant les relations

$$(\varphi_1) : \ a^2\beta + b^2\alpha - (\alpha+\beta)(t^2 + \alpha\beta) = 0$$

et $(\mathcal{G})$ qu'on peut écrire

$$(\mathcal{G}') \quad \begin{cases} \alpha t\left(b'^2 - \beta^2\right) = t'\left[t(\beta t' - \alpha t) + \beta\left(a^2 - \alpha^2\right)\right] \\ \beta t\left(a'^2 - \alpha^2\right) = t'\left[t(\alpha t - \beta t) + \alpha\left(b^2 - \beta^2\right)\right] \end{cases}$$

démontrer que la nullité de

$$\Psi = a^2 b' + b^2 a' - (a^2 + b^2)\,[\,(t+t')^2 + a' b']$$

entraîne $\quad t' = 0$

Notons l'identité

$$(\mathcal{W}) \qquad \Psi - \varphi_1 = [\, a^2 (b' - \beta)] + [\, b^2 (a' - \alpha)] - [(a' + b')\, a'b' - (\alpha + \beta)\, \alpha\beta\,]$$
$$+ [\,[(a' - \alpha) + (\alpha' - \beta)]\, t\,] - [\,[(a' + b') + (2\,t + t')]\, t'\,]$$

expression formée de 5 crochets qui sont, ou bien tous nuls ou tous non nuls.

Le théorème direct est alors évident, mais pas la réciproque.

Cette recherche directe ne permet pas de conclure, mais l'étude tentée ici n'a pas été entièrement vaine : la relation $(\mathcal{W})$ est curieuse et les formules $(\mathcal{G})$, bien que peu simples, sont intéressantes : valables pour tous les quadrilatères convexes. Nous les nommerons **"seconde formule de Stewart"** : la première concerne les **côtés consécutifs** et la seconde les **couples de côtés opposés.**
(Comment ne pas songer aux deux formules de Ptolémée qui concernent les mêmes couples dans le cas du quadrilatère inscriptible !)

Mais ces formules trop compliquées sont en réalité inutilisables. On peut juger que ces essais ne sont pas dignes d'être conservés. Nous les laissons figurer sans honte pour montrer comment une recherche se poursuit en réalité quand on n'est pas guidé par quelques indications ou par les intuitons de l'expérience et du talent, sinon du génie.

Il est déjà bien d'imaginer des voies à explorer et de s'y engager même si elles n'aboutissent pas au résultat espéré.

4) AUTRE DEMONSTRATION

Dans le plan complexe, conservons les notations de la dixième démonstration des formules de Ptolémée (Première Partie).

Le quadrilatère plan convexe AB,CD est défini, par exemple, par les nombres complexes q, p, p', d'où

$$p = q + p' + q' \quad , \quad r = p - q' \quad , \quad r' = p' + q'$$

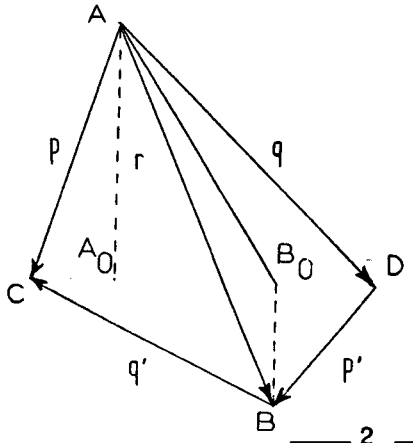
Pour étudier la formule de Stewart, faisons jouer à r un rôle spécial en partant de

$$\begin{cases} p = r + q' \\ q = r - p' \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} p^2 = r^2 + q'^2 + 2\,r\,q' \\ q^2 = r^2 + p'^2 - 2\,r\,p' \end{cases}$$

donc, par combinaison linéaire

$$(s) \qquad p^2 p' + q^2 q' = r^2 (p' + q') + p'q' (p' + q')$$

formule vérifiée par tous les quadrilatères plans.



La formule à démontrer concerne les modules que l'on calcule en connaissant les arguments.
Mais bornons-nous à appliquer **(s)** au cas de 4 points alignés A_0 , B_0 , C , D , les points A_0 et B_0 étant les projections de A et B sur la droite C D . On obtient la formule

$$(s_0) \qquad \overline{CA_0}^2 . \overline{DB_0} + \overline{DA_0}^2 . \overline{B_0C} = (\overline{B_0A_0}^2 + \overline{DB_0} . \overline{B_0C})\ (\overline{DB_0} + \overline{B_0C})$$

C'est la formule de Stewart pour 4 points alignés.

Nous introduisons A_0A en écrivant la formule de distributivité sous la forme :

$$\overline{A_0A}^2 . \overline{DB_0} + \overline{A_0A}^2 . \overline{B_0C} = \overline{A_0A}^2\ (\overline{DB_0} + \overline{B_0C})$$

Ajoutons membre à membre et appliquons la formule de Pythagore

$$(s_t) \qquad \overline{CA}^2 . \overline{DB_0} + \overline{DA}^2 . \overline{B_0C} = (\overline{B_0A}^2 + \overline{DB_0} . \overline{B_0C})\ \overline{DC}$$

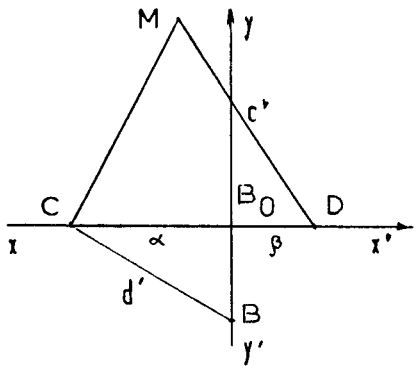
formule de Stewart pour B_0 aligné avec C D et A quelconque du plan.

Remarque : Les nombres complexes n'ont servi ici qu'à découvrir l'identité (s_0) que le calcul des abscisses vérifie sans peine. Mais le rôle de CA^2, DA^2, $\overline{B_0A}^2$ suggère d'étudier la réciproque par la géométrie analytique.

Réciproque de la formule de Stewart.

Prenons comme axes de coordonnées x'x sur $\overrightarrow{CD}$ et y'y sur $\overrightarrow{BB_0}$ et posons $\overrightarrow{BB_0}$

$$\overline{BB_0} = h \ , \ \overline{CB_0} = \alpha \ , \ \overline{B_0D} = \beta$$



et CB = d' , DM = c' , nombres tous positifs.

Déterminons le lieu des points A (x,y) vérifiant

$$c'\,\overline{AC}^{\,2} + d'\,\overline{AD}^{\,2} = (c'+d')\,\overline{AB}^{\,2} = K \ , \text{K donné.}$$

L'équation s'écrit

$$c'\left[(x+\alpha)^2 + y^2\right] + d'\left[(x-\beta)^2 + y^2\right] - (c'+d')\left[x^2 + (y+h)^2\right] = K$$

Ainsi, après simplification

$$2\,(dc' - \beta\, d')\,x - (c' + d')\,h\,(2y + h) = K$$

1) $h = 0$, donc $c' = \beta$, $d' = \alpha$ et $B \in CD$

si $K = c'd'(c' + d')$ tout point A convient

si $K \neq c'd'(c' + d')$ aucun point ne convient

2) $h \neq 0$ l'équation est celle d'une droite dont tous les points conviennent.

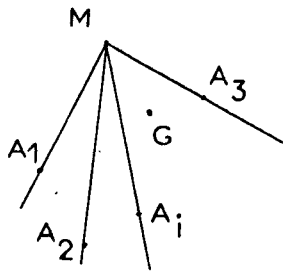
Ainsi la formule de Stewart n'assure pas l'alignement CBD.

C - QU'EST VRAIMENT LA FORMULE DE STEWART ?

J'ai évoqué, dans mes souvenirs, une "seconde" démonstration digne de l'intérêt de mon examinateur en 1920. Quarante cinq ans plus tard, lorsque je rédigeais un manuel de géométrie (la 2ème partie du livre "Géométrie de Terminale" dans la collection Donnedud [ed. Dunod]), le chapitre 8 (§ 3,1) rencontre tout naturellement le théorème de Stewart. Ceci grâce au renouveau apporté par l'organisation de la mathématique par les structures. C'est l'époque où, par exemple, le "centre des distances proportionnelles" fut baptisé "barycentre", notion importante de géométrie vectorielle.

L'étude de la somme

$$S(M) = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$$



était traitée comme fonction du point M sur l'ensemble **e** des points A_i affectés des coefficients α_i, $i \in \{1, 2, \dots n\}$

Le barycentre de cet ensemble est G_p de coefficient p tel que

$$p = \Sigma \alpha_i \quad , \Sigma(\alpha_i , \overrightarrow{GA_1}) = 0$$

Une élévation au carré scalaire permet d'en déduire

$$\mathbf{S(M) = p\, GM^2 + \Sigma\, (\alpha_i\, \overrightarrow{GA_i}^2)}$$

C'est la **formule de Leibniz.**

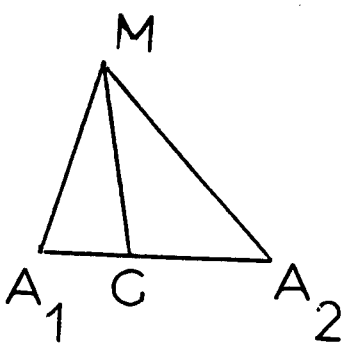
(Qui a collé cette étiquette sur cette formule ? Où et comment ce détail est-il introduit dans l'oeuvre immense du savant (1646-1716) ? On cherche en vain dans les 40 colonnes qui lui sont consacrées dans le "Dictionary of Scientific Biography" de Princeton !).

Or, la "formule de Stewart" n'est autre que le cas particulier le plus simple de la formule de Leibniz : l'ensemble **e** n'a que 2 éléments.

Eclairés par la lumière de la situation générale, nous pouvons, sans revenir à cette source, proposer une solution simple de la formule de Stewart

La formule de Stewart est la formule de Leibniz dans le cas de 2 points A_1 et A_2, leurs coefficients sont tels que le barycentre G est entre A_1 et A_2.

Ils sont donnés par



$$\frac{\overline{GA_1}}{\alpha_2} = \frac{\overline{A_2G}}{\alpha_1} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

La formule est donc, entre longueurs

$$GA_2 . \overline{MA_1}^2 + GA_1 . \overline{MA}^2 = A_1A_2\, (\overline{MG}^2 + GA_2\, GA_1)$$

D - EXPOSE FINAL DE L'ETUDE DE LA FORMULE DE STEWART

Après la recherche précédente, proposons un exposé qui, en réalité, est une vérification des résultats.

1) Il s'agit de 4 points A B C D du plan. On étudie les 2 égalités

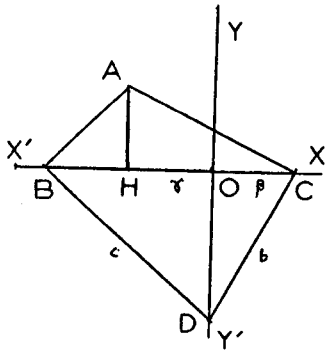
(st_1) $\quad DC \cdot AB^2 + DB \cdot AC^2 - BC\,[AD^2 + DB \cdot DC] = 0$

(st_2) $\quad DC \cdot AB^2 + DB \cdot AC^2 - [DB + DC]\,[AD^2 + DB \cdot DC] = 0$

Les 4 assertions à étudier sont

théorèmes directs	leurs contraposés
(E_1) : $[D \in BC] \Rightarrow [(st_1)$ vrai$]$	(E'_1) : $[(st_1)$ faux$] \Rightarrow [D \notin BC]$
(E_2) : $[D \in BC] \Rightarrow [(st_2)$ vrai$]$	(E'_2) : $[(st_2)$ faux$] \Rightarrow [D \notin BC]$
théorèmes réciproques	**leurs contraposés**
(F_1) : $[(st_1)$ vrai$] \Rightarrow [D \in BC]$	(F'_1) : $[D \notin BC] \Rightarrow [(st_1)$ faux$]$
(F_2) : $[(st_2)$ vrai$] \Rightarrow [D \in BC]$	(F'_2) : $[D \notin BC] \Rightarrow [(st_1)$ faux$]$

2) Notations.



Nous allons considérer le triangle BCD comme donné et utiliser les axes de coordonnées x'x portés par BC et y'y par la hauteur DO. O entre B et C

$$BD = c\,,\ CD = b\,,\ \overline{BO} = \gamma\,,\ \overline{OC} = \beta\,,\ OD = h$$

$$a = \overline{BC} = \beta + \gamma\,,\ \beta^2 = b^2 - h^2\,,\ \gamma^2 = c^2 - h^2$$

remarquons l'égalité

$$b\gamma^2 + c\beta^2 = (b+c)(bc - h^2)$$

$x = \overline{OH}$ $\quad y = \overline{HA}$ $\quad BH = x + \gamma$ $\quad \overline{CH} = x - \beta$

3) Etude de (st_1)

$$(st_1) : b[(x+\gamma)^2 + y^2] + c[(x-\beta)^2 + y^2] - a[x^2 + (y+h)^2 + bc] = 0$$

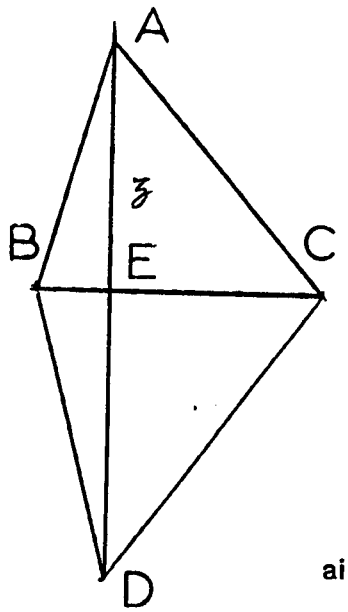
c'est-à-dire

$$(st_1) : (b+c-a)(x^2+y^2) + 2(b\gamma - c\beta)x - 2ha\,y + [b\gamma^2 + c\beta^2 + a(bc - h^2)] = 0$$

(E_1) : [$D \in BC$] donc $\gamma = c$, $\beta = b$, $b + c = a$ et $h = 0$

Le terme constant vaut $(b + c)\,bc - abc = 0$, nul comme chacun des autres termes, donc (st_1) est vrai. Ainsi, **le théorème (E_1) est vrai.**

Réciproque Contre exemple



Les diagonales AD, BC sont orthogonales et se coupent en E : BE = 1, EC = 3, ED = 4

Trouver z = EA pour assurer (St_1) vrai.

$$5\,(z^2 + 1) + \sqrt{17}(z^2 + 9) - 4\,(z + 4)^2 - 20\sqrt{17} = 0$$

$$(1 + \sqrt{17})\,z^2 - 32\,z - (59 + 11\sqrt{17}) = 0$$

$$z_1 \simeq 8{,}61$$

ainsi **[(st_1) vrai] n'assure pas [$D \in BC$]**

Etude de (st_2)

(st_2) : Les 2 théorèmes directs (E_1) et (E_2) sont équivalents grâce à l'hypothèse $a = b + c$, donc **le théorème (E_2) est vrai.**

Réciproque - Prenons la forme (F_2') . Dans (st_2) les termes en $x^2 + y^2$ disparaissent. Il reste l'équation d'une droite, lieu des points A vérifiant (st_2) quand BCD est donné. Donc,

comme (st_1) , **[(st_2) vrai] n'assure pas [$D \in BC$]**

Remarque :

Dans ces problèmes où il n'y a aucune difficulté mathématique, l'important est de bien poser la question. Quelle différence entre étudier une réciproque que l'on espère ou même croit vraie, alors qu'elle est fausse, et l'aborder sans idée préconçue ou, mieux, en soupçonnant sa fausseté ! Et quel risque d'erreur ! Voyez LEGENDRE et l'axiome des parallèles. Quant à l'exposé systématique, il n'est guère possible qu'après avoir réussi l'étude, en conclusion de celle-ci, ou bien en suivant des indications reçues. Mais cela restreint la recherche à la situation particulière proposée.

REMARQUE GENERALE

Des étapes successives, séparées par des arrêts constituent une démarche normale. L'exemple le plus célèbre est celui que détaille **Henri Poincaré** de sa découverte des fonctions Fuchsiennes ["*L'Invention Mathématique*", chapitre III de "Science et Méthode" - Flammarion 1912). L'alternance des périodes de recherche consciente acharnée et de travail inconscient exige du temps.

A l'humble niveau de ma première expérience d'un problème non préparé ["Une hauteur d'un triangle coupe le côté perpendiculaire en H , le cercle circonscrit en A', une autre hauteur en U . Que dire des trois points ?]. Travail toute la soirée. Nuit de bon sommeil et, au réveil, l'illumination ! Joie inoubliable !

CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

La note précédente, complément de l'étude, nous invite à une réflexion d'ensemble:

Nos longs essais infructueux illustrent le fait qu'une méthode qui utilise exclusivement les définitions et les théorèmes qui s'en déduisent directement ne conduit pas, en général, à la résolution d'un problème particulier un peu complexe.

Ceci justifie l'absence dans notre étude d'une voie vers la solution qui paraît s'imposer : utiliser la pure géométrie cartésienne : choix de 2 axes de coordonnées et d'une unité de longueur - introduire 2 nombres pour chaque point, un radical pour une distance, une équation du second degré pour un cercle et un déterminant de 16 éléments pour la condition d'inscriptibilité.

Il faut, pour découvrir et exposer une solution, **utiliser les particularités de la situation**, introduire des éléments auxiliaires opportuns, en particulier des angles et la trigonométrie, des vecteurs et la géométrie vectorielle, éventuellement des "imaginaires" et le plan complexe, et même (nous n'en avons pas eu l'occasion ici) de la géométrie dans l'espace que l'on projetera! C'est l'examen de la question posée qui nous y incitera.

Par contre, c'est une vision de la structure fondamentale reconnue dans la situation à étudier qui place la question dans un large paysage éclairé où nous reconnaissons l'objet de notre étude, avec ses lumières et ses ombres.

Il est plus facile de traiter une question si on la rattache à une théorie générale dont elle n'est qu'un cas particulier que d'explorer une situation pas à pas, guidé seulement par les observations locales plus ou moins cohérentes.

Mais la notion de **facilité** est toute relativeElle dépend de l'état de l'acteur. Il en est de même de la notion d'**utilité**.

Une **théorie générale** est prestigieuse, au sommet de la hiérarchie des connaissances; elle satisfait à un besoin de l'esprit. Eclairant tout un domaine, elle donne la réponse à de nombreuses questions, ce qui justifie les efforts faits pour l'acquérir.

Mais un **cas particulier** est souvent étudié par priorité pour une utilisation immédiate. Et puis, il peut avoir une beauté spéciale. On peut admirer un site pittoreste dans un paysage grandiose ! Nous n'avons pas à décréter une hiérarchie.

Concluons par une sentence chère à notre illustre Maître de l'E.N.S. de Sèvres, **Emile Picard**, que j'entends encore énoncer :

"Il ne faut pas mutiler l'esprit humain dans la recherche de la vérité par un exclusivisme ridicule et infécond".

TROISIEME PARTIE

I - NOTE HISTORIQUE

Nous avons examiné les formules de Ptolémée comme un problème scolaire posé dans le cours de géométrie à un quelconque détour du programme; nous avons découvert, puis examiné, des chemins tracés à partir de diverses situations connues; la seule condition était d'arriver au but déterminé d'avance par les guides expérimentés.

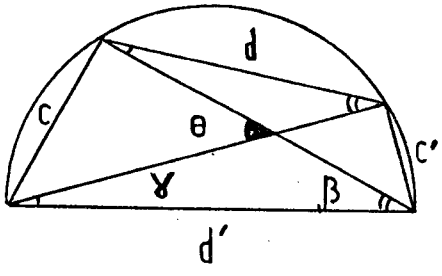
Mais ce fut autrefois un domaine inconnu à découvrir, exploration nécessaire aux besoins des navigateurs et observateurs de l'époque, à ce qui devait, en particulier en mathématique, devenir la science des angles, la trigonométrie. La base en fut la formule dite "d'addition" :

$$\cos(\hat{A}+\hat{B}) \equiv \cos\hat{A}\cos\hat{B} - \sin\hat{A}\sin\hat{B}$$

"cosinus" et "sinus" n'étaient que de simples dénominations de certaines longueurs "demi-corde" ... ou de certains rapports de longueurs. Ils devinrent des fonctions d'angles, différentes des "fonctions algébriques" de nombres.

L'égalité (aa' = bb' + cc') qui est nommée "formule de Ptolémée" est à la base de la création de la trigonométrie. De cette relation métrique, on déduira des relations entre les angles parce que l'inscriptibilité d'un quadrilatère dans un cercle est un lien entre conditions métriques et conditions angulaires

Sans aborder un difficile historique, montrons seulement comment, de la formule de Ptolémée, on déduit la formule d'addition des angles.



Comme on ne considère ici que des angles saillants, un demi-cercle nous suffit, de diamètre CB . Deux points de l'arc de cercle, A et D, sont sommets de deux triangles rectangles. Les propriétés de l'angle inscrit assurent la similitude des triangles EAD, ECB, donc $\frac{EA}{EC} = \frac{d}{d'}$

Or, par définition $\cos\gamma = \frac{CD}{d'}$; $\cos\beta = \frac{AB}{d'}$; $\sin\gamma = \frac{c'}{d'}$; $\sin\beta = \frac{c}{d'}$

$$\cos\theta = \cos(\beta+\gamma) = \frac{EA}{EC} = \frac{d}{d'}$$

Donc [AB . CD = cc' + dd'] donne

$$\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\ \cos\gamma - \sin\beta\ \sin\gamma$$

Remarque.

Pour obtenir la formule d'addition qui introduit la trigonométrie, il aurait suffit de démontrer la formule de Ptolémée dans le cas particulier où un côté du quadrilatère est diamètre du cercle circonscrit, mais cette restriction simplifierait-elle la démonstration ? Non ... en tout cas pour les démonstrations sans appel à la trigonométrie que nous avons exposées (n° 4, 5, 6, 7, 8).

II - RETOUR A L'ESSENTIEL

On ne peut qu'être frappé par la variété des chemins qui aboutissent aux formules en question. C'est qu'elles ne concernent que des intersections de segments, les sommes, produits, rapports de leurs longueurs, ce qui semble sans lien direct avec l'hypothèse d'inscriptibilité du quadrilatère. On peut étudier successivement ce que signifient :

A - **L'existence d'un quadrilatère** et ce qu'entraîne l'hypothèse **d'inscriptibilité**

B - **La structure combinatoire de la conclusion** exprimée par les formules algébriques.

C - **La réalisation géométrique** de cette structure.

Ne peut-on comparer cette situation à celle du travail du sculpteur :
- préparer le plâtre,
- construire le squelette qui le soutiendra,
- réaliser la statue en modelant le plâtre autour du squelette suivant le rêve de l'artiste.

Etudions ces trois points pour mettre en évidence le travail du mathématicien.

A - LA SITUATION ETUDIEE

La recherche de la démonstration d'une ou deux formules relatives au quadrilatère inscriptible ne met pas en évidence l'ensemble de la situation. L'étude faite conduit à concevoir un plan d'ensemble.

Il s'agit de 4 longueurs données.

1) **Existence de quadrilatères dont les côtés ont ces longueurs.**
Si un quadrilatère répond aux conditions d'existence, 3 familles de quadrilatères articulés conviennent.

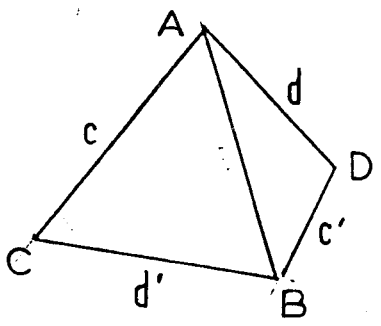
2) **Parmi ces quadrilatères, lesquels sont inscriptibles ?**
Un quadrilatère de chaque famille, donc 3 quadrilatères convexes ont les côtés de longueurs données.

3) **Qu'ont en commun ces quadrilatères inscriptibles ?**
Ils ont même rayon du cercle circonscrit. Ils ont 2 à 2 une diagonale égale, d'où 3 longueurs de diagonales.

4) **Quel système de relations métriques concernant les 4+3 = 7 longueurs introduites caractérise ces quadrilatères ?**
Un système de 2 relations pour chaque quadrilatère, donc 6 relations dont 3 sont indépendantes et les 3 autres en dérivent.

Examinons ces points (en conservant les notations utilisées).

1) **Existence de quadrilatères dont les côtés ont des longueurs données c,c',d,d'.**



D'après les axiomes de longueur, chaque côté est inférieur à la somme des 3 autres, et il suffit de l'exprimer pour le plus grand côté.
Donc $d' < c + c' + d$ si d' est le plus long côté.
Le triangle ABC est déterminé si l'on donne la longueur a vérifiant $d' - c < a < d' + c$.
Le triangle ABD en résulte si $|d - c'| < a < d + c'$.

Or, les inégalités imposées à <u>d'</u> assurent les inégalités $d' - c < d + c' < d' + c$ donc l'existence d'un intervalle pour <u>a</u>. Ainsi la condition imposée au plus grand côté assure l'existence d'une famille de quadrilatères convenables, formant un **quadrilatère articulé** pour l'ordre ... d' |c,d,c',d'| ... d'où **3 quadrilatères articulés** correspondant aux 3 ordres cycliques des 4 côtés.

2) Conditions d'inscriptibilité (Faisons l'étude pour (Q_1))

Condition nécessaire et suffisante exprimée par l'égalité entre angles opposés de $Q_1 : \hat{C} + \hat{D} = \pi$, c'est-à-dire $\cos \hat{C} = -\cos \hat{D}$

En n'introduisant que les côtés des triangles ABC et ABD , la condition s'écrit :

$[\, a^2 =]\, c^2 + d'^2 - 2\, cd' \cos\theta \;=\; c'^2 + d^2 + 2\, c'd \cos\theta$

donc $$\cos\theta = \frac{(c^2 + d'^2) - (c'^2 + d^2)}{2\,(cd' + dc')}$$

valeur unique qui convient bien car

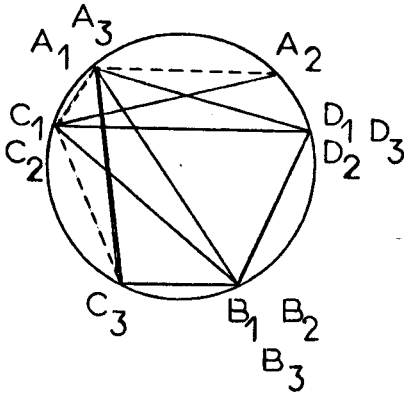
$$-1 < \frac{(c^2 + d'^2) - (c'^2 + d^2)}{2\,(cd' + dc')} < 1$$

s'écrit $(c + d')^2 > (c' - d)^2$, $(c - d')^2 < (c' + d)^2$

condition assurée puisque chaque côté est inférieur à la somme des trois autres.

Ainsi, tout quadrilatère articulé comprend **un et un seul quadrilatère inscriptible**, et la situation étudiée comporte **3 quadrilatères inscriptibles** qui diffèrent par l'ordre cyclique des 4 longueurs données.

3) Comparaison de ces 3 quadrilatères Q_1, Q_2, Q_3



Ils sont inscriptibles **dans un même cercle.**

En effet, à partir de Q_1 (A_1, C_1, B_1, D_1) de côtés successifs c,d,c',d', on obtient Q_2 (A_2, C_2, B_2, D_2) en remplaçant A_1 par son symétrique A_2 par rapport à la médiatrice de CD et Q_3 (A_3, C_3, B_3, D_3) à partir de Q_1 en remplaçant C_1 par son symétrique C_3 par rapport à la médiatrice de AB.

De plus, ces 3 quadrilatères ont 2 à 2 une diagonale égale (comme sur la construction indiquée), donc au total existent **3 longueurs de diagonales** que nous nommons

a et a' pour Q_1 , a' et a" pour Q_2 , a" et a pour Q_3.

4) L'étude des relations métriques sera faite après la partie **(B)** qui en décrit le squelette.

B - SCHEMA DE STRUCTURE

1) Un ensemble de 4 éléments {f, g, f', g'}

3 cycles non orientés	f g g' f'	g f g' p'	g' g f f'

6 paires d'éléments consécutifs - 2 paires par cycle à 2 cycles opération • commutative	// f • g
	f • g'
	// f' • g
	f' • g'
		⊗ f • g
		f • f'
		⊗ f' • g'
		g • g'
			\\ f • f'
			f • g'
			\\ f' • g'
			g • g'

3 paires de paires opposées opération **0** commutative	// Σ_3 ⊗ || (f•g)**0**(f'•g')	// Σ_2 \\ || (f•g')**0**(f'•g)	⊗ Σ_1 \\ || (f•f')**0**(g•g')

2) Un ensemble de 6 éléments { k_1,k'_1 ; k_2,k'_2 ; k_3,k'_3 }

3 couples – Opération Υ commutative	$q_1 = k_1 \Upsilon k'_1$	$q_2 = k_2 \Upsilon k'_2$	$q_3 = k_3 \Upsilon k'_3$
Une relation symétrique	$q_1 \Leftrightarrow \Sigma_1$	$q_2 \Leftrightarrow \Sigma_2$	$q_3 \Leftrightarrow \Sigma_3$

3) Cas particulier. Les éléments k réduits à 3 par

$k_1 = k'_2 = k \qquad k_3 = k'_1 = k' \qquad k_2 = k'_3 = k''$ donc

$$\Pi_1 \left[\begin{array}{l} k'\bullet k \Leftrightarrow [(f\bullet f')\mathbf{0}(g\bullet g')] \qquad k''\bullet k \Leftrightarrow [(f\bullet g)\mathbf{0}(f'\bullet g')] \\ k'\bullet k'' \Leftrightarrow [(f\bullet g')\mathbf{0}(f'\bullet g)] \end{array} \right.$$

Une opération non-symétrique, simplifiable, notée

$$\Pi_2 \left[\begin{array}{l} \left|\frac{k}{k'}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{(f\bullet g)\mathbf{0}(f'\bullet g')}{(f\bullet g')\mathbf{0}(f'\bullet g)}\right| \qquad \left|\frac{k''}{k}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{(f\bullet g)\mathbf{0}(f'\bullet g')}{(f\bullet f')\mathbf{0}(f'\bullet g')}\right| \\ \left|\frac{k'}{k''}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{(f\bullet f')\mathbf{0}(g\bullet g')}{(f\bullet g)\mathbf{0}(f'\bullet g')}\right| \end{array} \right.$$

C - DU SCHEMA AUX FORMULES DE PTOLEMEE

1) Introduisons les éléments mis en oeuvre par le schéma : 4 éléments c ,d ,c',d' sont les longueurs des côtés d'un quadrilatère convexe.

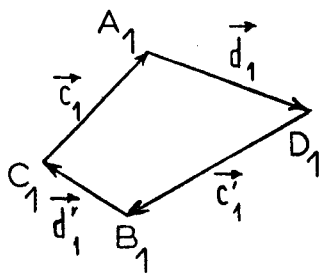
Suivant l'ordre des côtés ayant ces longueurs, nous avons défini 3 quadrilatères

$$Q_1\,(c,d,c',d')\,, \qquad Q_2\,(d,c,c',d')\,, \qquad Q_1\,(d,c',c,d).$$

D'où, dans le plan orienté, 3 ensembles ordonnés de vecteurs

$$Q_1 : (\vec{c_1}, \vec{d_1}, \vec{c'_1}, \vec{d'_1}) \;\|\; Q_2 : (\vec{c'_2}, \vec{c_2}, \vec{c'_1}, \vec{d'_1}) \;\|\; Q_3 : (\vec{d'_3}, \vec{d_3}, \vec{c'_3}, \vec{c_3}),$$

avec pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $|\vec{c_i}| = c$, $|\vec{d_i}| = d$, $|\vec{c'_i}| = c'$, $|\vec{d'_i}| = d'$



$$\vec{c_i} + \vec{d_i} + \vec{c'_i} + \vec{d'_i} = 0$$

Intéressé à la fois aux longueurs et aux angles, passons **dans le plan complexe**. Désignons les nombres complexes

y_i pour $\vec{c_i}$, y'_i pour $\vec{c'_i}$, z_i pour $\vec{d_i}$, z'_i pour $\vec{d'_i}$

donc $\mathbf{y_i + y'_i + z_i + z'_i = 0}$ pour $i \in (1, 2, 3)$

- Les **vecteurs diagonaux** des quadrilatères. Suivons Q_1. Aux vecteurs

$$\begin{cases} \vec{a_i} = (\vec{c_1} + \vec{d_1}) = -(\vec{c'_1} + \vec{d'_1}) \\ \vec{a'_i} = (\vec{c_1} + \vec{d'_1}) = -(\vec{c'_1} + \vec{d_1}) \end{cases} \quad \begin{matrix}\text{correspondent les} \\ \text{nombres } \textbf{complexes} \\ \textbf{diagonaux}\end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + z_1 = -(y'_1 + z'_1) \\ x'_1 = y_1 + z'_1 = -(y'_1 + z_1) \end{cases}$$

2] Suivons le schéma.

Donnons aux signes "•" et "Υ" le sens de **produits** de nombres complexes, au signe " |—| " le sens de **quotient** et au signe " <=> " le sens de **déduction** logique. Peut-on donner au signe " **0** " un sens satisfaisant ?

Des définitions résulte , pour Q_1 ,

$$x_1\, x'_1 = (y_1 + z_1)(y_1 + z'_1) = z_1\, z'_1 + y_1\,(y_1 + z_1 + z'_1)$$

donc $\mathbf{x_1\, x'_1 = z_1\, z'_1 - y_1\, y'_1}$ d'où, en module pour tout quadrilatère

$$(\Pi) \begin{cases} a_1\, a'_1 \le cc' + dd' \\ a_2\, a'_2 \le c'd' + dc' \\ a_3\, a'_3 \le cd' + c'd' \end{cases}$$

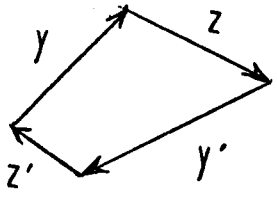
On voit qu'on a donné au signe "**0**", entre 2 nombres complexes u et v la signification $u\,\mathbf{0}\,v = |u - v|$.

3) Conditions d'inscriptibilité

Nous avons vu en $\mathbf{A_3}$) que, dans le cas de l'inscriptibilité, les quadrilatères $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{Q_3}$, ont 2 à 2 une diagonale de même longueur et nous avons posé

$$a_1 = a'_2 = a \ , \quad a_2 = a'_3 = a'' \ , \quad a_3 = a'_1 = a'$$

La condition d'inscriptibilité s'exprime par une égalité entre les arguments de nombres complexes et il suffit de l'exprimer pour un des quadrilatères. Nous choisissons $\mathbf{Q_1}$ et allégeons l'écriture en omettant les indices $_1$.



L'inscriptibilité s'exprime par

$$(\text{Arg } y - \text{Arg } z) + (\text{Arg } y' - \text{Arg } z') = \Pi$$

d'où $\quad (\text{Arg } y + \text{Arg } y') = (\text{Arg } z + \text{Arg } z') + \Pi$

c'est-à-dire $\quad \text{Arg } (y, y') = \text{Arg } (z, z') + \Pi$

donc les vecteurs représentant yy' et zz' sont parallèles de sens contraires.

Par suite

$$|\, yy' - zz' \,| = |\, yy' \,| + |\, zz' \,| \quad \text{pour } \mathbf{Q_1} \ , \quad \text{donc} \quad \mathbf{aa'_1 = cc' + dd'}$$

et, avec la remarque notée plus haut, dans le cas d'inscriptibilité,

$$aa' = cc' + dd' \quad \text{et, de même,} \quad a'a'' = cd' + dc' \quad \text{et } a''a = cd + c'd'$$

d'où $\quad \dfrac{a}{a'} = \dfrac{cd + c'd'}{cd' + dc'} \ ; \quad \dfrac{a'}{a''} = \dfrac{cc' + dd'}{cd + c'd'} \ ; \quad \dfrac{a''}{a} = \dfrac{cd' + dc'}{cc' + dd'}$

ensemble des formules de $(\mathcal{P}_2)$

==========

Ainsi, nous avons parcouru la route logique suggérée par la structure du problème.

Après la réponse à la question préalable : "De quoi s'agit-il ?", on a constaté que l'algèbre des nombres complexes s'y adapte parfaitement. Il a suffit alors d'un pas géométrique (une égalité d'angle exprime l'inscriptibilité) pour atteindre la conclusion.

Mais on n'en apprécie que mieux l'élégance de la géométrie !

III - RETOUR AU REEL ELEMENTAIRE

De notre étude se dégagent 2 stratégies d'esprit différent :

1) **Analyser les hypothèses** pour déterminer la structure de la situation et développer cette structure.
   L'étude apparaît comme une réalisation particulière de cette structure. Ceci engage à chercher d'autres réalisations par extension ou généralisation.
2) **Analyser les conclusions** demandées pour en déterminer les particularités qui suggèrent des voies de déduction.
   Ceci restreint l'étude à la situation mais permet d'approfondir celle-ci, de mieux connaître sa spécificité.
   Nous présentons ces 2 stratégies en conclusion de notre étude.

Rappel des notations $a = u + v$, $a' = u' + v'$, c, c', d, d'

3 cycles (c,d,c',d') ; (d,c,c',d') ; $d',d,c'c)$

$(\mathcal{I})$: **Inscriptibilité** $(\mathcal{P}_1)$: $aa' = cc' + dd'$ $(\mathcal{P}_2)$: $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{cd + c'd'}{cd' + dc'}$

A - EXEMPLE DE LA PREMIERE STRATEGIE

Structure de l'hypothèse		**réalisation géométrique**
(i) $uv = u'v'$		$(J) \Leftrightarrow$ **double similitude**
Notation $\left[\begin{array}{l} \rho_1 = \dfrac{u'}{u}, \quad \rho_2 = \dfrac{v'}{u} \\ (i) \Leftrightarrow \left[\rho_1 \rho_2 = \dfrac{v}{u}\right] \end{array}\right.$	(N)	$\rho_1 = \dfrac{d'}{d}, \quad \rho_2 = \dfrac{c'}{c}$
Déduction		**Notation**
$(i) \begin{cases} u' + v' = u(\rho_1 + \rho_2) \\ u + v = u(1 + \rho_1 \rho_2) \end{cases}$		$a = u + v \quad a' = u' + v'$
$\dfrac{u' + v'}{u + v} = \dfrac{\rho_1 + \rho_1}{1 + \rho_1 \rho_2}$	(I)	$\dfrac{a'}{a} = \dfrac{\dfrac{d'}{d} + \dfrac{c'}{c}}{1 + \dfrac{d'}{d} \bullet \dfrac{c'}{c}}$
Réciproque		
$\begin{cases} (N) \\ (I) \end{cases} \Rightarrow \left[\dfrac{u' + v}{u + v} = \dfrac{u' + v'}{u\left(1 + \dfrac{u'v'}{u^2}\right)}\right]$		$\dfrac{a'}{a} = \dfrac{cd' + dc'}{cd + c'd'}$ $(\mathcal{P}_1)$
$\Downarrow$		**L'inscriptibilité est**
$v = \dfrac{u'v'}{u}$		**équivalente à** $(\mathcal{P}_2)$
Conclusion	$(i) \Leftrightarrow (I)$	$(J) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_2)$

Nous n'étudions pas ici $(\mathcal{P}_1)$. L'étude est incomplète.

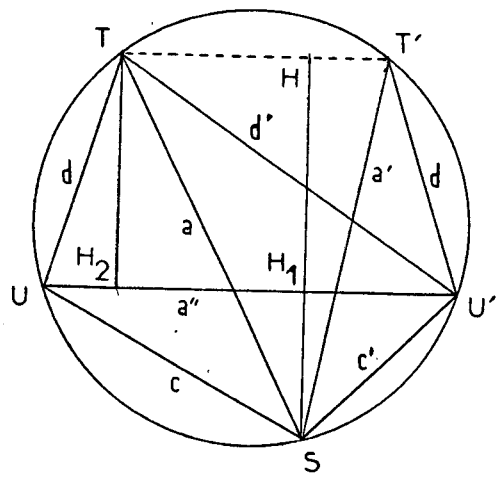
B - EXEMPLE DE LA DEUXIEME STRATEGIE

1) **L'observation des conclusions** $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ montre que, seuls, les produits des 2 côtés des quadrilatères inscriptibles en question interviennent dans les conclusions ainsi que le produit de 2 diagonales. D'où l'appel au théorème connu :
"Dans un cercle, le produit de 2 côtés d'un triangle inscrit est égal au produit du diamètre par la hauteur correspondant au 3ème côté" - D'où, pour l'ensemble des triangles inscrits dans un cercle :
(Th) "Le produit de 2 côtés est proportionnel à la hauteur relative au 3ème côté".

2) **On étudie les quadrilatères inscrits dans un cercle dont les côtés ont pour longueur c,c',d,d'.** Une paire **de côtés** détermine **un triangle inscrit dont le 3ème côté** est diagonale du quadrilatère. D'où 6 triangles dont les périmètres sont formés des longueurs

(c,d,a') et (c',d',a') , (c,d',a) et (c',d,a) , (c,c',a") et (d,d',a")

déterminant 3 quadrilatères convexes, de diagonales a,a',a".
- **Chaque paire** (a,a') , (a',a") , (a",a) de ces longueurs appartient à un triangle inscrit d'un second type.



3) Construction d'un triangle inscrit de côtés a et a'
Partons par exemple du triangle SUU' (SU = c, SU'= c', UU'= a") et construisons son cercle circonscrit. Puis portons UT=U'T' = a' , d'où ST = a , ST'= a' et U'T = d' . Le triangle TST' obtenu vérifie TT' // UU'.

4) Construisons les hauteurs SH de (TST'), SH_1 de (SUU') et TH_2 de (TUU'). Elles sont liées par $\mathbf{SH = SH_1 + TH_2}$. D'où, par **(Th)**,

$(\mathcal{P}_1)$ **aa' = cc' + dd'** et, de même **a'a" = cd' + dc'** et **a'a" = cd + c'd'**

Il en résulte $(\mathcal{P}_2)$ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{cd+cd'}{cd'+dc'}$, $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{cc'+dd'}{cd+c'd'}$, $\dfrac{a''}{a} = \dfrac{cd'+dc'}{cc'+dd'}$

Et les réciproques ?
Si l'on atteint son but en se laissant glisser sur une piste en forte pente, il faut s'attendre à des difficultés pour remonter.

Réflexions finales

Il faut mettre fin à cette exploration qui risquerait de concerner tous les chapitres de la géométrie élémentaire et tous les aspects de la didactique!

L'étude de la formule de Ptolémée semble appropriée à nos exigences qui ne sont pas celles de l'écolier chargé d'arriver à une conclusion déterminée à partir d'une hypothèse déterminée en utilisant une méthode déterminée et qui, finalement, triomphe lorsqu'il écrit C.Q.F.D.

Etudier les quadrilatères plans convexes, c'est travailler sur des objets bien déterminés (nous avons, au début, montré que les figures comprennent des angles de toutes valeurs, ce qui était totalement inutile, mais matérialisait en quelque sorte les objets considérés).

La propriété d'inscriptiblité dans un cercle a une signification claire et familière, mais elle peut s'exprimer de diverses façons : appel au centre et au rayon - aux angles inscrits égaux ou supplémentaires - aux produits des segments du "croisillon" des diagonales - aux similitudes - aux hauteurs ou aires de triangles - à la transformation par inversion et même au plan complexe ... que de voies possibles vers le but proposé : découvrir des relations métriques entre les côtés et les diagonales !

Puis le problème de la réciproque, **restreinte** si la conclusion est "l'égalité obtenue suffit à assurer l'ancienne hypothèse (ou n'y suffit pas)", **complète** si les cas d'inégalité sont étudiés aussi. Les exigences ne sont pas toujours pleinement satisfaites.

Nous avons joint à l'étude des formules de Ptolémée celle d'une formule utilisée pour les premières démonstrations : cette formule de Stewart aurait donc, logiquement, dû être étudiée au début - Elle ne semblait guère intéressante; sa forme compliquée ne se prête pas à un élégant énoncé facile à mémoriser! - Elle se présente comme celle de Ptolémée : étudier un quadrilatère convexe dont les angles satisfont à une condition. Celle-ci , concernant Stewart, est la plus simple et, en fait, se démontre très aisément - Mais elle n'introduit pas les côtés symétriquement, et la

réciproque est d'autant plus difficile que le théorème direct est simple - remarque que nous avons déjà faite en d'autres occasions. La vraie nature de la formule de Stewart la rattache à une autre théorie.

Une évidence s'impose lorsqu'on fait l'effort de mise au point d'un texte mathématique : il y a un va-et-vient entre la technique qui exploite par la logique les propriétés de la situation mathématique proposée dans l'hypothèse et, d'autre part, l'appel à l'imagination qui, en confrontant les conclusions possibles aux hypothèse, trouve les voies à parcourir pour atteindre le but.

L'Art dirige et complète la technique.

Lucienne FELIX
(Eté 1990)

TABLE DES MATIERES

-oOo-

p. 2 **Introduction**

p. 3 Justification de l'étude

p. 4 **Eléments introduits** dans l'étude du quadrilatère convexe

1) Notations générales

2) Conditions d'inscriptibilité

p. 6 **Première partie : diverses démonstrations des formules de Ptolémée**

p. 6 Première démonstration : triangles dont un côté est diagonale

p. 7 Deuxième démonstrtation : égalité des angles inscrits

p. 8 Troisième démonstration : trigonométrie - homologie des sinus

p. 9 Quatrième démonstration : le croisillon des angles

p. 11 Cinquième démonstration : un point utile

p. 12 Sixième démonstration : une droite utile

p. 13 Septième démonstration : inversion

p. 14 Huitième démonstration : hauteurs - Appel à Q_1, Q_2, Q_3

p. 15 Neuvième démonstration : des aires

p. 16 Dixième démonstration : dans le plan complexe

p. 18 **Deuxième partie : réflexions sur les démonstrations précédentes**

p. 18 I. ***Préliminaires***

A) Rappel de quelques définitions et notations

p. 22 B) L'objet de notre étude

II. ***Examen des diverses démonstrations***

sur la première démonstration

p. 26 Sur la deuxième démonstration

p. 27 Sur la troisième démonstration

p. 29 Sur la quatrième démonstration

p. 30 Etude de la quatrième démonstration

p. 30 1) le problème des réciproques

p. 31 2) Appel à des fonctions

p. 33 Sur la cinquième démonstration

p. 34 Sur la sixième et la septième démonstration

p. 36 Sur les huitième et neuvième démonstrations

p. 37 Sur la dixième démonstration

p. 39 III. ***Note sur les formules de Chasles et de Stewart***

p. 39 A) Usage de ces formules

B) Etude de la formule de Stewart

p. 41 Suite de l'étude de la formule de Stewart

p. 42 Examen des conséquences de la formule de Stewart

p. 43 Autre démonstration

p. 45 C) Qu'est vraiment la formule de Stewart ?

p. 47 D) Exposé final de l'étude de la formule de Stewart ?

p. 49 **Remarque générale**

p. 50 **Conclusion de la deuxième partie**

p. 51 **Troisième partie**

p. 51 I. *Note historique*

p. 52 II. *Retour à l'essentiel*
p. 53 A) La situation étudiée
p. 55 B) Schéma de structure
p. 56 C) Du schéma aux formules de Ptolémée

p. 58 III. *Retour au réel élémentaire*
p. 59 A) Exemple de la première stratégie
p. 59 B) Exemple de la deuxième stratégie

p. 60 **Réflexions finales**

QUE CHOISIR ?

Un peu de géométrie très élémentaire

par
Lucienne FÉLIX

"Dans la recherche et surtout dans les applications, la plus grande difficulté est souvent de reconnaître quelles sont, parmi les données, celles que l'on doit utiliser."

J. Hadamard.

ENONCE PROPOSE :

Trois points A, B et C sont sur un cercle $\mathscr{C}$
Les milieux des arcs successifs $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$ sont nommés A', B', C'.
Déterminer la mesure de l'angle de AA' et B'C'.

I - Etude systématique du problème.

1 - De quoi s'agit-il ?

Précisons les notations.

Un cercle $\mathscr{C}$	centre O	rayon r
3 points de $\mathscr{C}$	A, B, C	segments OA, OB, OC, AB, BC, CA
3 milieux des côtés	A_1, B_1, C_1	segments OA_1, OB_1, OC_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1
3 milieux d'arcs	A', B', C'	$A' = OA_1 \cap \mathscr{C}$ $B' = OB_1 \cap \mathscr{C}$ $C' = OC_1 \cap \mathscr{C}$

Relations

$OA = OB = OC = r$

$BA_1 = A_1C$ $\quad$ $CB_1 = B_1A$ $\quad$ $AC_1 = C_1B$

$\widehat{BA'} = \widehat{A'C} = \alpha$ $\quad$ $\widehat{CB'} = \widehat{B'A} = \beta$ $\quad$ $\widehat{AC'} = \widehat{C'B} = \gamma$

Théories connues

- Addition des arcs, addition des angles.
- Correspondance entre arcs, angles au centre, angles inscrits
- Angles de 2 cordes se coupant à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle.
- Tout angle a 2 bissectrices perpendiculaires
  Tout arc a 2 milieux diamétralement opposés.
  D'où 3 points A", B", C" du cercle, vérifiant :
  $AA' \perp AA''$ $\quad$ $BB' \perp BB''$ $\quad$ $CC' \perp CC''$
  et 4 points de concours des bissectrices.
  $J = AA' \cap BB' \cap CC'$ - $J_A = AA' \cap BB' \cap CC'$ - J_B - J_C
- Somme des angles d'un triangle.
- Les 9 points du cercle et le centre O définissent 9 rayons et $\frac{9 \times 8}{2} = 36$ cordes, c'est-à-dire 45 segments formant $\frac{45 \times 44}{2} = 990$ angles à comparer 2 à 2 !

La question est bien *"que choisir ?"* pour en déduire la conclusion demandée.

La méthode générale comporte 4 étapes :

a - Déterminer des sous-ensembles $(\mathscr{E})$ d'éléments suffisants pour caractériser la situation, en fait ici, suffisants pour construire les éléments qui complètent la description de la situation.

b - Choisissant un de ces ensembles $(\mathscr{E})$, faire une figure comprenant les éléments qui semblent pouvoir permettre de faire une chaîne de déductions utilisable.

c - Construire une chaîne logique avec ces éléments qui aboutisse à la conclusion demandée. Figure définitive.

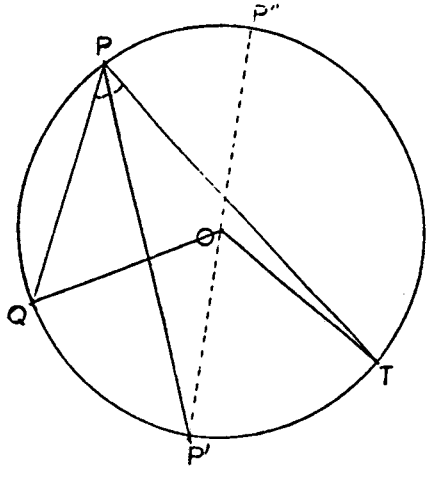
d - Examiner cette chaîne pour obtenir une rédaction convenable, courte si possible.

Compléter par des remarques : comparaisons entre diverses méthodes qui ont abouti ou non. Extensions possibles de la question traitée.

Des notations et dénominations.

Des conventions particulières au problème doivent être éventuellement explicitées.

L'usage permet de noter par le même signe un élément géométrique et sa mesure par une unité précisée. Ici nous allons prendre comme unité d'angle **l'angle droit** et comme unité d'arc le **demi-cercle**.



Trois points quelconques du cercle étant donnés, P, Q, T et P' étant milieu de l'arc QT, nommant φ la mesure de l'arc $\overset{\frown}{QP'}$, nous pouvons écrire :

$\varphi = \overset{\frown}{QP'} = \overset{\frown}{P'T} = 1/2\ \overset{\frown}{QT}$

$\varphi = (\widehat{PQ, PP'}) = (\widehat{PP', P'T}) = 1/2\ (\widehat{PQ, PT})$

$\varphi = \widehat{QPP'} = \widehat{P'PT} = 1/2\ \widehat{QPT} = 1/4(\widehat{QOT})$

Notons pourtant que si le texte n'utilise que des angles, nous pouvons convenir de prendre comme unité le radian, et l'angle droit sera défini par $\widehat{xOy} = \frac{\pi}{2}$

Notons qu'avec notre choix d'unité, les paramètres introduits α, β, γ sont liés par :

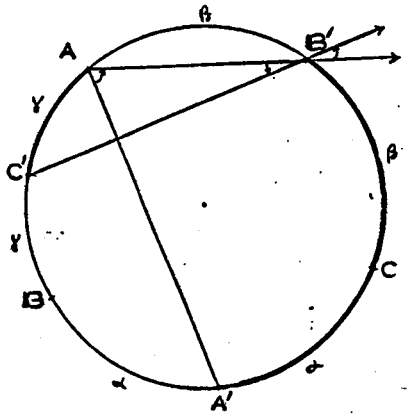
$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 1}$$

Diverses solutions du problème

Nous allons suivre l'énoncé et partir du cercle $\mathscr{C}$ et de 3 de ses points A, B, C pris arbitrairement, d'où les points A', B', C' et les mesures α, β, γ. La disposition des points étant connue nous simplifierons la rédaction en nommant les arcs et angles de façon qu'ils soient tous positifs, compris entre 0 et 2, un sens d'orientation étant choisi dans le plan.

1ère solution

[Angles opposés par les sommets]



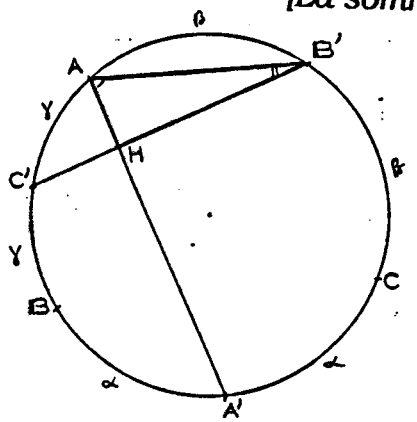
$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A'B'} = \alpha + \beta \\ \widehat{AC'} = \gamma\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{A'B'} + \widehat{AC'} = 1$$

donc $(\widehat{AA'}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{c}') = 1$
donc $(AA', c') = 1$, c'est à dire AA' perpendiculaire à B'C'

C.Q.F.D.

2ème solution

[La somme des angles d'un triangle vaut 2]

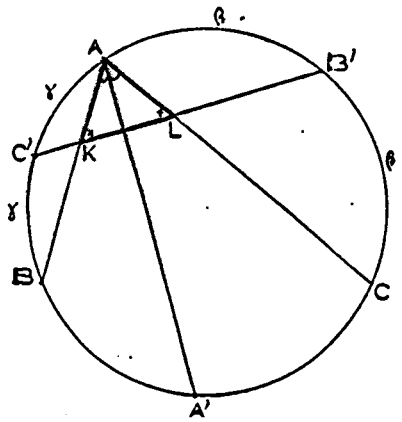


Soit H l'intersection des cordes AA' et B'C'.
Dans le triangle AHB', nous connaissons
$\widehat{A'AB'} = \alpha + \beta$
$\widehat{AB'C'} = \gamma$
La somme de ces angles vaut 1 donc le troisième angle vaut 1. droit.

C.Q.F.D.

3ème solution

[2 cordes se coupant à l'intérieur du cercle]

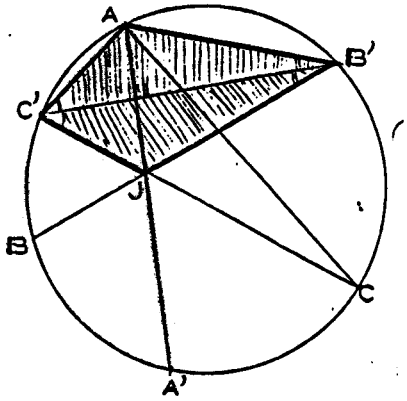


AA' est bissectrice de $\widehat{BAC}$. Soient K et L les intersections de B'C' avec AB et AC
$\widehat{B'KA} = \beta + \gamma = \widehat{ALC}$
Le triangle KAL est isocèle, donc sa bissectrice AA' est perpendiculaire à la base KL, c'est à dire B'C'.

C.Q.F.D.

4ème solution

[Symétrie - Bissectrices concourantes]

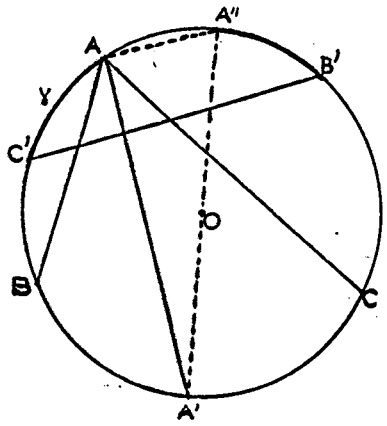


Les 3 bissectrices AA', BB' et CC' du triangle ABC se coupent en J, donc les triangles AC'B' et JC'B' sont symétriques par rapport à B'C'. Par suite AJ est perpendiculaire à B'C'. Or la droite AJ est la droite AA'.
Ainsi AA' est perpendiculaire à B'C'.

C.Q.F.D.

5ème solution

[Une bissectrice extérieure]

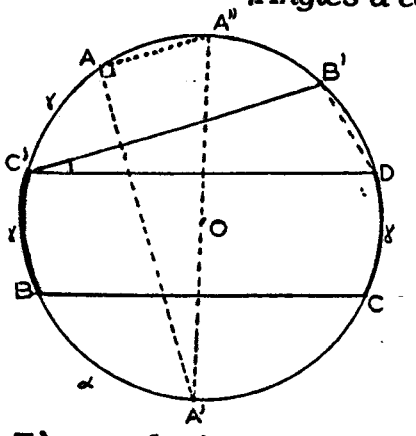


Soit A'' le milieu de l'arc $\widehat{CAB}$. La corde AA'', bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$ est perpendiculaire à AA'. Or,
$\widehat{B'A''} = \widehat{CA''} - \widehat{CB'} = 1/2\ (\widehat{CAB}) = (\beta + \gamma) - \beta$
$\widehat{B'A''} = \gamma = \widehat{AC'}$
Ainsi C'B' est parallèle à AA'', donc à AA'.

C.Q.F.D.

6ème solution

[Angles à côtés respectivement perpendiculaires]

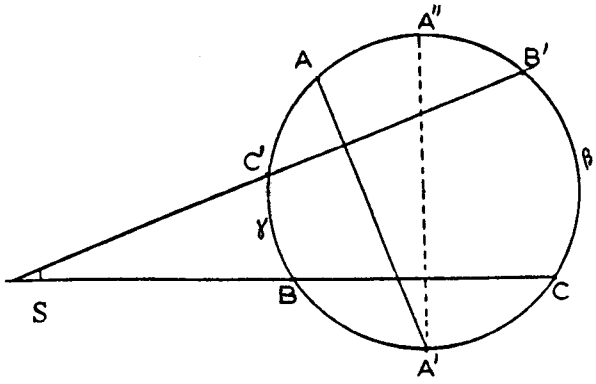


Traçons C'D parallèle à BC. Le point D vérifie $\widehat{DB'} = \widehat{CB'} - \widehat{CD} = \beta - \alpha$
D'autre part, A'', diamétralement opposé à A', vérifie $\widehat{A''A} = 1 - (2\gamma + \alpha) = \beta - \gamma$
Ainsi $\widehat{DC'B'} = \widehat{A''A'A}$.
De sorte que DC' ⊥ A'A'' entraîne C'B' ⊥ AA'

C.Q.F.D.

7ème solution

[Angle de 2 cordes se coupant hors du cercle]

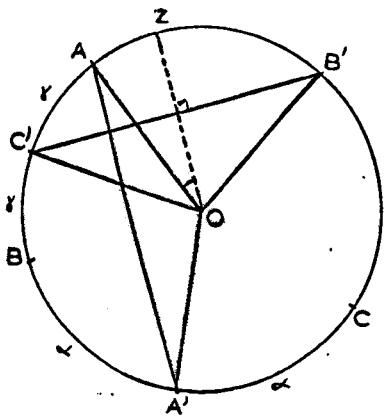


Les droites BC et C'B' se coupent en S.
L'angle de ces cordes est $\widehat{CSB'} = \beta - \gamma$.
Or comme plus haut : $A''A'A = \beta - \gamma$
Donc A''A' ⊥ CS ⇒ SB' ⊥ AA'

C.Q.F.D.

8ème solution

[Angles au centre - Angles alternes internes]

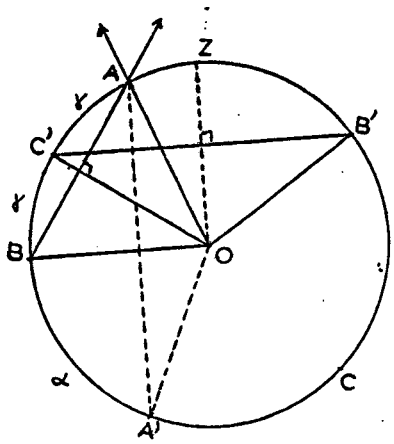


Considérons les deux triangles isocèles AOA' et B'OC'.
Soit OZ médiatrice de B'C'.
$\widehat{ZA} = \widehat{B'A} - \widehat{B'Z} = \beta - 1/2\,(\beta + \gamma) = 1/2\,(\beta - \gamma)$
donc $\widehat{ZOA} = \beta - \gamma$
Mais $\widehat{A'AO} = 1/2\,(2 - \widehat{AOA'}) = 1 - (2\gamma + \alpha)$
donc $\widehat{A'AO} = \beta - \gamma$
L'égalité $\widehat{ZOA} = \widehat{A'AO}$ est celle de 2 angles alternes internes, donc AA' parallèle à OZ est perpendiculaire à C'B'.

C.Q.F.D.

9ème solution

[Axes de 2 triangles isocèles]



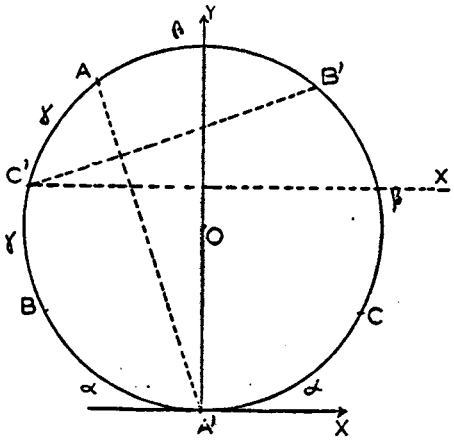
OC' est médiatrice de AB
OZ est médiatrice de C'B'
donc

$(OZ, OC') = 1/2\,(OB', OC') = 1/2\,[2(\beta + \gamma)] = \beta + \gamma$
et $(OZ, OA) = (OA, OB') - (OB', OZ) = \beta - \gamma$
Mais $(AA', OA) = 1/2\,[2 - (OA, OA')]$
$= 1 - (2\gamma + \alpha) = \beta - \gamma$
Ainsi $(OZ, OA) = (AA', AO)$
et AA' est parallèle à OZ, donc perpendiculaire à B'C'

C.Q.F.D.

10ème solution

[Géométrie analytique]



Axes de coordonnées :
A'x : tangente à (𝒞)
A'y : diamètre
Il faut calculer les coordonnées de C' et B' en fonction de α, β, γ liés par $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
Nous cherchons seulement les coefficients angulaires de AA' et de C'B'.
Or $(x, AA') = \alpha + 2\beta = 1 + (\beta - \gamma)$
et $(x, C'B') = (\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma) = \beta - \gamma$
Sans autres calculs, nous obtenons le résultat demandé : $(\widehat{C'B', A'A}) = 1$. Droit.

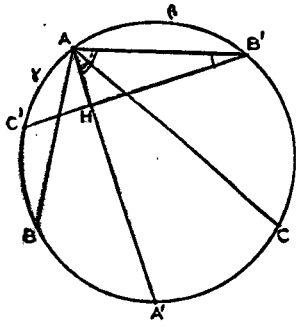
C.Q.F.D.

Examen des solutions proposées

Ces solutions ne sont guère distinctes par le fond, mais leurs formes sont variées pour leur rédaction comme il apparait par les différentes figures dessinées.

• **L'ensemble** $\mathscr{C}$ choisi est toujours le même : la circonférence $\mathscr{C}$ et les trois points arbitraires A, B, C de cette circonférence, donc, A et 2 des 3 nombres α, β, γ liés par $\alpha + \beta + \gamma = 1$
La conclusion demandée distingue le point A, donc, en réalité, $\mathscr{C} = \{A, \beta, \gamma\}$ avec $\beta + \gamma < 1$.
C'est bien le cas pour la 3ème solution. Pour la seconde, il faudrait dans cet esprit, ne pas introduire α dans la démonstration.

Second exposé de la 2ème solution.



Données : $\mathscr{C}$, A, β, γ , $\beta + \gamma < 1$
AB'C' = γ
A'AB' = 1/2 BAC + CAB' = $[1 - (\beta + \gamma) + \beta] = 1 - \gamma$
donc AB'C' + A'AB = 1. droit.
Ainsi dans le triangle AHB', $\widehat{AHB'}$ = 1. droit.

C.Q.F.D.

Notons qu'introduire α comme paramètre auxiliaire peut être utile en allégeant l'écriture.

Remarque : L'énoncé donné frappe par le contraste entre le rôle symétrique des points A, B, C, donc aussi des points A'B'C' dans la situation et du rôle spécial de A dans la conclusion. En réalité la question posée est : "Démontrer l'ensemble des 3 relations AA' ⊥ B'C', BB' ⊥ C'A', CC' ⊥ A'B' " mais la solution étudie chaque relation séparément : "De même..."

Construire effectivement tous les éléments en question à partir de ceux de $\mathscr{C}$ n'est pas indispensable : ceux qui interviennent dans le raisonnement suffisent. Les lignes de construction, dessinées en pointillé ou en couleur peuvent même être effacées (par exemple les petits arcs tracés pour construire une bissectrice). Du reste, une construction précise n'est pas nécessaire au raisonnement, pourvu qu'elle respecte les propriétés topologiques. Pour un problème comprenant plusieurs questions, les esquisses partielles seront utilement complétées par une figure d'ensemble suggestive. Il faut choisir les éléments arbitraires de $\mathscr{C}$ de façon à éviter d'obtenir des figures très particulières : points qui semblent alignés, triangles qui apparaissent comme isocèles ou rectangles, ce qui égarerait aisément l'intuition du chercheur.

Le double langage : celui des arcs, celui des angles, a été utilisé dans l'énoncé. Cela est justifié car la description de la situation par les relations entre arcs est suggestive, inspirant une figure claire et simple. Mais les conclusions sont relatives à des segments. Dans le cours de l'étude, on ne peut se borner à ne considérer que des arcs, donc le second langage s'impose. Les puristes l'adopteront dans les démonstrations, mais nous avons préféré utiliser les deux, librement, pour la clarté et simplicité de la rédaction et de figure. Mais il faut préciser le vocabulaire et la traduction, en particulier l'accord des unités.

La tâche du maître dans l'enseignement élémentaire. Le sujet étant choisi, la **rédaction de l'énoncé** importe. Quel est le but du travail proposé ? Contrôler la connaissance d'un cours enseigné ? Appliquer des théorèmes connus à la situation ? Etudier librement la situation et se poser des "problèmes ouverts" ? La question est-elle "Que remarquez-vous ? Que peut-on tenter de démontrer ?" ou bien simplement "Démontrez que... ?" L'énoncé, sans donner la réponse, peut poser une question précise : "Que vaut tel angle ?" en indiquant une voie : "Utilisez telle propriété pour démontrer telle relation".
(Le lecteur peut chercher quelle rédaction de l'énoncé dirigera l'élève vers l'un ou l'autre des 10 solutions proposées plus haut).
Pour noter les copies, si l'exercice est sujet de concours ou d'examen, on ne peut utiliser **un barème** que si l'on attend un exposé en forme de chaîne d'étapes pré-déterminées.

Le jugement sur l'élève, dans une classe vivante, naît de l'observation de ses réactions : le langage spontané, les esquisses de figure, les voies explorées vite abandonnées ou poursuivies avec un espoir dicté par l'intuition ou par un indice venu de l'extérieur, de la mémoire, d'une particularité de la figure.
Le sujet a-t-il excité la curiosité, l'intérêt, avant, pendant, après la recherche ? Quelles sont les solutions préférées après la correction qui termine le travail ?

Observation sur le thème de l'étude
Nous retenons à notre remarque initiale : le contraste entre la richesse de la situation et la pauvreté de la demande. Il explique l'abondance des solutions résultant de la pêche dans l'amas des outils disponibles. Mais aussi il invite à poursuivre l'étude, à **considérer l'exercice comme introduction ou première question d'un problème élucidant la situation**.

Nous proposons ci-après un énoncé qui examine les propriétés les plus simples de la situation réduite à l'essentiel (nous n'y avons pas inclu ce qui concerne les cercles autre que le cercle $\mathscr{C}$).
Remarque :
Nous suggérons d'utiliser dans la solution les notations introduites plus haut.
La figure d'ensemble est plus expressive si l'on utilise des couleurs mettant en évidence les segments jouant le même rôle dans la structure de la figure.

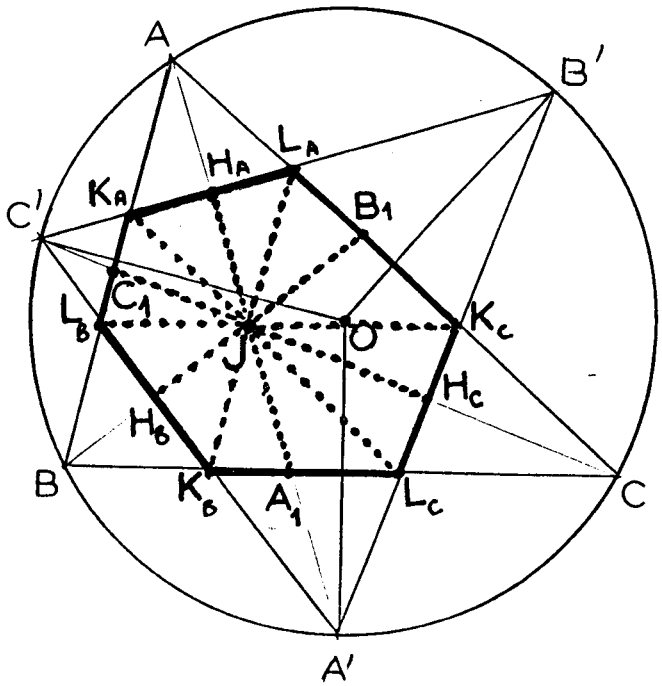
1) 3 points A, B, C sont sur un cercle (𝒞) Les milieux des arcs successifs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ sont nommés C', A', B'. Déterminer la mesure de l'angle des droites AA' et B'C'.

2) Prouver que les droites AA', BB', CC' concourent en un point J. Qu'est J pour les triangles A B C et A' B' C' ?

3) La figure est-elle déterminée par la donnée de 3 points A' B' C' pris arbitrairement sur (𝒞) ?

4) Démontrez le théorème : dans tout triangle, les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés sont points du cercle circonscrit à ce triangle.

5) Considérer les 12 points suivants :

$AA' \cap BC = A_1$	$AA' \cap B'C' = H_A$	$AB \cap B'C' = K_A$	$AC \cap B'C' = L_A$
$BB' \cap CA = B_1$	$BB' \cap C'A' = H_B$	$BC \cap C'A' = K_B$	$BA \cap C'A' = L_B$
$CC' \cap AB = C_1$	$CC' \cap A'B' = H_C$	$CA \cap A'B' = K_C$	$CB \cap A'B' = L_C$

et nommer 2α, 2β, 2γ les mesures des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$. Déterminer les mesures des angles formés par les segments joignant J à chacun des 12 points nommés plus haut et les angles de l'hexagone.
Quelles paires de ces points sont alignés avec J ?