LA NOTION DE FONCTION
DANS L'ENSEIGNEMENT ELEMENTAIRE

\- ° - par Lucienne FELIX

Lorsqu'un chapitre passe pour difficile à enseigner, c'est rarement parce que la notion est réellement complexe et hors de portée. Presque toujours le principal responsable est notre enseignement Les habitudes acquises et l'obéissance aux règles apprises que l'on doit strictement appliquer paralysent l'activité de jeunes esprits déjà formés pour réagir devant une situation nouvelle.

/assez/

C'est ainsi que des enfants de 4 ou 5 ans répondent en jouant aux problèmes du Petit Poucet (1) alors que le rand frère ou la grande soeur, qui vont en classe, restent inertes parce que la maîtresse "n'a pas encore fait cela".

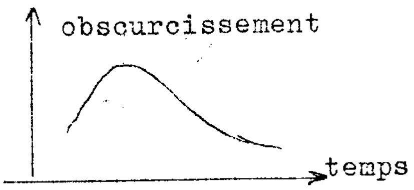
Parmi les chapitres souvent considérés comme difficiles, on cite souvent ceux qui concernent les fonctions. Il y a quelques années, un professeur d'un Institut Technique de Moscou me demanda : "Comment faites-vous ? Mes étudiants n'ont pas assimilé la notion de fonction. Ils connaissent parfaitement les fonctions du programme, fonction bicarrée ou fonction homographique, mais cela ne les avance guère !"

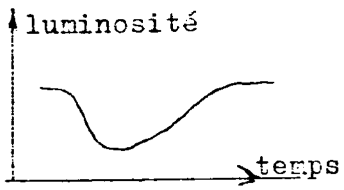
Je répondis en contant une aventure récente :

Un matin, une nuée sombre obscurcit brusquement le ciel de Paris, tellement que les enfants furent frappées d'effroi. Dans ma classe d'élèves de onze ans environ, je dus interrompre le travail commencé et je proposai, pour calmer les esprits, d'indiquer au tableau l'allure du phénomène qui venait de se produire.

On s'entendit rapidement pour tracer horizontalement un axe des temps et l'on discuta sur la façon de faire un "graphe" (je fournis le mot) analogue à celui qui indique, par exemple, la température d'un malade.

Certaines élèves choisirent de représenter l'obscurcissement et d'autres la luminosité. Sans que j'aie à intervenir, sinon pour encourager chacune à s'exprimer, on compara les graphes en les décrivant.





---

(1) Les Cent Problèmes du Petit Poucet. Editions Blanchard, 9, rue de Médicis PARIS 6°

J'ai pu m'assurer de l'état des connaissances des enfants et de leurs possibilités : elles avaient une bonne notion intuitive des conditions de représentation d'un phénomène qui évolue, de la continuité, de la relation entre les vitesses de variation du phénomène (qui deviendra la dérivée) et de la pente de la courbe (qui sera celle de la tangente) ainsi que de la variation de courbure.

La discussion, en fait, a porté sur les instruments de physique qui auraient pu être utilisés pour faire des mesures et non sur la notion de fonction et sa représentation, ce que les enfants considèrent comme évident.

Est-ce à dire que ces notions soient effectivement acquises, assez solides pour servir de base à une construction déductive ? Assurément non ! Mais cette expérience montre de quoi sont capables des élèves non déformés par un enseignement dogmatique. Au lieu d'ignorer toute la richesse acquise par l'enfant au contact de la vie, il nous faut aider cet effort encore inconscient pour qu'il puisse s'épanouir le jour où nous jugerons opportune la systématisation scientifiquement valable.

L'enseignement d'une notion essentielle au niveau des enseignements primaire et secondaire (pour ne rien dire de l'enseignement supérieur !) devrait être la construction, l'axiomatisation de notions déjà familières, mais dispersées, encore vagues et même en partie inconscientes. Alors un certain dogmatisme est obligatoire ; il faudra imposer une marche rigoureuse, imposer des exigences, même si l'élève n'en aperçoit pas immédiatement la nécessité. Du moins les élèves reconnaîtront-ils qu'on leur propose une mise en clair de ce qu'ils possèdent déjà : on démonte et on remonte avec eux les rouages d'une machine-outil plus complexe et délicate qu'ils ne le croyaient, mais déjà connue et utilisée, de sorte qu'on leur demande d'atteindre un niveau plus élevé de compréhension sans sacrifier leurs intuitions antérieures.

Nous n'allons pas proposer ici un chapitre intitulé :"fonctions" qui ferait irruption un jour sans que l'on sache pourquoi. Notre propos est au contraire d'apercevoir le cheminement de cette notion à travers l'expérience mathématique des élèves qui leur donne des occasions d'en percevoir les aspects fondamentaux.

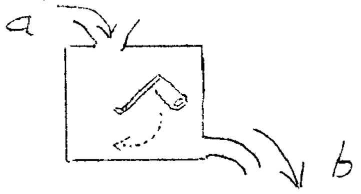
Ceci nous est possible maintenant que la considération des Ensembles et des Relations donne à la pensée et à son expression l'unité et la continuité indispensables.

Les mathématiciens, et encore plus, les cours de mathématiques, ont jusqu'à ce siècle, considéré seulement les fonctions numériques et leur représentation analytique. Nous prenons le mot en un sens bien plus large aussi n'allons-nous pas parler ici d'abord des fonctions numériques bien qu'en fait on puisse et doive les introduire dès le début de la scolarité.

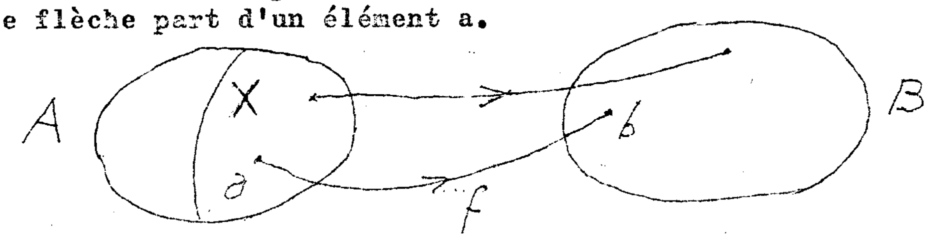
Nous allons décrire trois cheminements de l'étude des fonctions, étant entendu naturellement qu'ils sont suivis simultanément par les élèves jusqu'à converger (vers 15 ans, par exemple, second cycle secondaire de nos lycées français) pour permettre une étude cohérente et définitive à un niveau choisi.

Quand parlons-nous d'une fonction ?

L'idée de fonction, et le dictionnaire en fait foi, est liée à l'idée d'action. On utilise souvent l'image de quelque machine comparable à un moulin à café : on introduit un élèment a par une entrée on tourne la manivelle et il sort l'élèment b par un deuxième orifice.



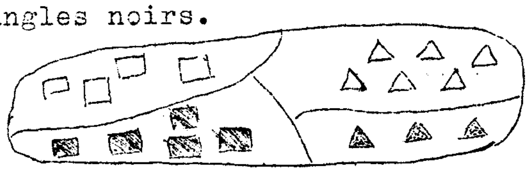
En fait, il faut un ensemble de départ A où sont pris les élèments a, un ensemble d'arrivée dont b est élèment et il faut que la machine à transformer agisse avec déterminisme, c'est à dire que b soit complètement déterminé une fois a choisi. La fonction, sur notre exemple, c'est le moulin (ou, si l'on préfère, l'action du moulin) et non l'ensemble des grains de café, ni l'ensemble des tas de poudre sortant de l'appareil. Notons que la machine peut refuser des grains trop gros ou trop durs ! Finalement, nous distinguons l'ensemble A de départ et son sous-ensemble X où la fonction est définie. L'ensemble d'arrivée B auquel appartiennent les élèments transformés (image des élèments de départ) et la fonction f représentée par une flèche. **Des flèches peuvent avoir le même élément comme arrivée, mais une seule flèche part d'un élément a.**



I- Premier chemin d'étude

1er exemple : Voici un premier contact avec l'étude des fonctions chez des enfants de 6 à 7 ans.

Le matériel comporte 4 sortes d'objets : pour faciliter le dessin, prenons des carrés blancs, des carrés noirs, des triangles blancs et des triangles noirs.



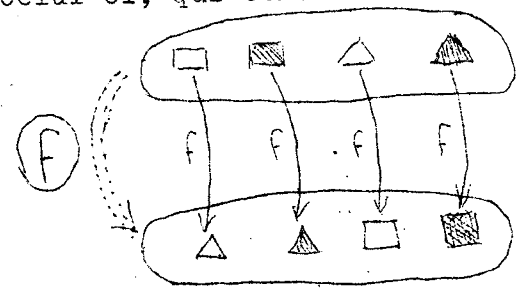
61

Nous faisons agir d'abord deux sortes de machines : celles qui changent la couleur, et celles qui changent la forme : le rôle de ces machines sera naturellement joué par les enfants. On s'entend sur la représentation : c pour celles qui changent la couleur, f pour celles qui changent la forme. Une usine permet à un objet de subir l'action de plusieurs machines successives. Pour pouvoir remplacer une usine par une machine unique, il faut concevoir deux autres types de machines : celles qui changent à la fois couleur et forme, notées c f et aussi une étrange machine qui ne fait rien, la machine neutre n.

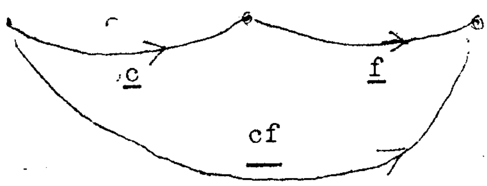
Passons sur les détails de l'expérience (1) et des réactions enfantines et exprimons pour nous, les maîtres, les conclusions qui émergent :

1) chaque machine respecte la partition en classes d'équivalence de sorte que l'ensemble de départ est en réalité l'ensemble des 4 classes.

2) l'ensemble d'arrivée est le même que l'ensemble de départ (les fonctions sont des permutations). Nous le voyons en des tableaux, tels que celui-ci, qui concerne la fonction f



3) nous avons introduit le produit par composition, mais cela nous a imposé une extension de l'ensemble des fonctions. Ce produit de fonction est vraiment une opération entre fonctions parce que la fonction produit ne dépend pas de l'élément de départ.



c * f = c f

Ceci est vrai pour tout élément de départ

(Déjà le quantificateur universel)

(qui s'écrit ∀)

---

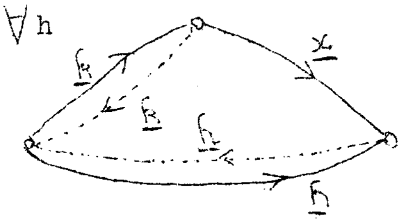
(1) voir compte-rendu d'expériences de Madame PICARD (Institut National de Pédagogie de PARIS).

4) Chaque fonction est son propre inverse

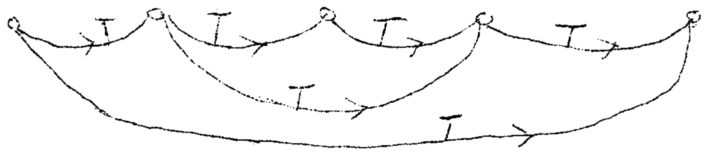
$\underline{c} * \underline{c} = \underline{n}$ $\qquad$ $\underline{f} * \underline{f} = \underline{n}$ $\qquad$ $\underline{cf} * \underline{cf} = \underline{n}$

alors, chose étrange, $\forall k$, $\forall h$

$\underline{k} * \underline{x} = \underline{h}$ $\qquad$ $\underline{x} = \underline{k} * \underline{h}$



5) Le produit par composition est associatif par nature



comme le schéma l'indique clairement.

6) De plus, il est commutatif. (Tout ceci, sauf (5) se découvre par l'examen des usines en action).

7) Une table est facile à faire une fois pour toutes.

	n	c	f	cf
n	n	c	f	cf
c	c	c	cf	f
f	f	cf	n	c
cf	cf	f	c	n

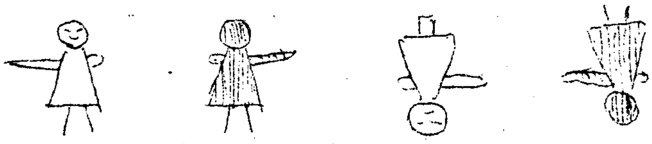
8) Sans plus être obligé de faire des expériences, nous savons simplifier tout produit indiqué et résoudre les équations à une inconnue. Bref, nous avons achevé <u>l'étude algébrique de l'ensemble des fonctions considérées</u> muni de l'opération produit par composition: cet ensemble a une structure de groupe commutatif à 4 élèments (Groupe de Klein).

Qu'est-ce que l'enfant aperçoit de cette structure ? A quoi sert le jeu ? Nous le saurons à l'occasion d'autres jeux qui présentent des structures, soit identiques, soit analogues. Les élèves ont ainsi créé, avec Madame PICARD, un jeu de lettres où ils ont immédiatement reconnu que "c'était pareil".

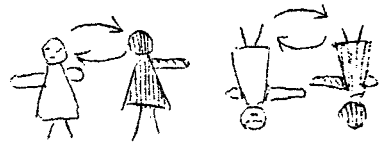
Comme modèles de la même structure, voici des exemples que nous pourrons utiliser plus loin dans cet exposé :

Bulletin de liaison n° 3 de l'Equipe de Recherche

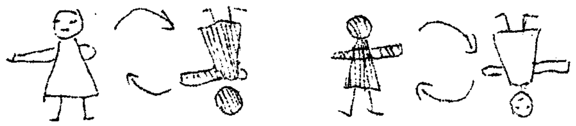
LES POUPEES : L'ensemble de départ est constitué par 4 positions d'une poupée :



et les fonctions seraient notées, par exemple,

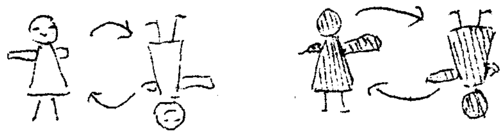


"tourner"



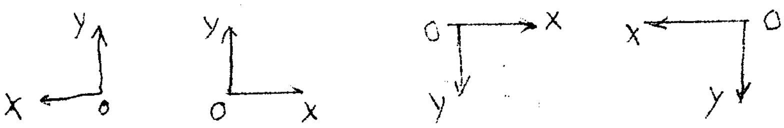
"renverser"

" basculer"



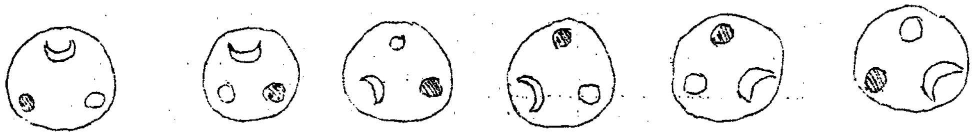
et n, fonction "neutre"

Les angles droits. Ensemble de départ

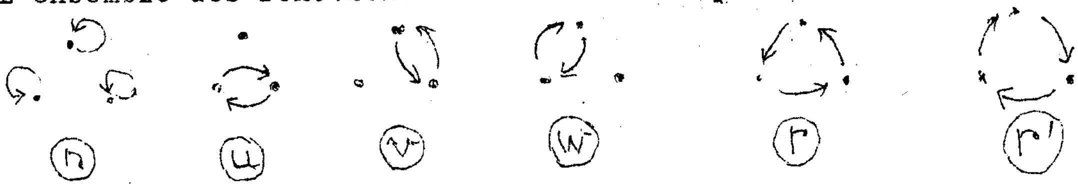


Mêmes fonctions que pour les poupées.

2ème exemple : Ensemble de départ : les six positions de 3 objets



L'ensemble des fonctions est celui des 6 permutations.



L'étude analogue à celle du premier exemple fait apparaître la non-commutativité du produit pas composition.

Faire la table de ce groupe noté multiplicativement est rapide et amusant pour les enfants de 10 à 12 ans et même pour des élèves bien plus âgés, et conduit à des calculs algébriques très

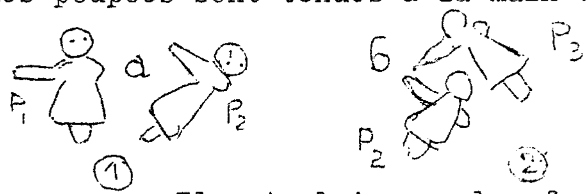
---

Bulletin de liaison n° 3 de l'Equipe de Recherche.

instructifs à oause de la mon commutativité, en particulier la résolution des équations grâce à l'existence des fonctions inverses : (n), (u), (v), (w), sont leurs propres inverses, (r) et (r') sont inverses l'une de l'autre.

3ème exemple : Nos derniers modèles ont un aspect géométrique évident. Nous conduisent-ils aux fonctions classiques de la géométrie : symétries, rotations ?

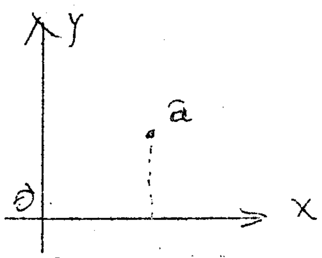
Attention ! Voyons le jeu des poupées. Il est parfait pour étudier les angles au sens vraiment fécond de couple (orienté) de deux demi-droites (angle de l'axe du corps, angle des bras), mais voyons-nous vraiment, par exemple, les fonctions rotations ? Nous savons que l'essentiel est de pouvoir (pour ces fonctions qui sont des permutations) définir le produit par composition. Or, faisons subir à la poupée deux de ces "rotations" et posons le problème de la commutativité.
(Les poupées sont tenues à la main !)



(rotation a) * (rotation b)

Il est clair que les fonctions ne sont pas assez précisées pour qu'on puisse intervertir l'ordre : quelle est la rotation b si je n'ai que la poupée P1 ?

Voici l'occasion de poser en toute précision une situation mathématique : l'ensemble de départ est le plan, ensemble P de points, repéré de façon à pouvoir déterminer tout point particulier (a, par exemple) et pouvoir considérer l'élément générique m, point explorateur, inspecteur **général** pouvant coïncider avec <u>tout</u> élément de l'ensemble de départ.

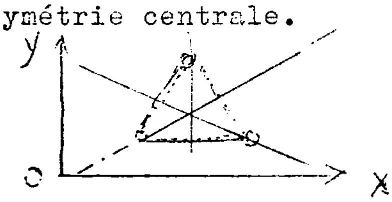


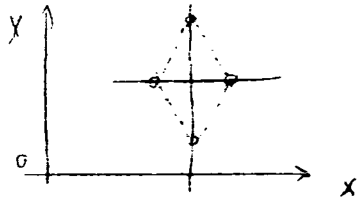
La fonction (rotation, par exemple) agit sur un ensemble infini

$$\forall m,\ m \in P \quad,\ m \xrightarrow{f} m',\ m' \in P$$

Ceci n'empêche pas naturellement de transformer des sous-ensembles (figures). Notre deuxième exemple présente ainsi un ensemble de 3 points : les fixant aux sommets d'un triangle équilatéral, on considérera 3 symétries axiales et deux rotations d'un tiers de tour.

Le premier exemple nous conduit à considérer les sommets d'un losange, deux symétries axiales d'axes perpendiculaires et une symétrie centrale.

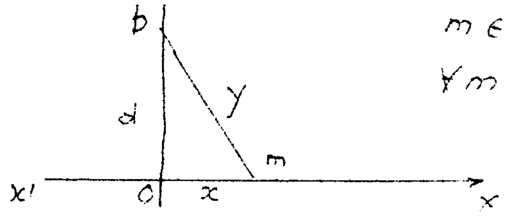




II- Second Chemin d'Etude

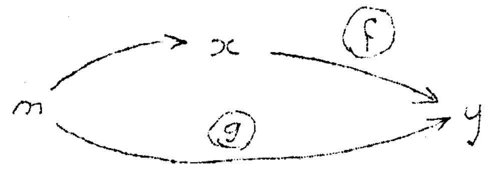
Il s'agit de prolonger sur des exemples plus précis ce qui a été dit plus haut à propos du phénomène d'obscurcissement, c'est à dire de préciser les fonctions qui se présentent sans user systèmatiquement des nombres et, en tout cas, sans connaître de formules permettant de calculer les valeurs images. C'est ainsi que le maître fait noter la croissance du haricot ou observer l'inclinaison de l'aiguille d'une balance. En somme, il s'agit de souligner que l'objet de l'étude n'est pas une figure spéciale, un exemple particulier, mais un ensemble de figures, un type de situation.

<u>1er exemple</u> : Au cours de géométrie, on vient de définir perpendiculaires et obliques. Posons Ob = d, Om = x, bm = y. Nous étudions les fonctions indiquées dans le schéma

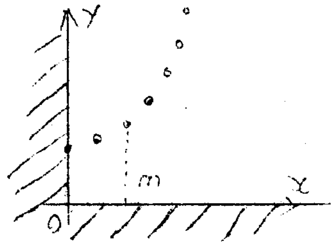


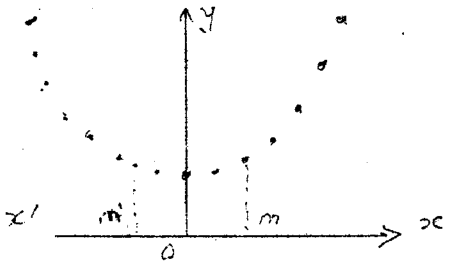
$m \in x'x$

$\forall m$,

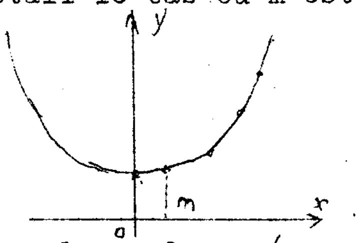


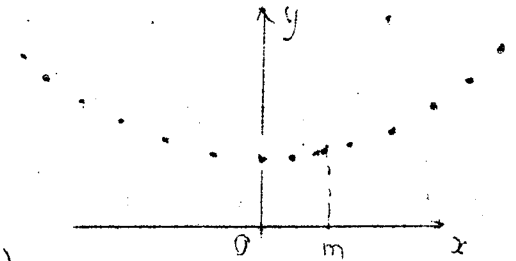
Les distances étant reportées au compas à pointes sèches, les enfants construisent le graphe par points de la fonction f ou bien de la fonction g.





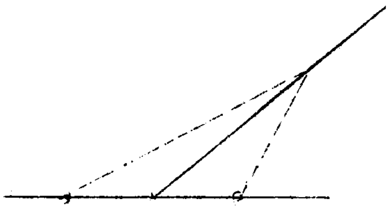
Le sens de la continuité demande que l'on joigne les points du graphe par une ligne, ce qui conduit à une discussion. Le maître n'imposera rien mais suggérera de changer d'échelle et d'étudier en détail le cas où m est voisin de O

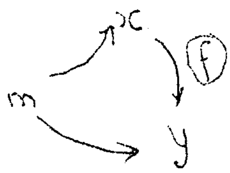


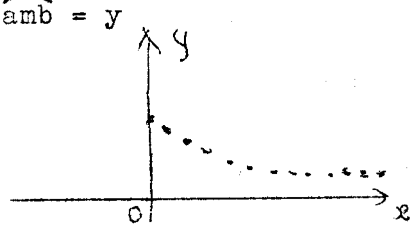


Exemple analogue (mesurant l'angle)

Om = x, $\widehat{amb}$ = y







(Les résultats de cette étude ont été spontanément utilisés par les élèves quelques mois plus tard dans le chapitre des angles inscrits).

Dans les deux exemples, on met en évidence la conservation ou l'inversion de la relation d'ordre (à démontrer si le niveau de la géométrie déductive est atteint). De nombreux exercices proposés en travaux facultatifs fournissent un matériel d'étude riche et varié.

<u>2ème exemple</u> : (Niveau plus élevé, après l'étude des premiers résultats de géométrie affine). Il s'agit de l'étude classique de la fonction :

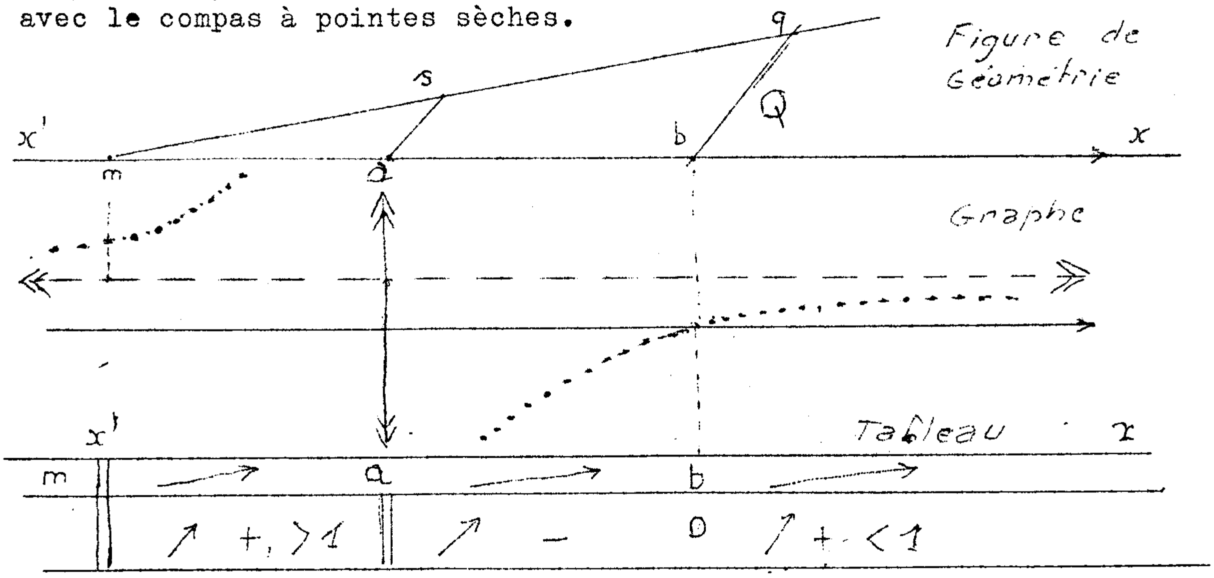
m droite ab, $\forall m,\ m \longmapsto y = \dfrac{\overline{mb}}{\overline{ma}}$

Nous utilisons la méthode toute naturelle si l'on connaît la construction de m connaissant y, c'est à dire la construction concernant la fonction inverse (voir L. Félix, Géométrie, classes de 4° et 3°, Dunod éditeur).

Nous considérons évidemment le point s comme fixe ainsi que la parallèle Q à as, de sorte que

$$y = \frac{\overline{mb}}{\overline{ma}} = \frac{\overline{bq}}{\overline{as}} \qquad \overline{as}\ \text{constant}$$

On prendra pour faire le graphe as = +1 pour n'avoir qu'à reporter bq avec le compas à pointes sèches.



On étudie :

$m \in x'x \setminus \{a\}$

$\forall m,\ m \longmapsto y$

et aussi, après choix d'une origine O des abscisses sur x'x, si $\overline{Oa} = k$, $\overline{Ob} = h$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\}$$

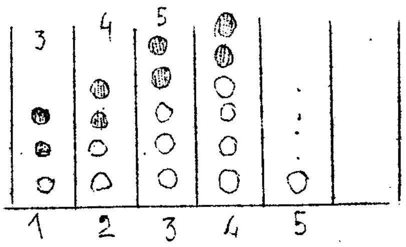
$$x \longmapsto y = \frac{x-h}{x-k}$$

x,h,k, étant mesurés, y étant calculé et comparé à $\overline{bq}$ qui est mesuré.

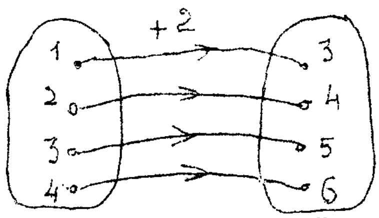
Nous reviendrons plus loin sur la très riche étude que cet exemple propose. Notons seulement que le calcul qui donne accès aux fonctions numériques permet toute précision désirée.

III- Troisième chemin d'étude - Fonctions numériques

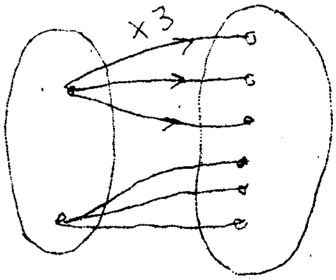
Dès que l'enfant connaît les 4 premiers entiers naturels, on peut introduire la fonction : ajouter 2. J'ai vu les tout-petits au travail, en Argentine, avec des grains de maïs sur papier quadrillé. Certains sont venus demander comment dire et écrire les derniers résultats.



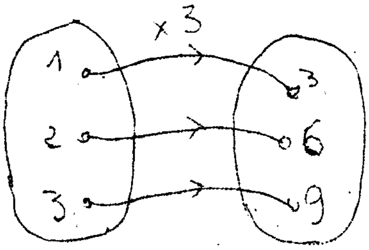
Les enfants ayant joué avec les "machines" écriront tout naturellement.



La fonction "multiplier" est à la base même de la définition de la multiplication, par exemple "multiplier par 3" change chaque élèment en 3 élèments.



Ensembles d'objets



Ensembles de nombres

Un peu plus tard, la fonction "multiplier par $\frac{1}{4}$" ou par $\frac{5}{4}$ introduit les fractions.

Les produits par composition ne sont simples que s'il n'y a pas mélange de machines à additionner et de machines à multiplier.

On considérera ensuite toutes les fonctions qu'introduisent les problèmes (peu variés dans l'enseignement primaire), puis à l'occasion des expressions algébriques, on imposera des formules du type

$y = f(x)$ pour des études par points qui causeront bien des surprises aux jeunes élèves. L'ensemble de départ sera le plus riche connu $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$

On sera ainsi conduit au niveau de l'étude systématique de quelques fonctions simples.

CONCLUSIONS

En quoi consiste l'étude d'une fonction ? Nous devons distinguer l'étude algébrique et l'étude topologique.

Signalons, sans insister ici, que, dans l'ensemble des fonctions numériques on définit, non seulement le produit par composition, mais aussi une structure d'espace vectoriel et une structure d'anneau.

La considération de la fonction inverse de toute fonction étudiée oblige à distinguer (bien avant qu'on puisse prononcer les mots techniques) les fonctions injectives, surjectives, bijectives. Dans notre exemple des obliques, la fonction non injective g oblige à considérer le couple de points m/m' image réciproque d'une valeur choisie de y.

Recherche d'invariants de différents types

1/ S'il y a relations d'ordre dans les ensembles de départ et d'arrivée, la conservation ou l'inversion de la relation d'ordre est immédiatement reconnue ou recherchée. Pour les fonctions numériques, le respect de la relation d'ordre naturel est malheureusement nommé "croissance de la fonction" comme si la fonction changeait !(Les raisons historiques de ce terme sont claires et respectables, mais ce n'en est pas moins regrettable et source d'erreurs dans l'étude du produit par composition, si évidente quand le mot n'est pas utilisé).

2/ Remarquables sont les éléments invariants pour une fonction non neutre (0 pour une fonction multiplicative, centre d'une rotation, etc...).

3/ Une relation entre deux éléments peut être respectée quel que soit le couple d'éléments de départ.

EXEMPLE : distance ou direction d'un couple, différence pour la "fonction translation"

$x \xrightarrow{f} x\,a$ (a, donné)

$\forall x1, \quad \forall x2, \qquad f(x2) - f(x1) = x2 - x1$

4/ Respect d'une relation (respect de l'angle, du parallélisme, etc...)

On souligne l'importance primordiale de la fonction linéaire

a, donné $x \xrightarrow{f} ax$

qui assure le respect de l'addition, du produit par une constante, donc

---

des relations linéaires, par exemple : 1.

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \xrightarrow{f} k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) + k_3 f(x_3)$$

Ceci constaté, utilisé dès les premières applications des nombres à la résolution des problèmes, aboutit au besoin d'étudier la réciproque en étudiant soit sur Q, soit sur R les équations fonctionnelles $\forall x_1, \forall x_2, \ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

et $\forall x_1, \forall k, \ f(k x_1) = k f(x_1)$

La comparaison des structures additive et multiplicative impose l'introduction de la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \text{———} & y_1 \\ x_2 & \text{———} & y_2 \\ x_1 + x_2 & \text{———} & y_1 y_2 \end{array}$$

et sa fonction inverse. Il n'y a évidemment espoir d'obtenir un isomorphisme que si l'on associe les élèments neutre $0 \to 1$

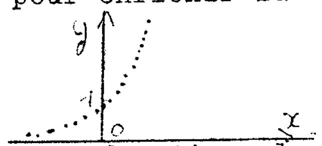
Pour démarrer, il faut évidemment un autre couple. Pour faciliter les calculs numériques, les enfants (13, 14 ans choisissent spontanément $1 \to 10$, d'où d'autres couples pour enrichir la table.

$1 \to 10$

$2 \to 10^2 = 100$

$3 \to 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \simeq 3,162$

$-1 \to 10^{-1} = 1/10 = 0,1$



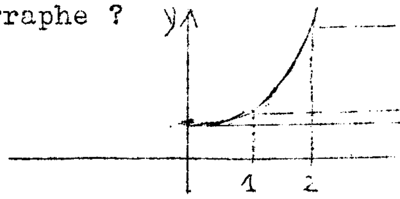
Ainsi s'introduisent tout naturellement les fonctions logarithmiques et exponentielles (avec l'usage des tables et même la formule du changement de base).

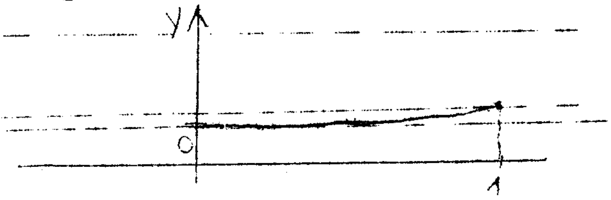
La difficulté sur la précision des approximations est évidente car la structure multiplicative ne se prête pas à l'étude des différences. L'urgence d'une étude topologique apparaît, mais ce point de vue qui complète l'étude /algèbrique/ est préparé de longue date !

<u>TOPOLOGIE</u> Dès les premiers calculs sur des nombres un peu grands, dès les premières mesures, les approximations ont dû être introduites.

L'essentiel est d'acquérir la notion de <u>voisinage</u> : voisinages d'un nombre dans l'ensemble connu (Q ou ses extensions), d'un point (sur une droite, le plan, l'espace, une courbe...) mais aussi voisinage d'un élèment dans l'ensemble des droites, des cercles, des triangles, etc... Avouons ce que nous faisons dans les vérifications expérimentales d'un théorème ou d'un calcul.

L'obligation de considérer des voisinages dans l'ensemble des fonctions s'impose dès les premiers graphes : non seulement les points construits ne sont qu'approchés mais comment les joindre ? Dans quel voisinage est-il indiqué de changer d'échelle pour améliorer le graphe ?





75

La continuité du phénoméne est trop évidente pour les jeunes enfants pour qu'elle prête à discussion, tandis qu'intuitivement ce qui sera plus tard la continuité de la dérivée est vite en question.

Les exemples privilégiés se posent à l'occasion des mouvements "uniformes par morceaux" : le mouvement d'un train est observé de la voie en notant l'instant du passage en des postes choisis. Le graphe, réunion de segments de droite donne une approximation valable à certains points de vue.

La fonction est "affine par morceaux", la vitesse est "fonction en escalier".

Mais nous avons représenté un mouvement avec trois secousses et un terrible choc qui rejette le train en avant.

Il faut arrondir le graphe, ce qui rend la vitesse continue. Ainsi est bien préparée la notion de dérivée et de primitive. On pourrait certes voir ici une préparation au calcul des aires par les primitives, mais je n'ai jamais trouvé dans cette situation une occasion normale de penser aux aires.

Continuité d'une fonction en un point. Limite. Infini.

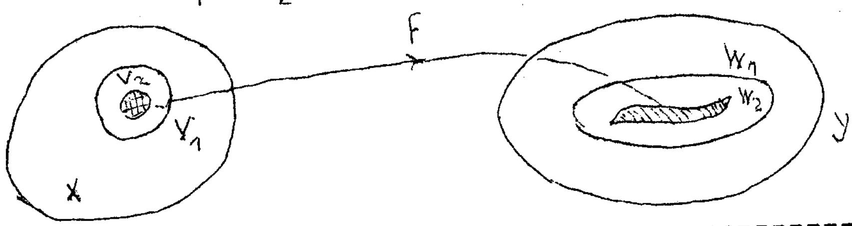
Les enfants de 14 ans, entraînés à utiliser les graphes, comme nous l'avons dit, comprennent et utilisent sans peine les définitions correctes de l'analyse

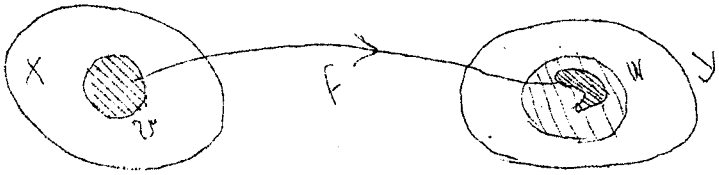
Rappelons ce qui est essentiel :

1) L'image d'un voisinage de x_0 est un voisinage de $y_0 = f(x_0)$ et la fonction respecte l'inclusion des voisinages.

$$V_1 \subset V_2 \Rightarrow W_2 \subset W_1$$

puisqu'on passe de w_1 à w_2 en supprimant les images des éléments de v_1 v_2





2) La continuité répond à la question : comment assurer $y \in w$, w étant un voisinage de $y_0 = f(x_0)$?

A cette question du physicien, on répond en cherchant un voisinage v de x_0 dont l'image soit incluse dans w ; tout voisinage v_1 inclusdans v conviendra encore mieux(on prend une marge de sécurité à cause des approximations de calcul).

Alors le mathématicien, pour être certain de pouvoir satisfaire le phycicien, demande que v existe quel que soit w

$$x_0 \longrightarrow y_0 \qquad \forall w, \exists v : f(v) \subset W$$

Au niveau de nos élèves, le "il existe" est remplacé par "je peux construire" ou bien "je peux calculer".

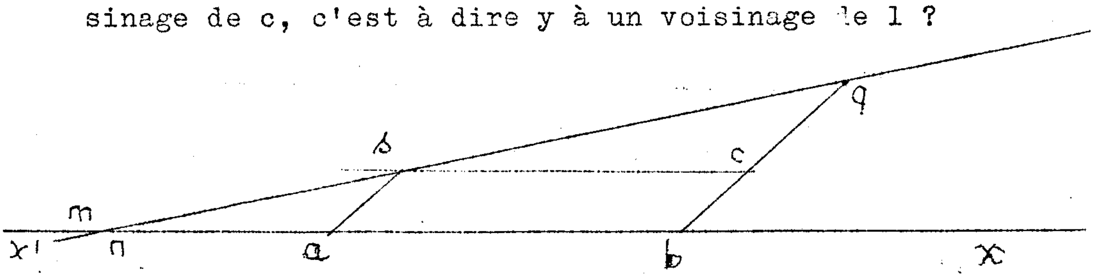
Le problème posé à l'occasion des graphes des fonctions définies géométriquement (exemple de l'oblique, exemple du rapport $\frac{\overline{mb}}{\overline{ma}}$) intéresse les élèves et est résolu sans peine car le quantificateur $\forall$ est tout à fait usuel.

La réponse valable pour tout point m sur l'exemple de l'oblique. Mais quand on étudie $m \rightarrow y = \frac{\overline{mb}}{\overline{ma}}$, nous atteignons une étude passionnante.

3) Limite, infini

Reprenons la figure introduisant $y = \frac{\overline{mb}}{\overline{ma}}$

Quelle réponse donner si on exige que q appartienne à un voisinage de c, c'est à dire y à un voisinage de 1 ?



Pour toute autre position q_0 choisie de q, l'image réciproque du voisinage de q_0 était un voisinage de m_0, mais cette fois l'image réciproque d'un voisinage de c est la réunion de deux demi-droites. On examine l'effet de l'inclusion et on décide d'appeler cette réunion un voisinage de l'infini.

Aucune difficulté pour examiner l'image d'un voisinage de a. Finalement, on adjoint l'infini à l'ensemble des points de la droite et la limite 1 à l'ensemble des images f(m). Le tableau completé est :

m	x')	$\longrightarrow$		a		$\longrightarrow$	b	$\longrightarrow$	(x
y	$+1$)	$\nearrow$	$+$	∞	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	($+1$

En conclusion de l'étude géométrique qui précède, les élèves n'ont éprouvé aucune difficulté à écrire en symboles mathématiques et à énoncer les définitions précises de l'infini et des limites ? Il est clair que le modèle géométrique et les couleurs utilisées pour montrer les divers voisinages soutenaient l'intuition tandis que phrases et calculs font écran et cachent la pensée.

Les calculs, on les a faits après sur la même situation, après avoir choisi, et de diverses façons, l'origine des abscisses pour définir m. D'où diverses valeurs de k et h dans la relation $y = \frac{x-h}{x-k}$

Autre situation

Une étude de la limite sans intervention de l'infini s'impose lorsqu'on aborde la notion de tangente au cercle, lorsque des problèmes conduisent à considérer une droite n'ayant qu'un point commun avec le cercle comme analogue à une sécante.

Données : un cercle $\mathcal{C}(0,R)$, $a \in \mathcal{C}$. Parmi les droites du faisceau de sommet a, on a distingué la droite D perpendiculaire à Oa et l'on sait

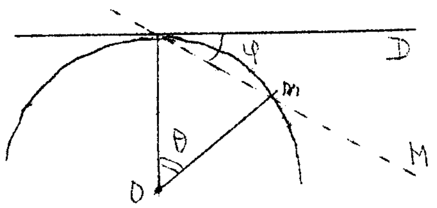
$$\mathcal{C} \cap D = \{a\}$$

Soit maintenant le point générique m de $\mathcal{C}$ et la sécante am que l'on nomme M. On étudie la fonction $m \xrightarrow{f} M$, définie sur $\mathcal{C} \setminus \{a\}$

Cette fonction (f) est le produit par composition :

$$m \xrightarrow[\text{angle au centre}]{(\theta)} \xrightarrow[\varphi = \frac{1}{2}\theta]{(\cdot\frac{1}{2})} \varphi \xrightarrow{h} M$$

produit qui est tout à fait normal quand m est en a



$$a \xrightarrow{\theta} 0 \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} 0 \xrightarrow{(h)} D$$

Si l'on décidait de compléter la définition de f en posant $a \xrightarrow{f} D$, la fonction f deviendrait définie et continue (comme les voisinages le montrent) ; D ne peut être dite "sécante". On la dit "limite de la sécante quand m est en a" et on la nomme tangente au cercle en a.

Au niveau où ces études ont été faites, l'analyse n'a servi qu'à préciser le travail géométrique et algébrique. Elle n'est pas étudiée pour elle-même et les résultats obtenus ne sont pas assimilés, fixés pour être utilisables.

Mais au terme de cette étude, les élèves sont prêts à recevoir une étude systématique des fonctions, étude dont la place est au cycle terminal du second degré (15-18 ans).

Espèrons seulement que la préparation, très possible, comme l'expérience l'a montré, sera faite avec conscience et patience par les maîtres et que le professeur qui recevra ces élèves saura en tenir compte pour s'appuyer sur cette formation première lorsqu'il proposera des exposés dogmatiques.

L. Félix.