

DU DIAGRAMME DE VENN AUX COURBES DE PEANO

Lucienne FELIX (PARIS)

Nous partons de la traduction, par un diagramme de Venn d'une structure de Logique bivalente qui va nous imposer un certain travail graphique. Nous laissons guider par celui-ci, et perdant de vue progressivement notre premier objectif, nous allons voir ce qu'il va advenir.

I - 1) Dans la logique bivalente, la considération de plusieurs attributs ... indépendants que possèdent ou non les éléments d'un ensemble référentiel donne lieu à une table de vérité que l'on dispose commodément sous la forme d'un arbre dichotomique où la lettre "V" signifie "vrai", et la lettre "F" signifie "faux".

Ainsi, pour deux attributs, ce graphique d'un ordre partiel, donne 4 chaînes formant la suite VV, VF, FV, FF. Pour trois attributs, c'est une suite de 8 chaînes : VVV, VVF, VFF, ... , FFF (fig. 1). Pour n attributs, c'est une suite de 2^n chaînes qui épuise les possibilités d'attribution du "vrai" et du "faux" aux éléments du référentiel considéré. Chaque chaîne correspond ainsi à un sous-ensemble logiquement défini que nous nommerons sous-ensembles fondamentaux ceux dont les éléments testés au point de vue d'un seul attribut donnent la même réponse : A_1 , sous-ensemble des éléments pour lesquels est vrai ; A_1' sous-ensemble des éléments pour lesquels A_1 est faux, donc le complémentaire de A_1 . De même A_2 est le sous-ensemble pour les éléments duquel A_2 est vrai etc. Ainsi A_1 correspond à l'ensemble des chaînes qui comprennent V dans la première colonne ; A_2 l'ensemble des chaînes qui comprennent V dans la seconde colonne etc.

2) Diagramme de Venn.

Lorsque le nombre d'attributs est petit, on représente la situation décrite par l'arbre au moyen du diagramme de Venn : chaque ensemble fondamental A_1, A_2, \dots est représenté par une région connexe

...//...

(d'un seul morceau) limitée par une frontière qui est une courbe fermée simple (c'est à dire qui ne se recoupe pas). L'ensemble de ces courbes forme un puzzle dont les morceaux sont les représentants des sous-ensembles élémentaires. Précisons bien les contraintes : Deux frontières pourront se couper, mais en des points isolés, sans arcs communs.

Cet ensemble de frontières est complété par un contour, rectangulaire par exemple, dont l'intérieur sera recouvert par l'ensemble des régions à chaque stade, de sorte que l'une des régions soit annulaire.

Le dessin est facile à exécuter pour 1, 2, 3 attributs : nous écrivons le nom de chaque chaîne dans chaque région élémentaire du puzzle. (fig. 2).

Mais la question est de déterminer une stratégie pour passer à 4, 5, ... attributs. Est-ce possible en respectant les contraintes que nous nous sommes imposées ?

Pour répondre examinons bien le début du travail. Au premier stade, le dessin (1) comprend un ovale dont l'intérieur est marqué V, la région annulaire étant marquée F. Au stade (2) nous dessinons la frontière K_2 en noir pointillé pour indiquer que c'est la dernière et nous écrivons le nom des 4 chaînes de l'arbre. Pour passer au stade (3), nous marquons un point (rouge) dans chacune des régions élémentaires du stade (2) et les joignons de proche en proche par des arcs rouges de façon que chaque arc traverse une frontière commune à deux régions qui apparaissent ainsi comme consécutives. Ainsi les trois régions non annulaires (figure. 3) apparaissent comme formant une bande. Les régions connexes sont FV, VV, VF, ce qui n'est pas l'ordre naturel des chaînes de l'arbre où FV et VF sont chaînes consécutives.

Sur le schéma de la bande (2') comme sur le schéma de Venn(2) le nouvel ordre est indiqué par l'arc orienté rouge. En fermant cet arc par une jonction dans la région annulaire, nous obtenons la nouvelle courbe K_3 qui servira, dessinée en noir pointillé pour les schémas du stade 3. (Précisons bien qu'à aucun moment une nouvelle frontière ne doit passer par un point

..//..

déjà commun à deux courbes).

C'est ce travail qu'il faut poursuivre.

Pour préciser la situation, indiquons comment numérotter les $S_{q-1} = 2^{q-1} - 1$ régions qui forment la bande au stade $q-1$.

Comme chaque ligne K_i partage une région du stade précédent en deux parties, il est naturel d'utiliser la numérotation à base deux : En (1) mettons 0 pour la région annulaire, 1 pour la région intérieure à l'ovale. En (2) nous utilisons les 4 nombres de deux chiffres. Convenons d'attribuer 00 à la région annulaire et suivons le sens indiqué (arbitrairement) sur la ligne rouge. Au stade q nous utiliserons les 2^q nombres de q chiffres.

Supposons donc que le dessin soit fait au stade $q-1$

Suivons sur le schéma (q') de la bande comment passer au stade q . La bande comprend les régions successives $r_{q-1}^1, r_{q-2}^2, \dots$ dont les numéros sont, avec $q-1$ chiffres, 000...1, 000...2, ..., 111...1.

Dessignons en pointillé noir une ligne médiane de la bande : elle forme $2^q - 2$ régions. Pour définir la nouvelle bande, nous numérotions ces régions à l'aide des nombres de q chiffres en suivant un arc orienté rouge en accord avec l'ordre déjà utilisé. Chaque région élémentaire d'ordre $q-1$ est partagée en deux que nous numérotions en écrivant "0" puis "1" à droite du numéro de cette région. La ligne rouge traverse donc alternativement un arc noir pointillé et un arc plein. On voit qu'un arc plein sur deux n'est pas traversé à l'intérieur de la bande et ne le sera jamais dans la suite ; nous les marquons en bleu. Pour une réalisation matérielle de la bande, il faudrait couper le papier suivant ces arcs qui forment les bords de la bande.

Comme le nombre de q chiffres 00...00 est attribué à la région annulaire, le numéro 00...01 est réservé à la région que l'on a obtenue en fermant la ligne pointillée ; elle devient la première région de la bande de stade q . La seconde région de cette bande, numérotée 00...10, est celle des deux régions formées dans r_{q-1}^1 qui est connexe avec cette première région.

..//..

Enfin, comme $s_q = 2^q - 1$ est évidemment impair, la sortie de l'arc rouge se fait bien dans la région annulaire et tout est prêt pour le stade suivant : on ferme la courbe rouge, la dessine en noir pointillé et le programme reprend.

Nous insistons sur le fait que chaque ligne rouge, après avoir servi pour définir la bande et son numérotage devient la frontière au stade suivant. Les lignes de coupure (en bleu) se prolongent dans le diagramme de Venn et se bifurquent.

D'un stade à l'autre, les chiffres de chaque numéros sont conservés à gauche. En conséquence, l'inclusion d'une région dans une autre est mise en évidence d'après le numérotage. La région incluse a plus de chiffres donc le numéro est plus grand dans l'ensemble des nombres écrits en base deux.

Nous avons déjà remarqué que notre numérotage n'est pas en accord avec l'ordre des chaînes dans l'arbre logique. Comment alors reconnaître les régions élémentaires qui constituent chaque ensemble fondamental A_1, A_2, \dots ? Ces ensembles sont déterminés par un certain nombre de chiffres à gauche. Ainsi, suivant le nombre q des attributs A_1 comprend des régions élémentaires de numéros $\{1\}$ pour $q := 1$, $\{10; 11\}$ pour $q := 2$, $\{100; 101; 110; 111\}$ pour $q := 3$ etc. D'une façon générale, nous écrirons $\{1\dots\}$ l'ensemble des numéros dont le premier chiffre de gauche est 1 et contenant q chiffres. De même, $\{01\dots\}$ représente l'ensemble des numéros dont les deux chiffres de gauche sont 01 etc. Nous pouvons maintenant commencer le tableau valable quel que soit q qui indique la composition des régions fondamentales ; nous marquons d'une flèche l'ordre naturel des nombres

A_1	:	$\{1\dots\}$:	A_2	:	$\{01\dots; 10\dots\}$
A'_1	:	$\{\dots\uparrow\dots\}$:	A'_2	:	$\{00\dots\uparrow\dots; 11\dots\downarrow\dots\}$
A_3	:	$\{001\dots; 010\dots; 101\dots; 110\dots\}$				
A'_3	:	$\{0\overset{\uparrow}{0}0\dots\rightarrow\dots; 011\dots\downarrow\dots\rightarrow\dots; 100\dots\uparrow\dots\rightarrow\dots; 111\dots\downarrow\dots\}$				
A_4	:	$\{0001\dots; 0010\dots; 0101\dots; 0110\dots; \dots; 1101\dots; 1110\dots\}$				
A'_4	:	$\{00\overset{\uparrow}{0}0\dots\rightarrow\dots; 00\downarrow 11\dots\rightarrow\dots; 01\uparrow 00\dots\rightarrow\dots; \dots; 1100\dots; 1111\dots\downarrow\dots\}$				

La loi apparaît clairement.

A toute expression de Boole formée à l'aide des ensembles fondamentaux par les opérations de complémentarité, intersection et réunion correspondant de même un ensemble de ces nombres qu'il est aisé d'écrire puisque nous savons caractériser l'inclusion.

3) Diagramme rectiligne. -

Considérons les numéros précédents comme partie après la virgule de nombres dont la partie entière est zéro. Ces nombres, quel que soit le nombre n des chiffres après la virgule appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$. D'après la connaissance des premiers chiffres après la virgule, laissant n indéterminé, nous pouvons associer à chaque région élémentaire un intervalle fermé à gauche ouvert à droite, dont la réunion est $[0, 1[$. Aux sous-ensembles fondamentaux sont associés des ensembles de ces intervalles : représentons en rouge les images de A_1, A_2, \dots et en noir leurs complémentaires - Une suite de régions élémentaires aux stades successifs associés aux nombres

$0, a_1 ; 0, a_1 a_2 ; 0, a_1 a_2 a_3, \dots [a_i \in \{0; 1\}]$ correspondant à une suite d'intervalles emboîtés.

Si l'on conçoit une suite infinie d'attributs, une région élémentaire devient associée à un nombre réel, donc un point de $I = [0 ; 1]$. Et inversement, tout point de cet intervalle peut être associé à au moins une suite infinie de régions élémentaires incluses les unes dans les autres. Toutefois il faut considérer comme distincts par exemple $0, 11000\dots$ et $0, 10111\dots$ (fig. 4) qui sont deux formes du nombre $0, 11$ mais ne représentent pas la même région. Pourtant, dans la bande, à chaque stade, les régions correspondantes sont consécutives : Par exemple en (2), nous voyons 11 et 10 ; en (3) nous voyons 110 et 101 ; en (4), nous voyons 1100 et 1011 etc.

La question se préciserait si chaque suite de régions incluses les unes dans les autres pouvait être considérée comme définissant une région limite. Ces conditions seront réalisées dans l'étude qui suit.

..//..

II. - Diagramme en pavage

On désigne souvent le nom de diagramme de Carrol en hommage à Lewis Carrol, un diagramme logique qui, pour deux attributs, représente chaque sous-ensemble fondamental A_1 et A_2 par une moitié de carré délimitée par une médiatrice des côtés. Par superposition, on obtient une parfaite représentation de l'arbre d'ordre 2.

Contrairement au diagramme de Venn, les régions fondamentales et leurs complémentaires (A_1 et A'_1 , comme A_2 et A'_2) jouent le même rôle dans la représentation choisie. Il n'y a pas de présence entre les valeurs "vrai" et "faux".

Mais comment poursuivre le diagramme pour plus de 2 attributs ? Il est tentant de représenter A_3 par une région intérieure à un cercle dont le centre (fig. 5) est celui du carré et de continuer avec des lignes simples fermées : c'est revenir au diagramme de Venn avec un mauvais départ. Dans une autre direction que nous allons opérer.

Il est toujours essentiel de diviser chaque région élémentaire d'un stade $q-1$ en deux régions puisque nous traduisons une logique bivalente. Pour repérer ces régions, nous devons encore définir un ordre cyclique et naturellement nous conservons une numérotation en base deux. Mais, la grande différence est que la ligne L (rouge) qui indique l'ordre des régions et par conséquent définit la bande ne servira plus de frontière. Les frontières seront fournies par un pavage du carré en régions élémentaires de notre choix.

Sur les dessins, le pavage correspondant à un ordre $q-1$ étant dessiné en noir, traits pleins et le bord de la bande en traits bleus, le passage à l'ordre suivant se fait par le tracé en pointillé noir d'un ensemble d'arcs frontières que l'on adjoint aux arcs précédents. Puis, pour prolonger le numérotage de l'ordre $q-1$ à l'ordre q , nous dessinons la ligne rouge orientée qui traverse alternativement un arc en trait pointillé et un arc en trait plein sans naturellement traverser les arcs coupés (bleus). La ligne rouge se referme ; c'est à dire qu'on part d'un point origine et que le dernier point est confondu avec ce premier.

Comme nous allons utiliser des pavages polygonaux, nous prendons comme ligne L_i des lignes polygonales dont les sommets sont choisis pour l'élégance du dessin : centre des carrés ou rectangles, point de concours des médianes pour les triangles.

Mais il reste à choisir des pavages qui permettent ce travail. Nous n'écrivons pas les numéros qui sont maintenant bien connus. Dans la bande au stade q les sous-ensembles élémentaires ont naturellement des numéros successivement pairs et impairs. Le sous-ensemble fondamental A_q comprendra les régions dont les numéros ont la même parité, par exemple les numéros impairs. Nous les colorons en rouge sur les premiers stades dans la figure 6.

Pavage de triangles rectangles isocèles

Une figure particulièrement élégante est la suivante : Après avoir partagé le carré donné par une diagonale, nous suivons la règle : tout triangle de stade $q-1$ sera partagé en deux triangles du stade q par sa hauteur (fig. 6). Notons du reste qu'au départ on peut aussi utiliser les 4 carrés du diagramme usuel de Carrol : Le diagramme est le même dès le stade (3).

Pavage de rectangles et carrés.

Nous obtenons alternativement des carrés et des rectangles. Nous n'utilisons pas des bandes parallèles car les connexités exigeraient que l'on travaille sur un cylindre. Nous alternons donc les parallèles aux deux directions des côtés du carré.

En construisant les figures d'après nos conventions de numération, on s'aperçoit de l'impossibilité au stade (5). Une autre tentative échoue dès (4), dessinée en (3') et (4') (fig. 7).

III. - Point de vue géométrique.

A) Nous abandonnons le point de vue de la logique bivalente pour poursuivre l'étude du pavage et de la suite des lignes L_i , indicatrices des bandes qui, chacune, recouvrent le carré.

Nous décomposons chaque carré élémentaire non pas en deux puis deux (fig. 8) mais en 4, ce qui permet de choisir entre les contours (α) et (α') qui maintenant sont tous deux valables. Naturellement, le numérotage favorable est écrit en base 4. Le dessin est déterminé à chaque stade par un choix au départ : à partir de (3) ; cette liberté conduit à deux figures différentes à chaque passage de (q) à ($q+1$) :

..//..

On s'en rend compte nettement en observant la forme des coupures (représentées en bleu) ; c'est pourquoi, à défaut d'une étude théorique, il est nécessaire de prolonger un peu le travail graphique. (fig. 9) C'est du reste seulement en exécutant les figures que l'on se rend nettement compte de la façon dont les hypothèses de jonction interviennent.

B) Puisque la division par 2 est abandonnée, nous devons songer à la base trois, ce qui, naturellement conduit à un pavage par triangles.

Pour travailler en base trois, la surface D à recouvrir par nos bandes que dirigent les courbes L_i sera un triangle équilatéral et non plus un carré, pour ne considérer que des figures respectant des symétries simples. Chaque triangle équilatéral sera décomposé par les rayons du cercle circonscrit aboutissant aux sommets en trois triangles, congruents d'angles 120° , 30° , 30° et chacun de ceux-ci sera décomposé par les trisectrices de l'angle obtus en un triangle équilatéral et deux triangles semblables au triangle partagé. Ceci convient puisque nous pourrions satisfaire à la condition de connexité (fig 10)

La construction se poursuit sans difficulté.

Le nombre des régions de la bande au stade (q) est cette fois 3^q . C'est aussi le nombre des sommets de la ligne L_q .

Dans tous les cas, quelle que soit la base utilisée, notre numérotage permet une représentation rectiligne comme nous l'avons indiqué à l'occasion du diagramme de Venn, les numéros étant toujours pris comme ensemble des chiffres après la virgule et la partie entière étant zéro. On opère donc dans $I = [0, 1]$.

IV- Courbes de Peano

La suite des lignes L_q correspondant à un de nos carrelage admet une limite quand q tend vers l'infini. Une telle courbe limite L est une courbe de Péano. Nous allons montrer son existence et quelques propriétés.

A) Soit b la base de numérotation (nous avons utilisé 2, 3, 4). Toute bande B_q est formée de b^q régions élémentaires qui recouvrent le domaine initial D . Ce nombre de régions tend vers l'infini avec q . En même temps, le plus grand diamètre ensembliste de ces régions (plus grande dimension), soit d_q , tend vers zéro.

1) Soit un nombre de q chiffres après la virgule, $t = 0, a_1 a_2 \dots$ écrit naturellement dans la base de numération choisie. Le nombre formé par ces q chiffres est le numéro d'une des régions élémentaires de la bande et réciproquement. Cette région est définissable comme intersection des régions de la suite obtenue aux stades antérieurs de numéros $0, a_1$; $0, a_1 a_2$; \dots ; $0, a_1 a_2 \dots a_q$. C'est une suite de régions emboîtées

2) Soit maintenant un nombre réel appartenant à l'intervalle $I = [0, 1]$, nombre défini par une suite illimitée de chiffres a_i ; la suite infinie de régions emboîtées dont le diamètre tend vers zéro admet une limite qui est un point m de D .

En projetant sur deux axes de coordonnées, ce point est définissable par ses coordonnées x et y , limite des segments emboîtés dont la longueur tend vers zéro obtenus par projection des régions élémentaires.

3) Soit t un nombre quelconque de l'intervalle I . Nous venons de lui associer un point m de D , ce qui définit une fonction $f : I \rightarrow D$. Le fait que les nombres formés d'un nombre fini de chiffres ont deux formes illimitées ne gêne pas car ces deux formes limitées à q chiffres correspondent à deux régions voisines de la bande et donneront donc la même limite. (Voir par exemple sur la figure qui utilise la base deux $0, 11 = 0, 11000 \dots = 0, 10111 \dots$)

Mais, inversement un point m de D correspond-t-il bien à un nombre t déterminé ? La fonction f est évidemment surjective puisque les bandes, considérées bord compris, recouvrent D , mais certains points m correspondent certainement à plusieurs nombres à cause de la présence des coupures : un point de la coupure est limite de points qui ne sont pas voisins dans la bande, donc qui ne sont pas voisins dans le numérotage.

Sur les dessins l'examen de l'évolution des coupures, ce qui est possible parce que nous avons examiné suffisamment de stades, montre qu'un point peut correspondre suivant les pavages, à 1 ou 2 ou 3 ou 4 nombres et même 6 dans le cas de figure 10.

..//..

Ainsi, la fonction f n'est pas bijective.

Mais cette fonction est continue : par construction même deux nombres t voisins ont pour image deux points m voisins. On précise aisément soit m_0 l'image de t_0 . Pour assurer $\text{dist}(mm_0) < d$ il suffit, si q est tel que d_q soit inférieur à d , que t ait en commun avec t_0 plus de q chiffres après la virgule.

B) Limite de la suite des courbes L_q

Utilisons, la détermination des points m par le couples (x, y) de leurs coordonnées cartésiennes, les axes étant choisis. Chaque courbe L_q est l'ensemble des points m déterminés à partir de t par deux fonctions $g_q = t \rightarrow x$; $h_q : t \rightarrow y$.

Ces fonctions sont continues puisque la ligne polygonale L_q l'est.

Elles sont définies puisque la ligne polygonale L_q l'est.

Elles sont définies sur I ; Remarquons que pour obtenir des fonctions d'expression meilleure on peut ne pas choisir les sommets des L_q comme nous l'avons fait pour la beauté du dessin. Mais de toute façon, comme la courbe L_q se définit par des arcs successifs qui dépendent du point de départ, il est clair que la détermination effective des fonctions ne peut être simple.

Considérons ces fonctions g_q , définies, continues sur I . Elles forment une suite. Montrons que, lorsque q tend vers l'infini, cette suite admet une limite, fonction g .

Quel que soit $d > 0$, on peut prendre q assez grand pour assurer $d_q < d$. Alors quel que soit $t \in I$, quels que soient q_1 et q_2 supérieurs q $|g_{q_1}(t) - g_{q_2}(t)| < d$ est satisfait.

Ceci assure la conclusion : la suite des fonctions tend uniformément vers une fonction f , elle même définie et continue sur I .

De même, la suite des fonctions h_q admet une limite, fonction h définie et continue sur I . Par conséquent la suite des courbes L_q admet une limite, courbe L , ensemble des points vérifiant $x = g(t)$; $y = h(t)$.

La courbe apparaît comme une trajectoire si t est considéré comme le temps.

Ainsi est obtenue la courbe de Peano L correspondant à chacun de nos pavages.

Cette courbe qui passe par tous les points du domaine plan D est donc l'image de l'intervalle I , donc d'un segment de droite par la fonction f qui est définie sur I , surjective, continue mais non bijective.

Comme cette courbe L n'a évidemment pas de tangentes, les fonctions g et h bien que continues n'ont pas de dérivées.

Remarque historique

La définition des fonctions g_q et h_q puis des fonctions g et h ne peut avoir qu'une forme arithmétique à partir de la base de numération choisie. C'est précisément ce qu'à indiqué Peano en 1890 dans une courte note (Math. Ann. tome XXXVI). La courbe qu'il définit, sans aucune considération géométrique ni calculs, n'est pas une de celle qui dérive, par passage à la limite, des suites que nous avons utilisées : En effet il utilise la base trois et sa courbe, qui remplir un carré, n'est pas fermée. (Ce dernier caractère n'est pas important car on peut compléter par des symétries pour obtenir une courbe fermée).

Les formules sont remarquablement simples et il suffit de quelques lignes avec les notations modernes :

$$\begin{array}{l} \text{On pose } t = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \\ x = 0, b_1 b_2 \dots b_n \quad \text{en base 3, et} \\ y = 0, c_1 c_2 \dots c_n \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1 + a_4 + \dots + a_{2n} \equiv \alpha_n \pmod{2} \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} \equiv \alpha'_n \end{array}$$

Une permutation p de $\{0, 1, 2\}$ est définie par $p(0) = 2$; $p(2) = 1$; $p(1) = 0$, et l'on pose pour la composition de k fonctions $p, p \circ p, \dots, p \circ p = p^k$

Les formules sont alors $b_1 = a_1$; $b_n = p^{\alpha_{n-1}}(a_{2n-2})$; $c_n = p^{\alpha'_n}(a_{2n})$

Mais Peano ne dit rien de ce que l'a conduit à ces lois. L'année suivante, dans la même revue, Hilbert a indiqué une construction qui est à peu près celle de nos figures 9, mais la courbe ne se ferme pas. Il utilise la numération à base dix en prenant seulement les numéros successifs indépendamment de la structure de la figure et il revient aux projections x et y .

Donnant ainsi un exemple géométrique plus intuitif que l'exemple arithmétique de Péano, il n'indique pas non plus les directives qui l'on conduit à cet exemple.

Cantor avait déjà donné des exemples de correspondance entre une ligne et une surface par une fonction bijective, mais discontinue. L'objet de la note de Péano est d'obtenir la continuité, mais au dépend du caractère du caractère bijectif.

FIGURE 1

page 1

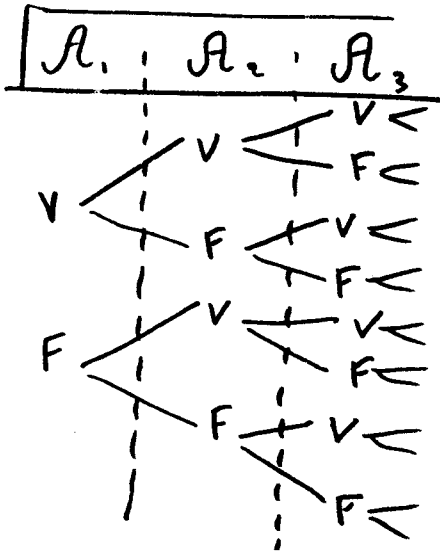
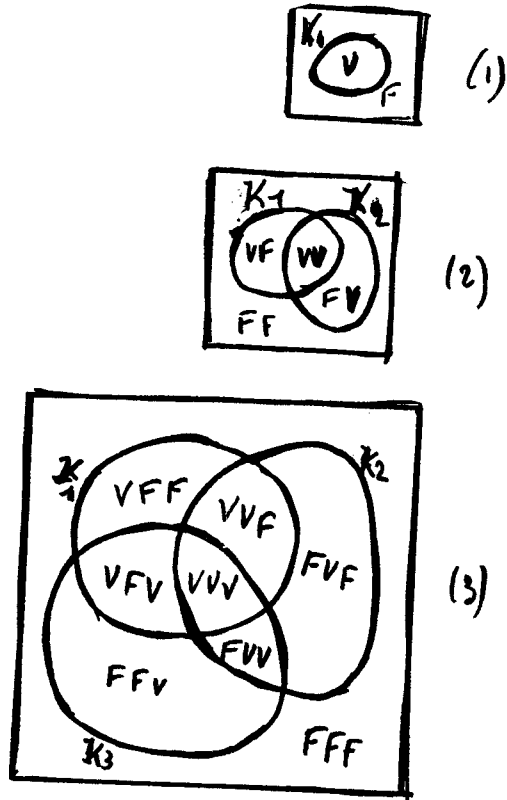
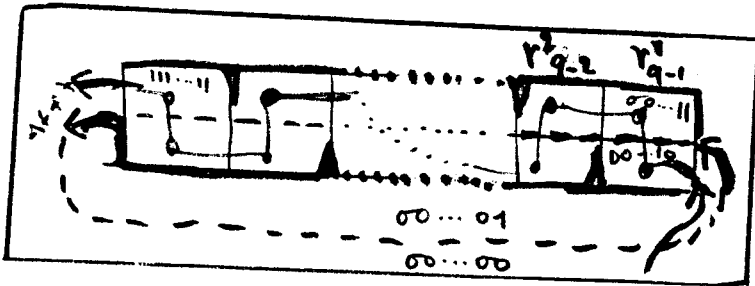
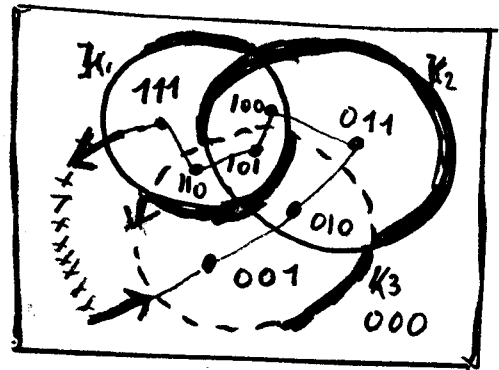
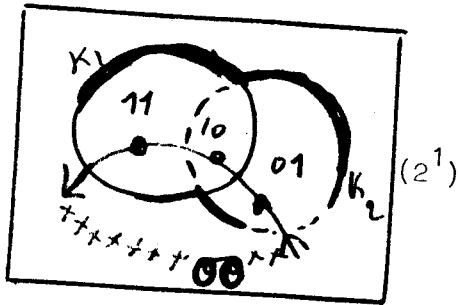
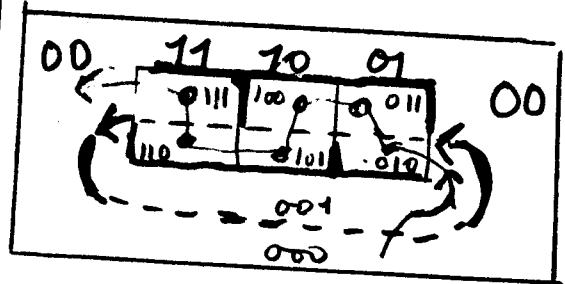
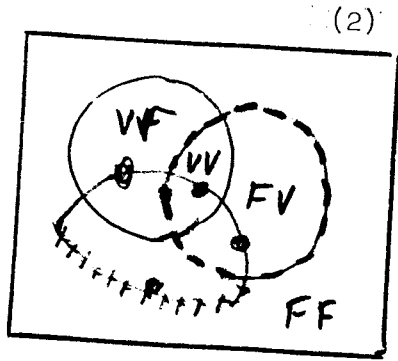
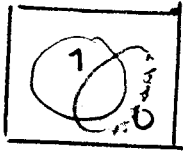


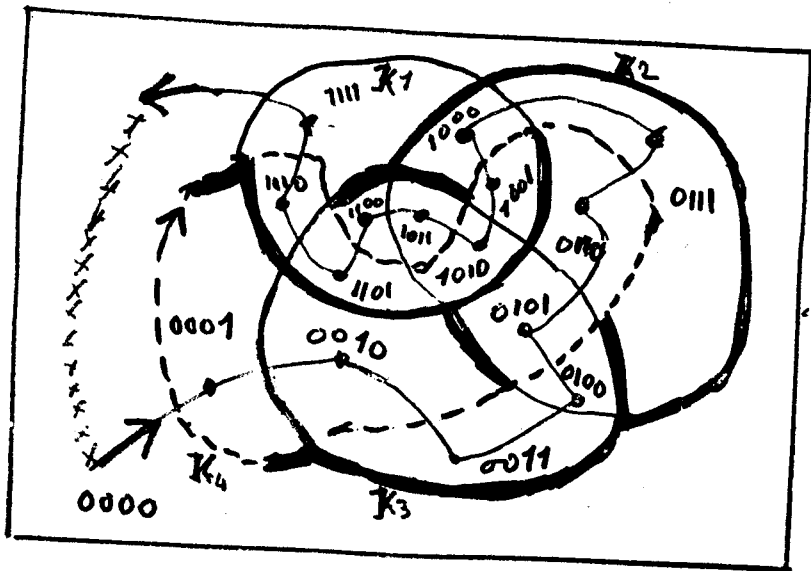
FIGURE 2





(9)

(3)



(10)

FIGURE 4

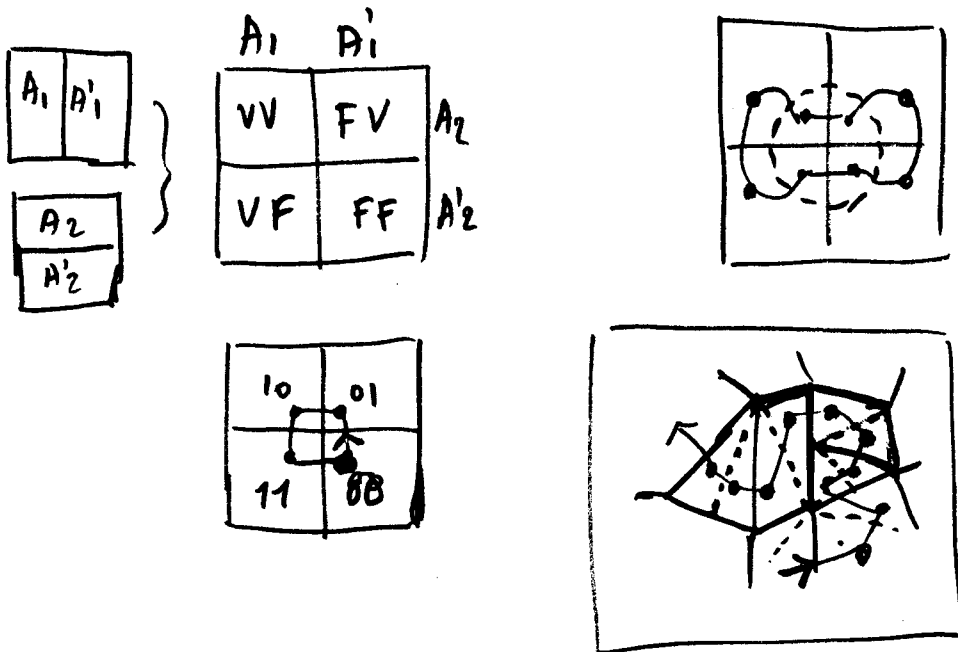
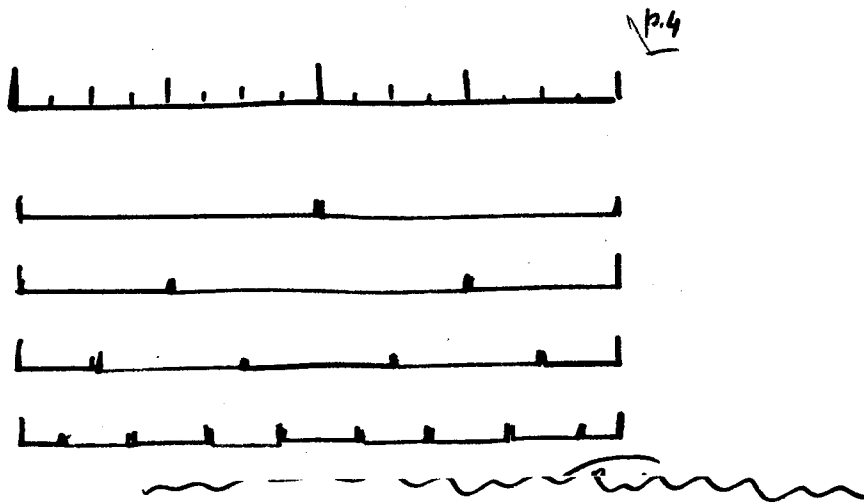
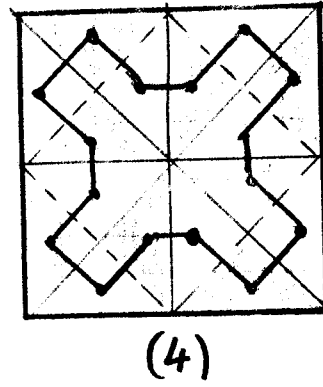
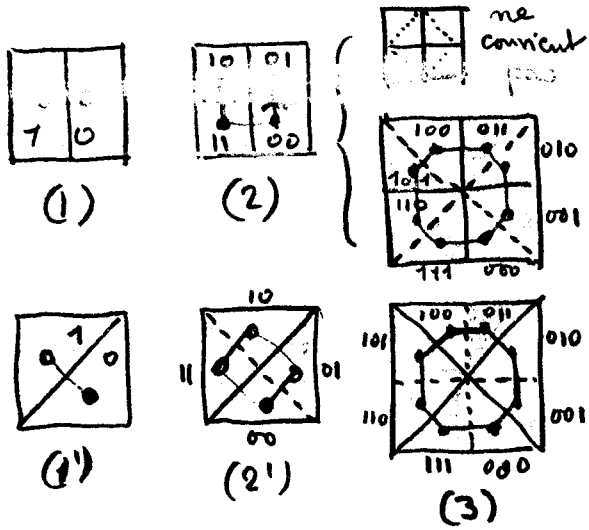
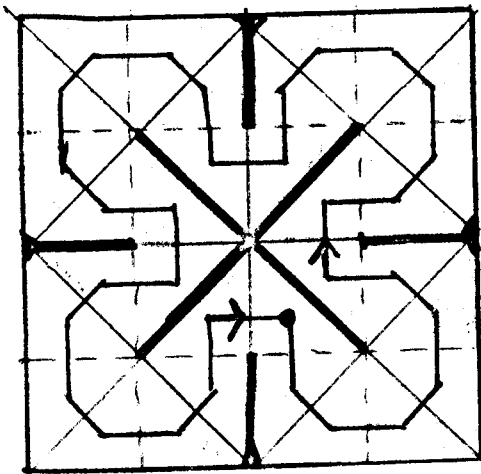


FIGURE 5

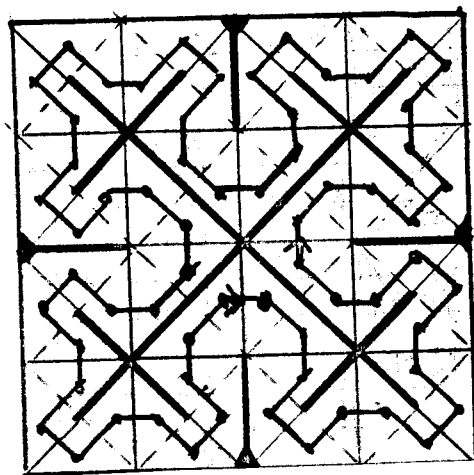
FIGURE 6



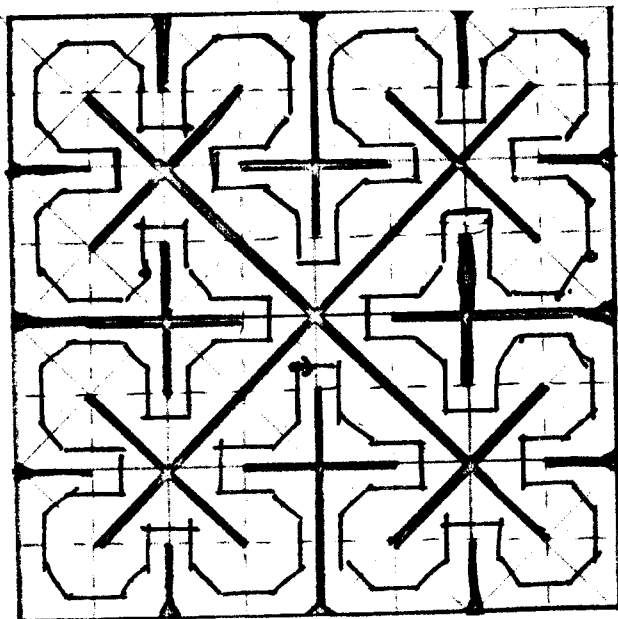
(4)



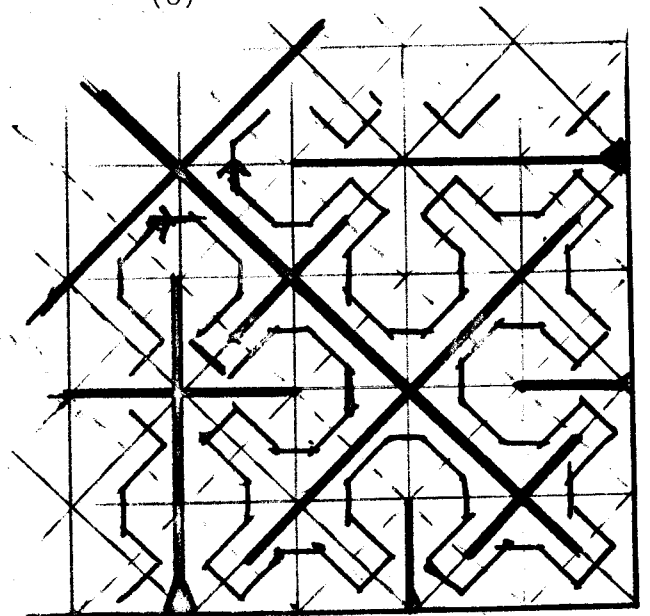
(5)



(6)



(7)



(8) (quart du carré)

FIGURE 7

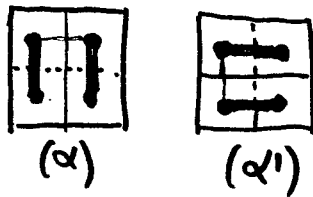
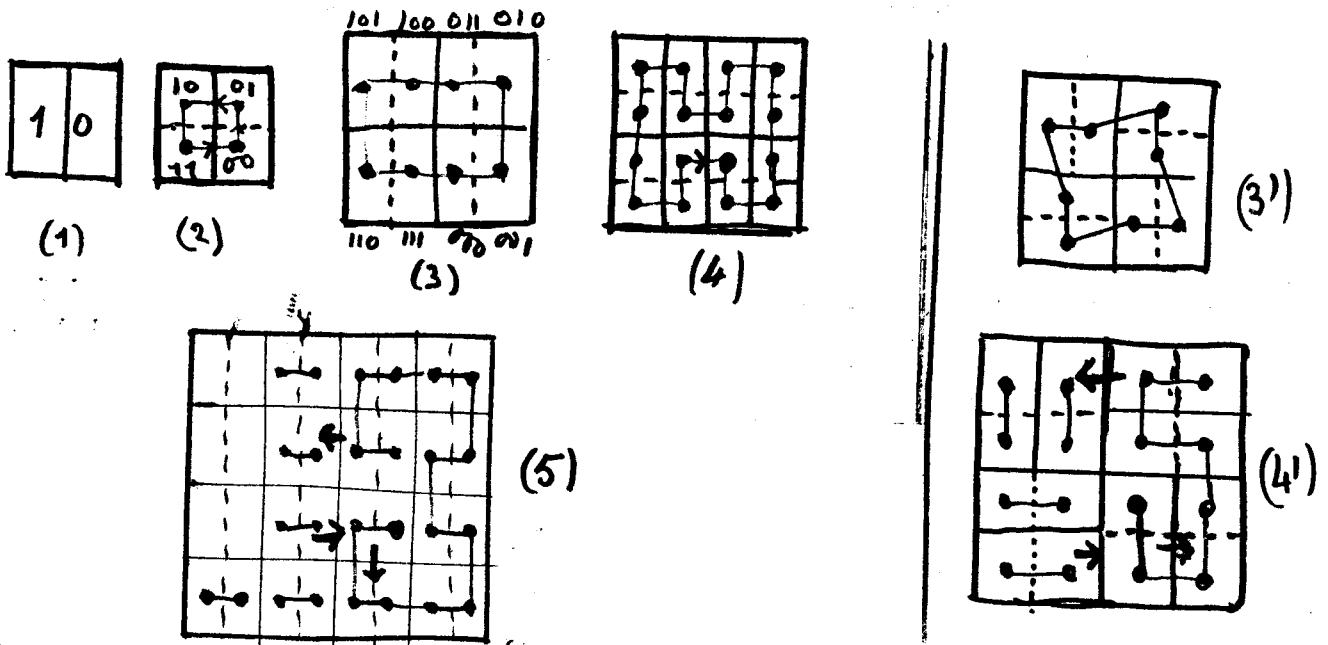
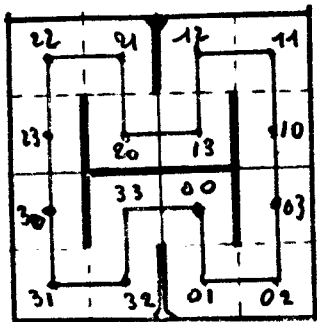
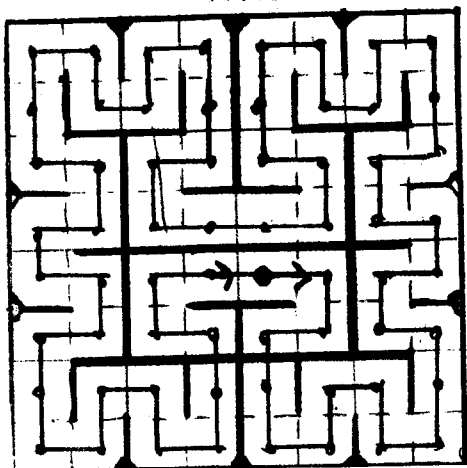


FIGURE 8

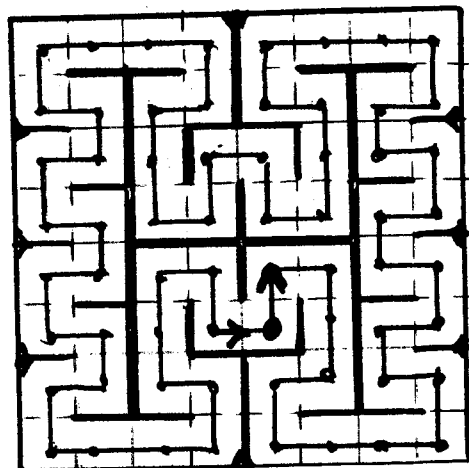
FIGURE 9



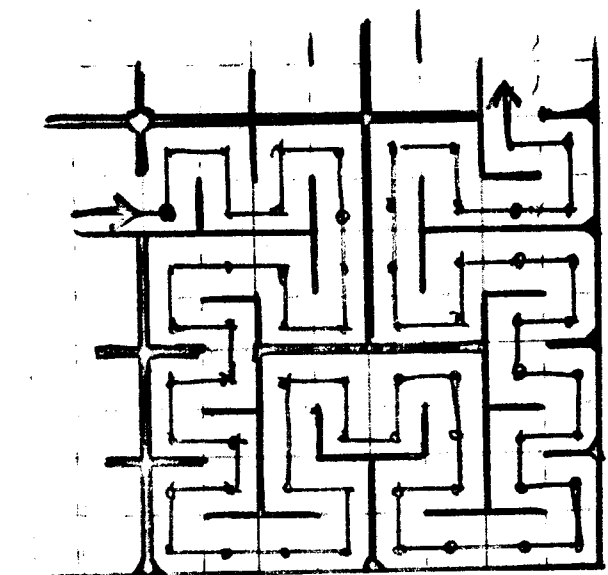
(2)



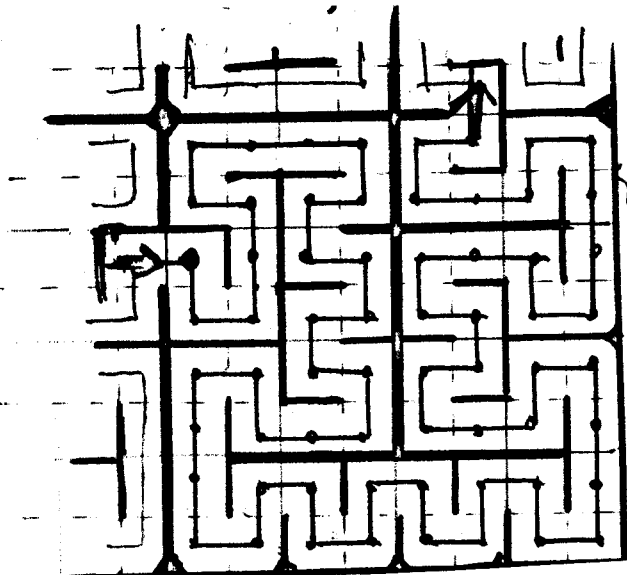
(3₁)



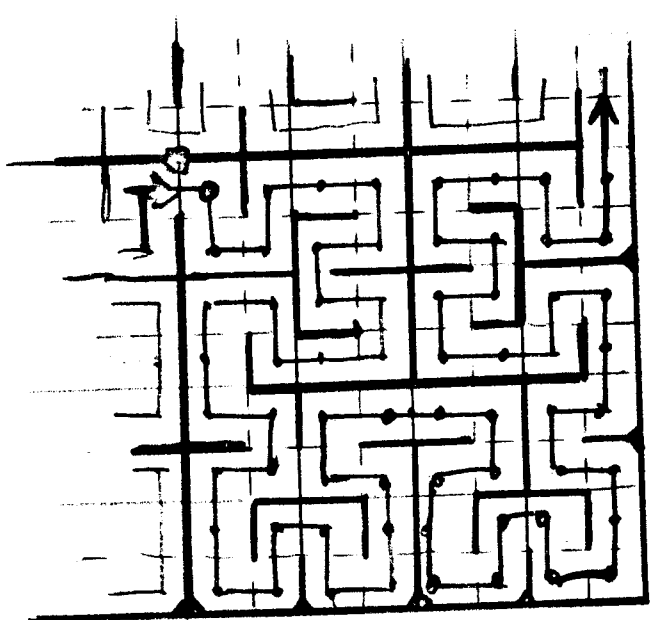
(3₂)



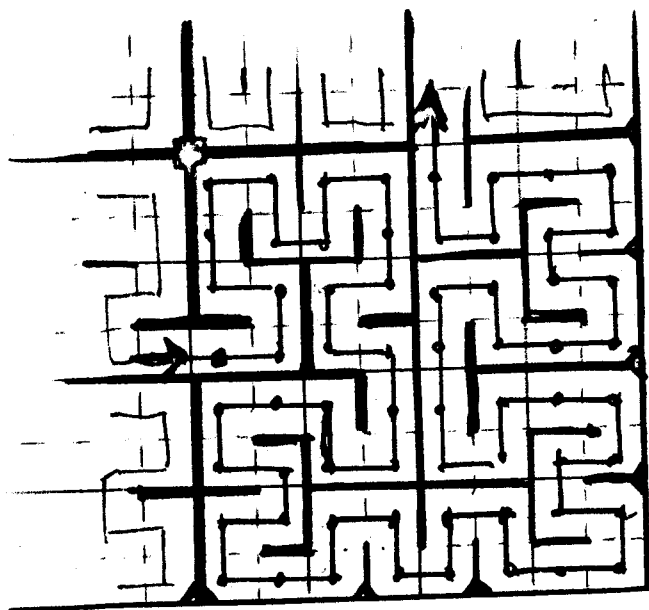
(41,2) quart du carré



(42,2) quart du carré



(41,1) quart du carré

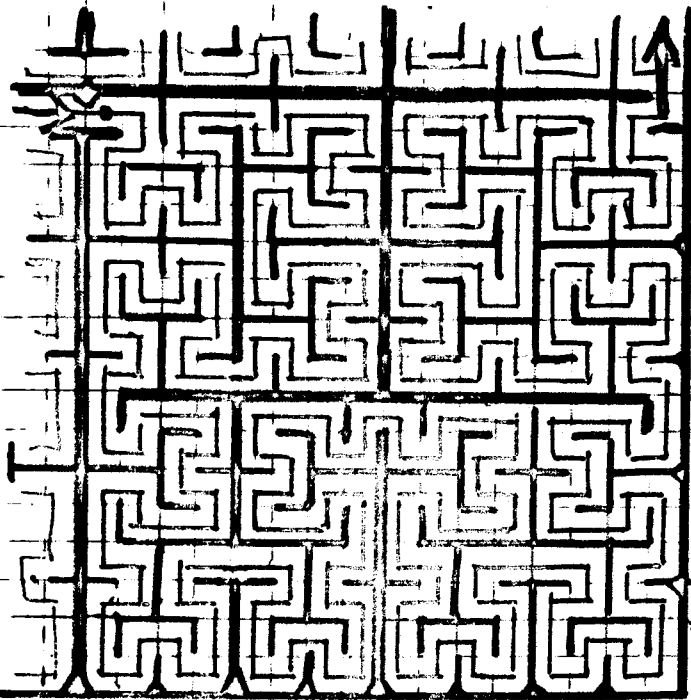


(42,1) quart du carré

FIGURE 9 (suite)

Deux exemples d'ordre 5
(parmi les 8 cas)

(51,1,1) quart du carré



(52,2,2) quart du carré

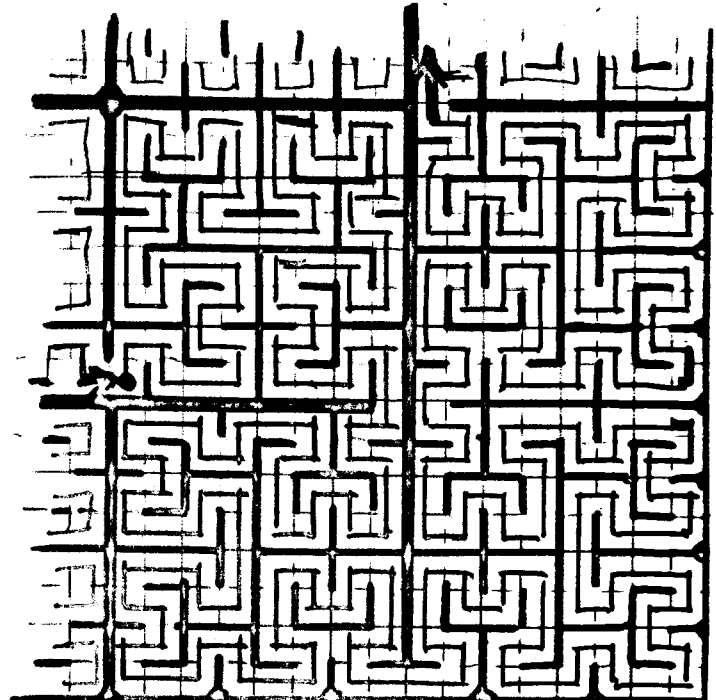
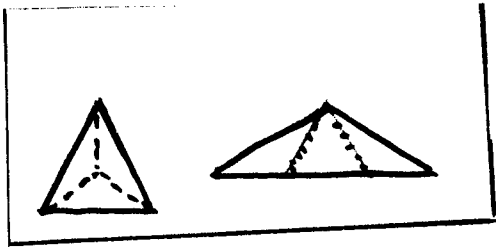
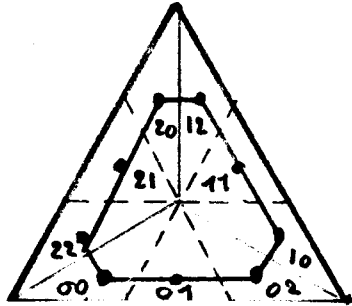


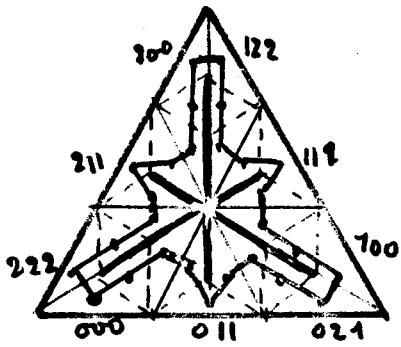
FIGURE 10



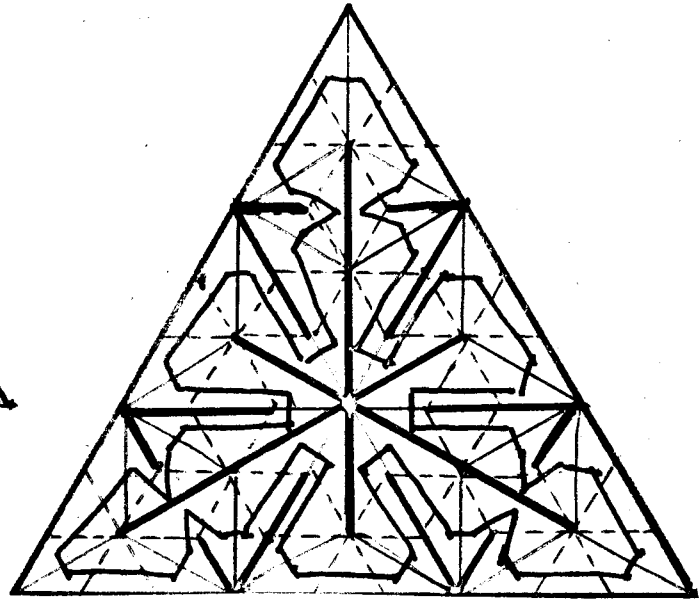
(1)



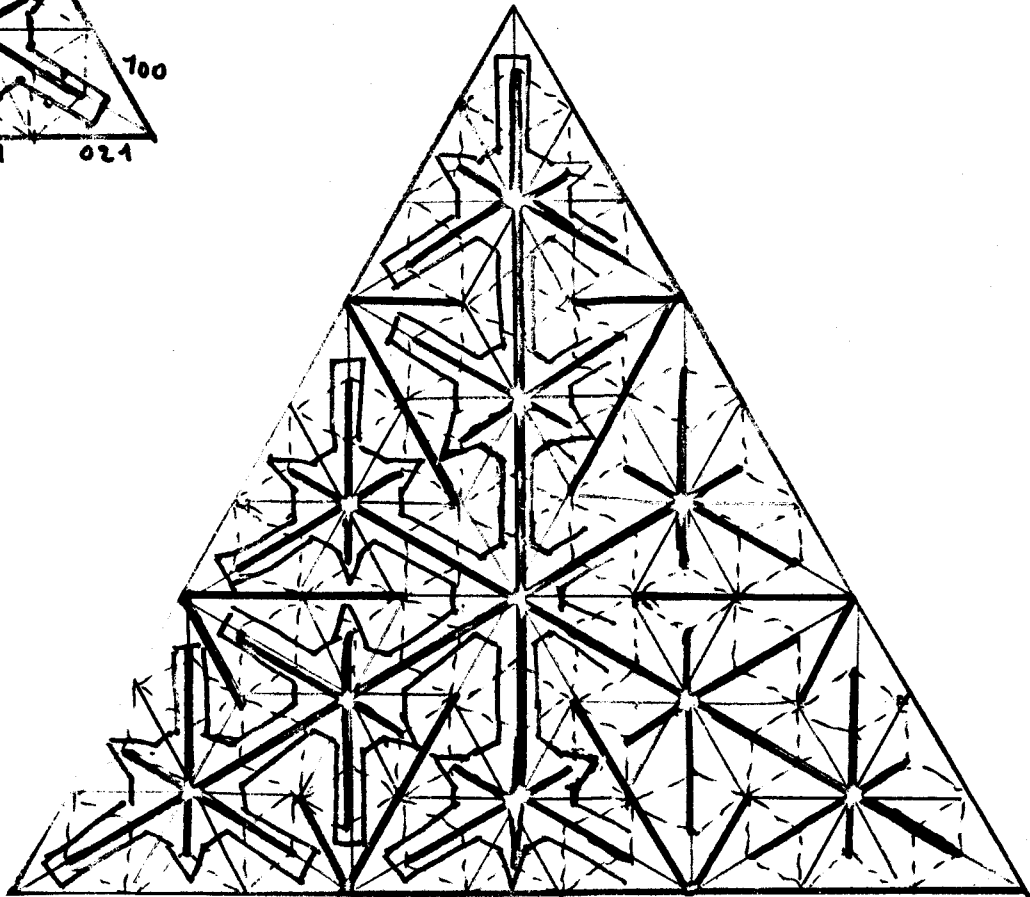
(2)



(3)



(4)



(5)