1ère leçon :

Chacun des 17 élèves va tirer une fois dans chaque sac. Les enfants proposent rapidement d'écrire au tableau "tout ce qui sort". (lettres n pour noir ou blanc)

Au 11ème tirage, ils affirment que les trois sacs contiennent des noirs et des blancs

A la fin de la série des 17 tirages, les enfants totalisent les noirs et les blancs tirés de chaque sac

A : 9 n, 8 b
B : 11 n, 6 b
C : 5 n, 12 b

TIRAGES

A : n n b n b b n n b b
n n b b n n b

B : n b n n b n n b n n
b n b b n n n

C : b b n b b b b b n b
b b b n n b n

Discussion des enfants :

- Dans les sacs A et B, il y a plus de noirs que de blancs ; dans le sac C, plus de blancs que de noirs
- non, car on peut tirer toujours le même jeton
- comment pourrait-on prouver que s'il y a plus de noirs que de blancs dans un sac, on tire plus de noirs que de blancs ?

2ème leçon :

Les 17 enfants sont présents. Ils recommencent une nouvelle série de tirages. Une élève propose de faire les totaux et de les comparer avec ceux de la veille.

A : 10 n, 7 b
B : 12 n, 5 b
C : 4 n, 13 b

TIRAGES

A: b, n b n b n n n b n b n n n n b b
B: n n n b b n n n b n n n b b n n n
C: n b b n b b b b b n b b b b n b b

Ils constatent que, comme la veille, on tire plus de noirs dans A et dans B et plus blancs dans C.

Discussion des enfants :

- On pourrait tirer toujours un même jeton !
- J'ai réfléchi à la maison ; s'il n'y avait qu'un blanc dans le sac, ça serait dur de trouver 13 blancs à la suite.

.../...

Quand on pioche, on mélange, on ne peut pas tirer toujours le même.
hie , il y a ait 9 noirs pour A. Là, il y en a 10. Dans tous les sacs, il y a 1 de différence.

Un elève propose qu'on fasse des séries de 5 tirages

	TIRAGES	
Avant de tirer dans C : "il va y avoir plus de blancs"	A : n n n n b	4n 1b
après : "dans C, c'est pas pareil"	B : b b n n n	3n 2b
	C : n n b n n	4n 1b
On décide de faire une autre série de 5 tirages		
- ça sert à rien	A : b n b n n	3n 2b
- ça prouve qu'on n'a pas dit juste car il n'y a pas toujours la même chose.	B : n b n n n	4n 1b
	C : b b b b n	1n 4b

Les enfants demandent qu'on leur donne la composition d'un des sacs, puis combien il y a de noirs en tout, de blancs en tout.

3ème leçon :

Les enfants proposent de continuer des séries de 5 tirages.

A : b n n n n 4n 1b
B : n n n n n 5n
C : b b b b b 5b

Remarques des enfants :

-"les deux dernières sont fausses car il y a des blancs dans B et des noirs dans C"
- Il faut retirer dans B et C

B : n b n n n 4n 1b
C : b b b b b 5b

On retire encore dans C :

C : b n b b b 1n 4b

Joie bruyante des enfants.

La certitude de la composition de C se fait jour. Les enfants veulent retirer encore dans C et proposent de totaliser (les tirages de 5, issus de C).

4 b 1n
5 b
5 b
4 b 1 n

.../...

4ème leçon :

La maîtresse demande aux enfants de raconter les leçons précédentes.

- "On a tiré dans le sac C pour voir si on trouvait les mêmes résultats.
- On a trouvé ce qu'il y a dans le sac : 4 blancs, 1 noir
- On va essayer pour les autres sacs : B d'abord, ensuite A."

Tirages dans B : (les enfants font toujours des séries de 5 tirages)

4 n 1 b
5 n
3 n 2 b
4 n 1 b
5 b

Les élèves veulent éliminer les séries de 5 n et 5 b. Ils les barrent sur le tableau.

- "il y a 3 n 2 b ou 3 b 2 n."

Ils font de nouveaux tirages, 5 séries de 5 tirages,

3 n 2 b
4 n 1 b
3 n 2 b
2 n 3 b
4 n 1 b

et veulent compter le nombre de fois que le tirage donne une composition possible.

4 n 1 b ——— 5 fois
2 n 3 b ——— 2 fois
3 n 2 b ——— 4 fois

"5 n est faux, on ne le compte pas.
- même 5 b est faux."

Les enfants continuent les tirages dans B : Le tirage suivant donne 3 n 2 b.

donc on compte maintenant 3 n 2 b : 5 fois.

"Il y a deux ex-aequo : il faut retirer jusqu'à ce qu'il y ait deux de différence."

On tire : 3 n 2 b ——→ 6 fois
4 n 1 b ——→ 6 fois
3 n 2 b ——→ 7 fois
3 n 2 b ——→ 8 fois

"Ca y est !" Dans B, il y a 3 noirs 2 blancs,
Dans C, il y a 4 blancs 1 noir."

.../...

5ème leçon :

Les enfants cherchent maintenant le contenu du sac A, en comptant les tirages de 5.

15 séries de 5 tirages donnent :

2 b 3 n 5 fois
1 b 4 n 3 fois
3 b 2 n 7 fois

Certains enfants proposent alors la composition : 3 b 2 n.

D'autres protestent :

- non, car si on regarde les résultats des tirages des autres séances, on a toujours tiré plus de noirs que de blancs.

La méthode est jugée peu sûre par la classe.

Proposition d'un élève : 3 élèves tireront chacun 5 fois. On comptera combien il y a en tout de blancs et de noirs et on divisera par 3 pour trouver la composition du sac A.

Les enfants tirent en tout :

10 n 5 b

n 10 : 3 = 3,33

b 5 : 3 = 1,66

Un élève fait remarquer que la somme est "4,99", ce qui fait presque 5".

6ème leçon :

La maîtresse fait rappeler par les enfants la nouvelle méthode proposée par eux au cours de la 5ème leçon : 3 tirages de 5, totaliser puis diviser par 3.

a) Un enfant propose alors de fabriquer un sac dont on connaîtra la composition. On leur présente un nouveau matériel : une bouteille et des billes. On met dans la bouteille 4 billes bleues et une jaune. On l'appelle la bouteille Z.

Résultat des tirages avec la bouteille Z :

5 b
5 b
3 b 2 j

Au total : 13 b 2 j

donc : 4,33 0,66

b) La maîtresse propose de refaire des tirages d'un sac sans préciser aux enfants qu'il s'agit du sac Z. Les enfants tirent et obtiennent :

11 b 4 n

3,66 et 1,33

.../...

c) - Pourquoi faites-vous toujours 3 séries de 5 tirages ?" Les enfants proposent de faire 5 séries de 5 tirages avec la bouteille Z.

Résultats :

3 b 2 j ; 5 b ; 4 b 1 j ; 4 b 1 j ; 3 b 2 j ;

Au total 19 b 6 j

donc : 3,8 1,2

Les enfants tirent encore 2 fois dans Z pour cumuler avec les trois premiers tirages faits en *a*.

Ils trouvent encore 19 bleus 6 jaunes

en divisant par 5, 3,8 et 1,2

7ème leçon :

Les enfants rappellent ce qu'ils ont fait à la leçon précédente : des séries de tirages, d'abord 3 fois puis 5 fois.

a) Sur la proposition des enfants, on refait l'expérience avec une bouteille contenant 4 billes blanches et une noire. Ils proposent 5 séries de 5 tirages.

Au total 18 b 7 n

18 : 5 = 3,6

7 : 5 = 1,4

---

total : 5

Tirages
b b b b n
b b b n n
b b b n b
n n b b b
b n b b b

Remarque : Ayant compté par erreur 6 n, les enfants trouvent tout de même 1,4 (ce qui prouve qu'ils opèrent par soustraction).

b) Nouveaux tirages avec la bouteille :

Commentaire sur 5 b : "ils sont faux"

Un enfant explique pourquoi le total fait toujours 5 : 19 + 6

"18 + 7 = 25

25 : 5 = 5"

b b b n b
b b n n n
b b b b b
b b b b b
b b n b n

Un enfant propose d'ajouter les résultats. Une discussion s'engage au cours de laquelle les autres enfants lui expliquent qu'il faudra diviser par 10.

Résultats : n : 13 : 10 = 1,3

37 b; 13 n b : 37 : 10 = 3,7

.../...

c) Certains enfants proposent de faire une série de 6 tirages.

Résultats : 24 b, 6 n	tirages
b : 24 : 6 = 4	b n b n b
n : 6 : 6 = 1	b b b b n
	b b b b b
"C'est un coup de pot"!	b b n b b
	n b b b b
	b b b b n

La maîtresse propose d'opérer sur les 16 tirages :

61 b 19 n

n → 19 : 16 = 1,18

b → 61 : 16 = 3,81

La maîtresse propose aux enfants d'utiliser ainsi les résultats obtenus au cours des séances précédentes. Ils veulent tester le sac A puis le sac B.

A : b → 19 : 6 = 3,16

n → 11 : 6 = 1,83

B : b → 11 : 6 = 1,83

n → 19 : 6 : 3,16

8ème leçon :

Changement de matériel : Des bouteilles vont remplacer les sacs.

Pour plus de commodité, les enfants demandent à la maîtresse de faire "en cachette" des bouteilles de même composition que les sacs A, B, C qu'ils désignent de même : "bouteille A, bouteille B, bouteille C".

Les enfants étant sûrs de la composition des sacs B et C (voir 4ème leçon), ils s'intéressent de nouveau à la composition du sac A, devenu "bouteilleA".

Ils hésitaient (voir 5ème leçon) entre les compositions :

3 b 2 n et 2 b 3 n.

Une fillette propose de refaire des séries de 5 tirages et de compter combien de fois sortent les compositions précédentes :

3 b 2 n et 2 b 3 n.

Ils n'avaient pas pu conclure avec 15 tirages, ils demandent à en faire 150.

La première composition l'emporte nettement.

Les enfants concluent . "il y a 2 blancs, 3 noirs dans le sac A comme dans le sac B".

.../...

Remarque : Cette séance peut sembler marquer une régression par rapport à la leçon précédente (cumul pour plusieurs séries et division par le nombre de séries) cependant, c'est à partir de cette leçon que les enfants prennent conscience de la nécessité d'un grand nombre de tirages avant de conclure.

9ème leçon :

Au début, la maîtresse rappelle aux enfants qu'ils ont proposé 2 méthodes :

- la première (compter les séries de 5 tirages) les a conduits à conclure;
- la deuxième (cumul et divisions) a été à peine ébauchée (6ème et 7ème leçons).

Elle propose de reprendre cette deuxième méthode (jusqu'à des conclusions que l'on comparera aux précédentes)

Plan de travail :

1 - faire un grand nombre de tirages

2 - Diviser le nombre des blancs et le nombre des noirs par le nombre de tirages.

La maîtresse introduit la notion de cumul de manière systématique.

Organisation de la classe : 3 groupes de travail I, II, III.

- le groupe I fait des tirages avec la bouteille A
- le groupe II fait des tirages avec la bouteille B
- le groupe III fait des tirages avec la bouteille C

Les résultats sont disposés dans des tableaux : On effectue des séries de tirages (10 tirages, 5 tirages, 15 tirages...). Pour chaque tirage, sont notés le nombre de blancs et le nombre de noirs. Une ligne indique le cumul du nombre des coups tirés. Les 2 dernières lignes indiquent le rapport des nombres cumulés de blancs ou de noirs au nombre cumulé de coups tirés.

Exemple de tableau réalisé par un groupe :

.../...

TABLEAU DU GROUPE I (bouteille A)

Blancs	5	2	7	4	3	4	3	3	3	6	5	5	5	3	6	4	3	4	3	5	3	5	4	11	36
Cumul des blancs	5	7	14	18	21	25	28	31	34	40	45	50	55	58	64	68	71	75	78	83	86	91	95	106	142
Noirs	5	3	8	6	7	5	7	7	7	4	5	5	5	7	4	6	7	6	7	5	7	5	1	4	64
Cumul des noirs	5	8	16	22	29	34	41	48	55	59	64	69	74	81	85	91	98	104	111	116	123	128	129	133	197
nbre de coups tirés	10	15	30	40	50	59	69	79	89	99	109	119	129	139	149	159	169	179	189	199	209	219	229	239	339
Blancs	5:10	7:15	14:30	18:40	21:50	25:59	28:69	31:79	34:89	40:99	45:109	50:119	55:129	58 139	64:149	68:159	71:169	75:179							
nbre de coups	0,50	0,45	0,49	0,45	0,42	0,42	0,40	0,39	0,48	0,44	0,41	0,46													
Noirs	5:10	8:15	16:30	22:40	29:50	34:59	41:69	48:79	55:89	59:99	64:109	69:119	74:129	81:139	85:149	91:159	98:169	104:179							
Nbre de coups	0,50	0,53	0,53	0,55	0,58	0,57	0,57	0,60	0,61	0,50	0,58	0,57													

10ème et 11ème leçons:

Les enfants ont repris les tirages commencés au cours de la 9ème leçon. Le groupe I (bouteille A) a fait 249 tirages
Le groupe II (bouteille B) a fait 249 tirages
Le groupe III (bouteille C) a fait 229 tirages.

A la fin de la 11ème séance, on sent une lassitude des enfants à faire tous ces calculs : additions et divisions (d'autant qu'ils n'ont pas eu le temps de réfléchir à ce qu'ils pourront faire des résultats obtenus). C'est alors qu'une fillette à la fin de la leçon, fait la proposition suivante adoptee par toute la classe :
"On n'a qu'à inventer des bouteilles dans lesquelles on mettra les billes nous-mêmes.

Le sac C sera représenté par la bouteille X → 4 b 1 n
Le sac B sera representé par la bouteille Y → 3 b 2 n
La bouteille Z ne représentera rien → 1 b 4 n

On ajoutera tous les blancs et tous les noirs et on divisera par le nombre de tirages (pour chaque bouteille)"
(La maîtresse fait écrire par l'enfant ce qu'elle vient de dire pour pouvoir en faire le point de départ de la leçon suivante).

La fillette compose les 2 premières bouteilles d'après les résultats trouvés au cours des 4ème et 8ème leçons et qu'il s'agit de contrôler La 3ème composition de bouteille : 1 b 4n, correspondrait à une solution qui avait été rejetée.

Ici, l'enfant ne pense pas à la 4ème composition possible qui est 2 b, 3n.

12ème leçon :

On reprend, au cours de cette leçon, la proposition faite et écrite à la fin de la 11ème séance.

Un enfant écrit sur le tableau noir pour résumer :

X → 4 b 1 n
Y → 3 b 2 n
Z → 1 b 4 n

Plusieurs enfants pensent alors qu'il faudrait une 4ème bouteille car ils s'aperçoivent qu'il manque la composition possible :

2 b 3 n.

.../...

Cette nouvelle proposit-on est adoptée et ajoutée.

Certains enfants pensent également aux compositions 5 b et 5 n mais les rejettent immédiatement "puisqu'il est sorti des blancs et des noirs de tous les sacs".

Organisation de la classe :

On a donc maintenant 4 groupes (I, II, III, IV) qui font eux-mêmes la composition de leur bouteille :

groupe I ⟶ 4 b, 1 n
groupe II ⟶ 1 b, 4 n
groupe III ⟶ 3 b, 2 n
groupe IV ⟶ 2 b, 3 n

Les tirages recommencent. D'où la réalisation de 4 nouveaux tableaux (1 par groupe) pour une série de 180 tirages.

REMARQUE : les enfants ont choisi des séries de 10 pour faciliter les divisions.

13, 14ème leçons :

Pendant 2 leçons, les enfants tirent, inscrivent leurs résultats sur les tableaux, calculent les rapports indiqués.

Chaque groupe fait 180 tirages.

15ème leçon :

Au cours de cette leçon, la maîtresse fait faire pour chaque groupe un graphique représentant les tirages (courbes)

Horizontalement, on indique le nombre de tirages (par 10)

Verticalement, on indique les valeurs des rapports.

Chaque point indique un rapport marqué dans le tableau.

Exemple : au 70ème tirage, le rapport est 0,56 pour les blancs
0,40 pour les noirs.

Les points sont joints en 2 courbes de couleurs différentes : une pour les blancs, une pour les noirs

Au cours de cette séance, les enfants, après avoir gradué les 2 axes, ont tracé successivement des parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre glissante (qu'ils venaient d'utiliser en géométrie) car ils ne disposaient pas de papier quadrillé.

.../...

16ème leçon : L'ordinateur.

Un terminal d'ordinateur est mis à la disposition des enfants. Au cours de cette séance, ils vont l'observer, on leur montre la manière de l'utiliser : chaque groupe, tout à tour, vient appeler le programme. La machine imprime d'abord :
"Nous allons faire des tirages avec remise dans un sac contenant des billes blanches et noires, il faut remplir le sac avant de jouer. Combien met-on de billes blanches ?"

L'élève répond par exemple : 3, et le dialogue continue :
"et combien de billes noires ?" Combien de tirages doit-on effectuer ?
Dans l'ordre, on a obtenu les couleurs : n, n, n, b, n, b, b, n, n, b, n, b, b
b, n, n, b, b, n, n, et conclut :
"ces 20 billes tirées ont été : 9 billes blanches, 11 billes noires".

On explique aux enfants que la machine effectue elle-même des operations de remplissage des sacs et de tirages auxquelles ils étaient habitués. Les enfants admettent que ces expériences sont équivalentes parce que nous le leur affirmons, et parce que les tirages fournis par la machine sont présentés comme ceux auxquels ils étaient habitués.

Exemple :

```
-----COMBIEN DE TIRAGES DOIT-ON EFFECTUER ?
?100
DANS L'ORDRE ON A OBTENU LES COULEURS :
N  N  B  B  B  B  N  N  B  B  N  N  N  B  B  B  B  N  B  B
N  B  B  B  N  B  B  B  N  B  B  B  B  N  N  N  N  B  N  B
B  B  B  B  B  B  B  N  B  N  N  B  N  B  B  N  N  B  B  B
B  B  B  B  B  B  N  N  B  N  B  N  N  B  N  N  B  N  N  N
B  B  B  N  B  N  B  B  B  B  N  B  N  B  N  N  B  N  N  B
********** CES  100 BILLES TIREES ONT ETE :
**********   60 BILLES BLANCHES ET   40 BILLES NOIRES

POUR TIRER ENCORE DANS CE SAC ECRIVEZ 1
POUR CHANGER SON CONTENU ECRIVEZ 2. POUR CESSER LE JEU ECRIVEZ 3.
```

Les enfants demandent 10 tirages puis 20, puis 50... jusqu'à 180 tirages (comme ils l'avaient fait "à la main")

Pour leur permettre de calculer les fréquences cumulées très rapidement et de tracer une nouvelle courbe, nous mettons à leur disposition une "Monroë 1665"

Les enfants obtiennent alors le graphique ci-dessous :

17ème leçon :

Les enfants rappellent ce qui avait été proposé à la fin de la leçon précédente : refaire les courbes sur du papier quadrillé

- la courbe représentant les tirages faits avec les bouteilles
- la courbe représentant les tirages donnés par l'ordinateur.

1) Par groupe, les enfants retracent les courbes.

2) Examen de ces courbes.

Les courbes terminées, les enfants les observent et font des remarques :

-"au début, elles sont très écartées, et puis elles se rapprochent de plus en plus".

-"Peut-être que si on continuait des tirages, elles se rapprocheraient encore, peut-être qu'elles se rencontreraient"

-"Elles s'écarteraient peut-être comme au début".

-"S'il y en avait d'autres, est-ce qu'elles feraient pareil ?"

(A la fin de la séance, la maîtresse reporte sur un même papier quadrillé les courbes de tous les groupes).

18ème leçon : 1) Observation des courbes :

Les papiers quadrillés sur lesquels sont tracés les courbes sont affichés au tableau.

Les enfants rappellent ce qu'ils ont découvert la veille.

Ils observent tous maintenant les 4 courbes correspondant aux 4 compositions des bouteilles :

1 b 4 n
2 b 3 n
3 b 2 n
4 b 1 n

Ils remarquent que, "lorsqu'il n'y a qu'un blanc, la courbe est en bas, qu'elle monte un peu lorsqu'il y a 2 blancs, un peu plus avec 3 blancs et qu'elle est en haut de la feuille quadrillée quand il y a 4 blancs."

Plusieurs d'entre eux remarquent qu'au 180ème tirage les courbes restent autour des valeurs 0,20, 0,40, 0,60 et 0,80.

Ils demandent alors que l'on fasse de grands tirages : 2000, 4000, 5000, "pour voir ce que font les courbes à ce moment-là".

L'ordinateur donne les résultats des tirages demandés par les enfants qui tracent les courbes correspondantes.

.../...

2) Jeu des devinettes :

La maîtresse fait une suite de tirages à l'ordinateur pour un contenu de sac de 5 billes. Elle marque sur le tableau les fréquences cumulées tous les 10 tirages et ceci jusqu'à 180. (l'ordinateur donne ces fréquences)

Les enfants doivent deviner de quel sac est fait le tirage.

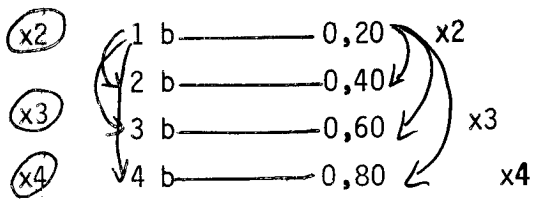
1 b 4 n
ou 2 b 3 n
ou 3 b 2 n
ou 4 b 1 n

Réussite 100 %.

Un enfant explique comment il a trouvé :

- si les fréquences sont autour de 0,20, il y a 1 blanc
- si elles sont dans les 0,40, il y a 2 blancs
- si elles sont dans les 0,60, il y a 3 blancs
- si elles sont dans les 0,80, il y a 4 blancs.

Un autre propose le tableau suivant :



(a)

19ème leçon :

La maîtresse propose un jeu aux enfants :

Elle réalise, sur l'ordinateur, une composition de sac (contenant toujours 5 billes) inconnue d'eux.

A l'aide de tirages qu'ils peuvent acheter avec des jetons - 1 jeton donne droit à 5 tirages - ils doivent :

- trouver la composition du sac.
- trouver les valeurs dont se rapprochent les fréquences cumulées si on faisait beaucoup de tirages
- vérifier cette valeur à l'ordinateur.

La classe est divisée en 4 groupes, chaque groupe dispose de 20 jetons.

Lorsqu'un groupe croit avoir trouvé la composition du sac, il fait un pari et mise le nombre de jetons qu'il veut :

- si la composition proposée est la bonne, il récupère sa mise et autant de jetons que ceux de la mise

.../...

- si la composition proposée n'est pas la bonne, il perd la mise.

C'est le groupe qui devine la bonne composition et qui a le plus de jetons en fin de partie qui gagne.

Trois groupes sur quatre trouvent la bonne composition.

Le 1er groupe qui avait voulu économiser des jetons, n'a demandé qu'un faible nombre de tirages, d'où échec.

(c'est au cours de cette leçon que les enfants découvrent le calcul des probabilités).

Pour trouver les valeurs vers lesquelles tendrait la fréquence cumulée, ils font le tableau suivant :

blancs	valeur de la fréquence théorique
5 b →	1
4 b →	0,80
3 b →	0,60
2 b →	0,40
1 b →	0,20
0 b →	0

qu'ils expliquent de plusieurs manières suivant les groupes :

Beaucoup d'enfants (la majorité) cherchent la valeur pour 5 b, puis trouvent cette valeur pour 1 b en divisant par 5. Ensuite, ils calculent successivement pour 2 blancs, 3 blancs, 4 blancs (voir 18ème leçon, tableau (a)

Un autre enfant explique que pour trouver ces valeurs, il divise chaque fois le nombre de blancs par 5.

La maîtresse demande alors :

"S'il y avait 4 jetons dans le sac, pourriez-vous calculer ces valeurs"?

Les enfants réalisent alors le tableau suivant :

blancs	
4b →	1
3b →	0,75
2b →	0,50
1b →	0,25

Puis ils calculent les valeurs pour un contenu de sac de 8 jetons.

8 b →	1
7 b →	0,87
6 b →	0,75
5 b →	0,62
4 b →	0,50
3 b →	0,37
2 b →	0,25
1 b →	0,12

.../...

20ème leçon :

Au cours de cette leçon, les enfants vérifient à l'aide de l'ordinateur, les frequences theoriques qu'ils ont trouvées pour les différents contenus : 5 billes, 4 billes, 8 billes.

Pour cela ils font un grand nombre de tirages (5000 dans l'ensemble). L'ordinateur donne les fréquences théoriques. Ils comparent avec ce qu'ils ont trouvé.

21ème leçon : Fiche didactique

I - Notions acquises :

Les enfants ont découvert que si l'on faisait un grand nombre de tirages dans des sacs contenant 5 billes, les fréquences cumulées des blanches étaient vo' i es des valeurs suivantes :

1 le sac contient	1 bille	blanche	.....	0,20
" "	2 billes	"		0,40
" "	3 billes	"		0,60
" "	4 billes	"		0,80
" "	5 billes	"		1

Ils ont formulé la correspondance et la propriété de linéarite.

La question suivante leur a été posée :

Si on vous demandait de deviner la composition d'un sac qui contient 8 billes, o me t fer' z us ?

Les enfants ont répondu : on ferait pareil (i.e)

a) nous simulerions les différents sacs possibles
b) nous ferions de nombreuses suites de tirages
c) nous calculerions les fréquences cumulées (nous regarderions combien de tirages il faut faire pour que les fréquences soient bien séparées), nous ferions dans le sac inconnu une série de ce nombre de tirages et nous comparerions la fréquence cumulée aux valeurs obtenues par simulation).

II - Objectifs :

Il s'agit maintenant de leur faire découvrir qu'il est possible de prévoir ces valeurs pour économiser la simulation.

III - Deroulement :

1 - Rappel des notions acquises rappelées ci-dessus (phase collective :
2 - Présentation du jeu : consigne.

.../...

Nous avons un sac qui contient 4 billes. Vous devez

1°) Deviner la composition du sac

2°) Deviner les valeurs dont se rapprochent les "fréquences cumulées" (au bout de 3000 tirages par eux)

Pour cela, vous avez le droit de faire des tirages (à l'ordinateur) dans ce sac mais il faut les acheter avec des jetons : 1 jeton donne droit à 5 tirages.

Quand vous croyez savoir ce que contient le sac, vous pouvez parier sur son contenu (On n'a le droit de parier qu'une fois, on parie 1 contre 1). Par exemple, si vous misez 12 jetons, si vous avez raison, vous prenez 24 jetons, si vous avez tort, vous perdez vos jetons.

De même pour les valeurs, vous pouvez parier à 1 contre 1 dès que vous voulez.

Alors la machine fait 3000 tirages et vous voyez si vous avez gagné.

Au départ, chaque groupe a 25 jetons. On verra ceux qui auront le plus de jetons à la fin.

3 - Distribution des jetons.

Les groupes peuvent venir demander leurs tirages à tour de rôle.

C'est le même sac pour tout le monde.

4 - Conclusions (Phase collective)

Les valeurs sont 1-------0,25
2-------0,50
3-------0,75

5 - Propositions pour la suite.

Pourriez-vous trouver les valeurs (appelées probabilités de sortir une blanche) dans le cas où le sac contient 8 billes. On répondra la prochaine fois, mais individuellement cette fois.

IV - Matériel :

Programmes utilisés par le TE 300 et mode d'emploi.

.../...

22ème leçon : (vendredi 31 mai)

Elaboration, par les enfants, d'un tableau des intervalles.

1 - Rappel de la maîtresse :

Vous savez maintenant deviner quelle est la composition d'un sac contenant un nombre quelconque de billes.

Vous savez aussi trouver les valeurs vers lesquelles s'approchent les fréquences cumulées lorsqu'on fait un grand nombre de tirages (et ceci pour toutes les compositions).

2 - Question : "Si vous vouliez expliquer à des camarades qui s'interrogeraient sur la stratégie à employer pour deviner la composition d'un sac de 5 billes, que diriez-vous ? Il faudrait que ces enfants puissent décider dans tous les cas qui se présentent".

Après discussion avec les enfants, la maîtresse propose de rassembler dans un tableau tous les résultats obtenus et rappelés en désordre par les enfants ("si on trouve 0,80, on peut dire qu'il y a 4 blancs, si on trouve 0,60 on peut dire qu'il y a 3 blancs, et... si on trouve 0,79...)

Les enfants travaillent par groupe (il y en a 6). Chaque groupe cherche et écrit sur une feuille les intervalles correspondant à toutes les compoisitions possibles. Ces résultats sont rassemblés dans un tableau collectif inscrit sur le tableau noir de la classe.

TABLEAU A

	1 blanc	2 blancs	3 blancs	4 blancs	5 blancs
Equipe I	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe II	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe III	0,01 à 0,36	0,37 à 0,55	0,56 à 0,76	0,77 à 0,99	1
Equipe IV	0,01 à 0,26	0,27 à 0,56	0,57 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe V	0,01 à 0,38	0,39 à 0,58	0,59 à 0,78	0,79 à 0,99	1
Equipe VI	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1

Remarque : Un groupe d'enfants avait placé la valeur 0,99 dans la dernière colonne (5 blancs)

4 b	5 b
0,80...0,98	0,99.....1

Une discussion très intéressante s'est engagée entre ce groupe et les 5 autres.

.../...

Un enfant est venu expliquer :
"Si on trouve 0,99 à la fréquence, ça voudra dire qu'il y a 1 noir dans le sac Comme il n'y a pas de noir, il faut mettre 0,99 dans la colonne 4 blancs".

On propose pour la leçon suivante de vérifier ce tableau et de le modifier s'il y a lieu.

23ème leçon : mardi 4 juin.

Vérification des intervalles de la 4ème colonne du tableau A (22ème leçon)

4 b, 1n.

Le tableau des intervalles réalisé au cours de la précédente leçon est resté inscrit sur le tableau noir de la classe.

La maîtresse demande aux enfants de rappeler pourquoi on a fait ce tableau (Il va permettre de décider s'il y a 1 blanc, 2 blancs, 3 blancs, 4 blancs, dans un sac contenant 5 billes).

Il s'agit donc de savoir si les intervalles proposés par les élèves sont corrects.

Tous les enfants ne sont pas d'accord : certains veulent le modifier, d'autres non, d'autres enfin ne savent pas... La maîtresse leur propose de vérifier ces intervalles en commençant par ceux de la 4ème colonne qui correspond à la composition 4 b 1 n.

Pour cela, les enfants, qui travaillent en équipe, ont à leur disposition des feuilles de tirages faits par l'ordinateur pour la composition 4 b 1 n. Chaque équipe a 2 feuilles comportant :

- 1ère feuille : des suites de 10 tirages
  des suites de 20 tirages
  des suites de 50 tirages
- 2ème feuille : des suites de 200 tirages
  des suites de 500 tirages
- sur les deux feuilles : les fréquences cumulées correspondantes à chaque tirage.

Dans chaque équipe, les enfants se partagent le travail :

- l'un vérifie les suites de 10 et de 20 tirages
- un autre vérifie les suites de 50 et de 200 tirages
- un autre enfin vérifie les suites de 5000 tirages.

Pour cela, ils marquent en face de chaque fréquence donnée par l'ordinateur "vrai" ou "faux" suivant que cette fréquence se trouve dans l'intervalle proposé par l'équipe ou non.

.../...

Exemple : Equipe 1 : Elle avait proposé, dans le tableau A, (22ème leçon) (et pour la composition 4 b 1 n), l'intervalle "0,80 à 0,99".

Sur la feuille de tirages de l'ordinateur (suite de 10), l'enfant marque "vrai" en face des fréquences qui se trouvent dans l'intervalle ci-dessus et "faux"en face des fréquences qui se trouvent en dehors de cet intervalle.

Il compte le nombre de "vrais" et de "faux".
Ces résultats (nombre de "vrai" et de "faux") sont relevés et inscrits sur le tableau noir en face de chaque équipe :

Il est alors possible pour tous les enfants de les comparer et de voir quelle est la "méthode" qui a donné le plus de "vrai" pour toutes les suites de tirages. Elle est déclarée la meilleure par l'ensemble de la classe. Chaque équipe corrige donc la 4ème colonne du tableau A en fonction des résultats qu'elle vient de trouver.

4 B

0,75.....0,99
0,70.....0,99
0,75.....0,99
0,70.....0,99
0,70.....0,99

A la fin de la leçon, la maîtresse proposera aux enfants d'améliorer le tableau pour les compositions 2 b, 3 n et 3 b 2 n, au cours de la prochaine séance (et ceci en utilisant la même méthode)

.../...

24ème leçon :

Travail sur les intervalles (suite)

Vérification des intervalles de 2ème et 3ème colonnes du tableau A (22ème leçon) 2b,3n et 3b, 2n

I - Travail de groupe :

Les enfants reprennent leur travail sur le tableau des intervalles réalisé au cours de la 22ème leçon et modifié (pour la composition 4 b, 1n) au cours de la leçon précédente.

Ils doivent :

a) tester les intervalles qu'ils ont proposés pour la composition 3 b, 2 n. Pour cela, ils utilisent les feuilles de tirages de l'ordinateur. Ils procèdent de la même manière que la veille :

Pour chaque groupe,

- 1 élève vérifie les suites de 10 tirages
- " " " " de 20 tirages
- " " " " de 50 tirages
- " " " " de 200 tirages et de 5000 tirages.

et compte, pour chaque série, combien de fois il trouve "vrai" et combien de fois il trouve "faux".

b) D'après les résultats obtenus, améliorer, si-possible, les intervalles de manière à avoir le plus de "vrai" possible (surtout dans les suites de 10, de 20, de 50 tirages).

c) Tester les intervalles pour la composition 2 n, 3 b (par le même procédé) et les améliorer.

II - Phase collective :

A Chaque groupe dicte à la maîtresse les nouveaux intervalles qui sont inscrits sur le tableau collectif.

On compare les solutions et on cherche quelle est celle qui a donné les meilleurs résultats (en comptant pour chaque série le nombre de "vrai" et de "faux").

Les enfants rectifient eux-mêmes les intervalles pour la composition 1 b, 4 n (sans vérification sur le feuille de l'ordinateur) en fonction des intervalles de la colonne 2 b, 3 n.

.../...

Ⓑ Observation du tableau.

La maîtresse fait rappeler par les enfants quelles valeurs théoriques ils avaient trouvées pour chaque composition (contenu : 5 billes).

1 b ⟶ 0,20
2 b ⟶ 0,40
3 b ⟶ 0,60
4 b ⟶ 0,80
5 b ⟶ 1

Question de la maîtresse : Comment fait-on pour découper les intervalles ? Où faut-il mettre ces valeurs théoriques dans le tableau ?
Réponse d'une enfant : "On a coupé "au milieu"

Une discussion s'engage à propos "du milieu"
De quel milieur s'agit-il ?
"On a coupé le tableau entre 0,20 et 0,40, au milieu"
On cherche quel est ce milieu. Un enfant explique ce qu'il a trouvé :
"J'ai fait (0,40 - 0,20) : 2 et j'ai ajouté le résultat à 0,20.
Le calcul suivant fait par l'enfant sur son brouillon est écrit sur le tableau :

$$0,20 + \frac{0,40 - 0,20}{2} = 0,30$$

Pour s'assurer que tous les enfants ont compris, la maîtresse propose de trouver le milieu entre 0,35 et 0,55.
entre 0 29 et 0 66
entre 0,40 et 0,60
entre 0,60 et 0,80.

(ce travail est fait individuellement par tous les enfants)

Le tableau des intervalles ci-dessous est donc définitivement adopté par les enfants :

1 b	2 b	3 b	4 b	5 b
0,01 0,29	0,30..... 0,50	0,51.....0,70	0,71.....0,99	1

En conclusion, la maîtresse fait remarquer que la méthode la meilleure n'est jamais sûre au bout de 10, de 20 de 50 tirages. Pour être à peu près sûr de la composition d'un sac de 5 billes, il faut au moins 200 tirages. Au bout de 5000 tirages, on peut être certain du résultat.

A la fin de la leçon, on propose aux enfants, les exercices écrits individuels suivants : (qui seront corrigés au cours de la leçon suivante).

1) Sur 100 tirages, on a trouvé une fréquence cumulée de 0,91 blancs
Combien de fois a-t-on tiré 1 blanc ?

.../...

2) Il y a 4 billes dans un sac

- au bout de 10 tirages, on trouve une fréquence cumulée de 0,30 blancs

Combien y-a-t-il de jetons blancs dans le sac ?

- on trouve 0,30 au bout de 100 tirages.

Combien y-a-t-il de jetons blancs dans le sac ?

3) Dans un sac, on met 10 billes. De quelles valeurs se rapprocheront les fréquences cumulées des blancs suivant la composition des sacs ?

4) Quels sont les intervalles de décision ?

5) Combien de tirages demanderez-vous pour que la méthode donne plus de 9 réponses justes sur 10 ?

25ème leçon : (vendredi 7 juin) (samedi 8 : correction des exercices)

Nouvelle expérience : Recherche d'évènements quelconques.

Matériel : 6 cartons carrés : 3 rouges et 3 jaunes.

Sur chaque carton est inscrit 1 chiffre.

1	2	3	4	5	6
carton rouge	carton jaune	carton rouge	carton rouge	carton jaune	carton jaune

1°) La maîtresse montre les cartons aux enfants, puis les met dans un sac de tissu opaque :

Question : "on va piocher des cartons l'un après l'autre (comme dans une loterie)

Que peut-il arriver lorsque je tire 1 seul carton ?"

Elle invite les enfants à écrire sur leur cahier la liste de toutes les possibilités.

- On appelle "ce qui peut se produire" un "évènement".

Tous les évènements trouvés par les enfants sont inscrits sur le tableau noir :

- il sort un rouge
- " un jaune
- " le carton 1
- " " " 2
- " " " 3
- " " " 4
- " " " 5
- " " " 6

.../...

2°) Mesure de probabilité sur ces évènements

a) La maîtresse propose aux enfants de trouver la probabilité de sortir le carton 1 ?

(Auparavant, il a fallu rappeler - ce qu'était la probabilité
- ce qu'était la fréquence cumulée

A ce moment-là, un enfant fait le rapprochement avec les billes du sac et dit :

- les cartons, c'est comme les billes, c'est comme s'il y avait 6 billes dans le sac. C'est la même chose que les billes blanches et les billes noires".

b) Alors la majorité de la classe pense à une nouvelle composition de sac :

3 rouges et 3 jaunes.

La question posée "probabilité de tirer le 1" est oubliée; les enfants s'intéressent pour l'instant à la couleur.

La maîtresse demande alors : "quelle est la probabilité de tirer un jaune ?"

Réponse des enfants : "c'est 0,50"

"Pourquoi ?" parce que 3 : 6 = 0,50

c) On reprend la première question :

"probabilité de tirer le 1 ?"

Les enfants s'intéressent au carton 1 comme ils se sont intéressés aux billes blanches).

Ils cherchent sur leur cahier et la majorité écrit : 1 : 6 = 0,16

La maîtresse propose alors de calculer la probabilité de tirer le 2 ? le 3 ? le 4 ? le 5 ? le 6 ?

Echec presque total de la classe.

Les enfants répondent : pour le 2 ⟶ 0,33 (2 : 6)
pour le 3 ⟶ 0,50 (3 : 6)
pour le 4 ⟶ 0,66 (4 : 6)
pour le 5 ⟶ 0,83 (5 : 6)
pour le 6 ⟶ 1

Beaucoup ne comprennent pas que les chiffres ne sont que des signes. Un élève dit pourtant : "on aurait pu mettre A, B, C, D, E, F à la place des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6".

Cette leçon sera reprise à la séance suivante.

.../...

26eme leçon : lundi 10 juin.

Recherche d'évènements - Calcul des probabilités.

Matériel : - Les cartons de la leçon précédente (portant les chiffres 1,2,3,4,5,6)
- Des cartons identiques aux précédents mais portant les lettres A, B, C, D, E, F, à la place des chiffres
- Des "dés" : certaines faces portent des points de couleur, d'autres sont blanches :
  - 1 dé avec des points rouges et des faces blanches
  - 1 dé avec des points bleus et des faces blanches
  - 1 dé avec des points verts et des faces blances.
- Des "dés" ordinaires (dont les faces portent 1,2,3,4,5,6 points)
- 1 dé blanc (dont les faces portent 0,1,2,3,4,5 points)
- 1 dé "pipé"
- 1 polyèdre à 20 faces. Sur chaque face 1 chiffre : 1 ou 2, ou 3 ou 4...9 (il y a 2 zéros, 2 un, 2 deux, etc...)
- une boîte en plastique transparent contenant 20 perles de couleurs différentes (2 bleues, 2 rouges, 2 vertes, 2 jaunes

1 - Travail de Groupe :

La classe est divisée en plusieurs groupes de travail, chaque groupe a un matériel différent : soit un dé, soit un polyèdre, soit les cartons, soit la boîte de perles, etc...)

On demande aux enfants de chaque groupe de faire sur leur cahier de brouillon, la liste de tous les évènements possibles.

2 - Phase collective :

Un enfant de chaque groupe énumère la liste des évènements correspondant au matériel qu'il a .

Cette liste est écrite sur le tableau noir et disposée de la manière suivante : (voir tableau B - page suivante)

1) - on inscrit dans chaque colonne I, II, III, IV, V, VI, VII, la liste de tous les évènements.

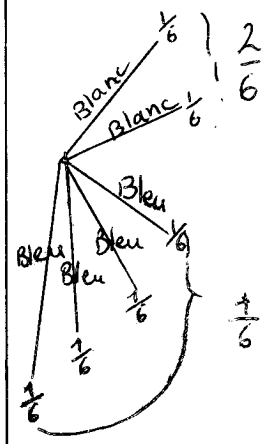
2) - on propose aux enfants de calculer (individuellement ou par groupe) la probabilité de chaque évènement.
- d'abord pour les colonnes I, II, III, IV
- puis pour les colonnes VI, VII, VIII.

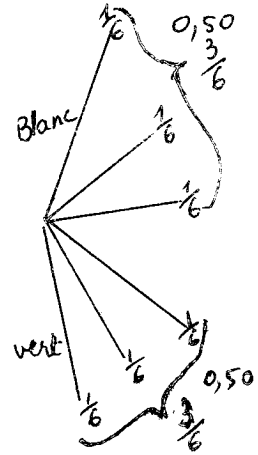
3) - on demande aux enfants de calculer, pour les colonnes I et II, la probabilité de tirer un carton jaune.
- et pour la colonne I, la probabilité de tirer un nombre pair.

Les enfants paraissent avoir bien compris, presque tous ont fait des calculs de probabilités exacts et savent expliquer ce qu'ils ont fait.

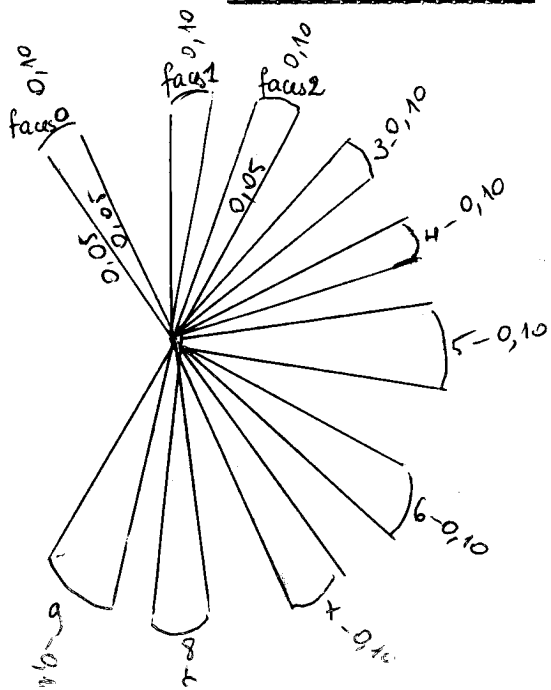
.../...

I L (cartons portant les lettres)	Probabilité	II sac N (carton portant les nombres)	Probabilité	III Dé rouge	Probabilité	IV dé bl c	Probabilité	ce pipé		V dé ble	VII dé vert
Il sort 1 jaune											
" " 1 rouge											
" " A	$\frac{1}{6}$	il sort 1	$\frac{1}{6}$	il sort 1	$\frac{1}{6}$	il sort 0	$\frac{1}{6}$				
" " B	$\frac{1}{6}$	il sort 2	$\frac{1}{6}$	il sort 2	$\frac{1}{6}$	il sort	$\frac{1}{6}$				
" " C	$\frac{1}{6}$	il sort 3	$\frac{1}{6}$	il sort 3	$\frac{1}{6}$	il sort 2	$\frac{1}{6}$				
" " D	$\frac{1}{6}$	il sort 4	$\frac{1}{6}$	il sort 4	$\frac{1}{6}$	il sort 3	$\frac{1}{6}$				
" " E	$\frac{1}{6}$	il sort 5	$\frac{1}{6}$	1 sort 5	$\frac{1}{6}$	il sort 4	$\frac{1}{6}$				
" " F	$\frac{1}{6}$	il sort 6	$\frac{1}{6}$	1 sort 6	$\frac{1}{6}$	il sort 5	$\frac{1}{6}$				





VIII - Polyèdre à 20 faces



a) on cherche la probabilité de tirer 1 face : 1 : 20 = 0,05

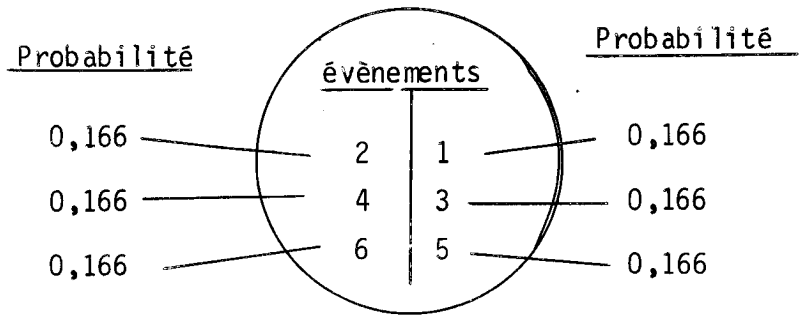
b) on cherche la probabilité de tirer une face 0, une face 1, une face 2, etc...

2 : 20 = 0,10

B

27ème leçon :

I - On prend 1 dé à jouer portant sur chaque face 1 point ou 2 points ou 3 points ou 4 points ou 5 points, ou 6 points.
"Si je lance, dit la maîtresse, quelle sera la probabilité pour qu'il tombe sur un nombre pair".
Recherche individuelle puis correction collective sur le tableau noir.



- les enfants écrivent la liste des évènements
- ils calculent la probabilité pour chaque évènement

Question : "Si on fait 1000 tirages, combien de fois (approximativement) sortira chaque nombre ?

- 166 répondent les enfants (0,166 x 1000)

Quelle sera la probabilité pour qu'il tombe sur un nombre pair ?

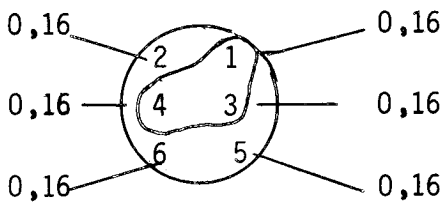
Réponses des enfants : "0,166 + 0,166 + 0,166 = 0,498".
"on aurait pu le trouver en faisant $\frac{3}{6}$ = 0,50"

II - Phase collective.

On prend les cartons protant les nombres 1, 2, 3, 5, 5, 6 (ceux de la 25ème leçon).

"Ecrivons les évènements qui peuvent arriver et entourons en rouge les évènements : "il sort un rouge"

Pair ou impair :
0,16 + 0,16 + 0,16
ou : $\frac{3}{6}$ = 0,50



- quelle est la probabilité de sortir :
  - 1 rouge
  - 1 jaune
  - 1 pair
  - 1 impair
  - 1 rouge pair
  - 1 rouge impair

Calcul très rapide et très sûr des enfants pour les 4 premiers évènements (on marque à mesure sur le tableau les probabilités trouvées)

.../...

Pour les deux derniers (1 rouge pair, 1 rouge impair) la maîtresse propose à chaque groupe de venir écrire ses résultats sur le tableau (disposés de la manière suivante):

Equipes	1	2	3	4	5
Rouge pair	0,16	0,50	0,16	0,33	0,50
Rouge impair	0,33	0,50	0,16	0,66	0,50

Une discussion très intéressante s'engage entre les équipes. Deux équipes viennent très vite rectifier leurs résultats (Equipe 2 et équipe 5) Lorsque tout le monde est d'accord, le tableau est corrigé.

III - Exercice individuel

On reprend les cartons (matériel de la 26ème leçon)

A B C D E F Questions posées par écrit sur le tableau noir

Quelle sera la probabilité des évènements suivants:

"il sort un rouge"
"il sort une voyelle"
"il sort une consonne"
"il sort une des 3 premières lettres de l'alphabet"
"il sort l'initiale du prénom de Joël"
"il sort une lettre"
"il sort l'initiale du prénom de Frédéric"

Très grande réussite à cet exercice pour l'ensemble de la classe.

28ème leçon :

Matériel : 1 dé à jouer (portant de 1 à 6 points)

I - RAPPEL :"Si je jette le dé, quels sont les évènements qui peuvent arriver?" demande la maîtresse.
(phase collective)

Les enfants énumèrent la liste des évènements élémentaires :

"il sort 1
il sort 2, etc..."

.../...

II - TRAVAIL DE GROUPE

Question de la maîtresse : Je vais lancer le dé trois fois de suite.

1) cherchez tous les évènements élémentaires qui peuvent se produire et marquez-les sur votre cahier, combien y-en-a-t'il ?

2) trouvez un moyen pour les compter tous sans répéter 2 fois le même".

Les enfants travaillent par groupe. Au début, tous les enfants commencent la liste de tous les évènements possibles. Mais très vite, certains protestent : "c'est beaucoup trop long !" quelques-uns la continuent jusqu'au bout, d'autres cherchent un moyen plus rapide. Finalement :

- 3 groupes pensent à faire un arbre
- 1 groupe essaie, par des calculs, de trouver le résultat demandé
- 1 groupe fait la liste complète (voir feuille jointe) des évènements élémentaires.

III - Mise en commun des résultats

Un représentant de chaque groupe vient expliquer ce qui s'est fait dans son groupe.

Résultats obtenus :

Equipe 1 : l'arbre est commencé correctement mais pas terminé.

Equipe 2 : c'est l'équipe qui fait la liste complète des évènements mais elle n'arrive pas au résultat demandé : nombre des évènements.

Equipe 3 - Equipe 4 : l'arbre est fait correctement - les résultats sont corrects : 216 évènements.

Equipe 5 : Le résultat est correct : 216 évènements. Une fillette vient expliquer comment elle a obtenu ce résultat :

"je peux faire une colonne en commençant par le 1
" " " " " par le 2
" " " " " par le 3 etc..."

Dans chaque colonne, il y a 36 évènements possibles. (elle précise qu'elle les a comptés pour la 1ère colonne). Puisqu'il y a 6 colonnes, il y a 6 x 36 évènements".

La technique de l'arbre est adoptée par toute la classe qui trouve ce moyen plus sûr. (l'arbre n'est d'ailleurs pas reproduit en entier sur le tableau noir.

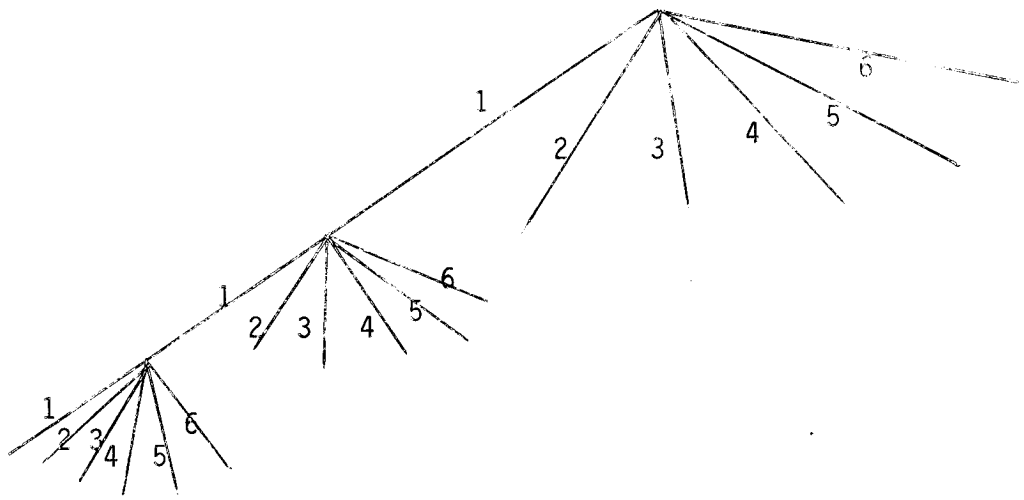
.../...

111
112
113
114
115
116
121
122
123
124
125
126
131
132
133
134
135
136
141
142
143
144
145
146
151
152
153
154
155
156
161
162
163
164
165
166
200
211
212
213
214
215
221
222
223
224
225
226
231
232
233
234
235
236

241
242
243
244
245
246
251
252
253
254
255
256
261
262
263
264
265
266
311
312
313
314
315
316
317
318
319
321
322
323
324
325
326
331
332
333
334
335
336
341
342
343
344
345
346
351
352
353
354
355
356
361
362
363
364
365
366

411
412
413
414
415
416
421
422
423
424
425
426
431
432
433
434
435
436
441
442
443
444
445
446
451
452
453
454
455
456
461
462
463
464
465
466
511
512
513
514
515
516
521
522
523
524
525
526
531
532
533
534
535
536

541
542
543
544
545
546
551
552
553
554
555
556
561
562
563
564
565
566
611
612
613
614
615
616
621
622
623
624
625
626
631
632
633
634
635
636
641
642
643
644
645
646
651
652
653
654
655
656
661
662
663
664
665
666



Les enfants énumèrent les évènements en suivant les branches de l'arbre : 111
112
113 etc... et les comptent.

29ème leçon :

Matériel : 2 dés :

- l'un rouge, avec 1,2,3,4,5,6 sur les faces
- l'autre blanc avec 1 face blanche que les enfants désignent 0 et 1,2,3,4,5

I - Expérience proposée aux enfants :

On jette les 2 dés en même temps : on fait la somme de ce qui sort.

Question posée : Quels sont tous les évènements élémentaires qui peuvent se produire ?

La liste de ces évènements est marquée sur le tableau noir par la maîtresse sous la dictée des enfants : (les enfants remarquent que l'on ne peut pas avoir 0 puisque le dé rouge n'a pas de face sans chiffre, ni 12)

En face de ces évènements, la maîtresse écrit la probabilité qu'ils ont de se produire, toujours sous la dictée des enfants.

Evènements	Probabilité
0	0
1	1 : 11 = 0,09
2	1 : 11 = 0,09
3	1 : 11 = 0,09
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

.../...

Les enfants pensent que tous les évènements se produiront avec la même probabilité.

Question de la maîtresse :

"Si je jette 200 fois les dés, combien de fois sortira le "5" par exemple ?

Après réflexion, plusieurs enfants répondent 18 fois.

A la demande de la maîtresse, une fillette vien expliquer :

"0,09, c'est pour 1 tirage"

si on fait 100 tirages, on trouvera 0,09 x 100 = 9 fois

et si on fait 200 tirages, 9 x 2 = 18 fois.

II - Travail de groupe : Vérification des résultats obtenus.

La classe est divisée en 5 équipes. La maîtresse distribue 2 dés à chaque équipe (1 rouge et 1 blanc) et invite les enfants à jeter les dés, à faire la somme et à marquer ce qui sort. Les résultats de chaque équipe sont ensuite marqués sur le tableau noir de la manière suivante :

Sommes	Equipe I	Equipe II	Equipe III	Equipe IV	Equipe V	Total
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	3	2	2	8
2	5	4	6	3	4	22
3	13	1	5	10	6	35
4	7	8	9	8	4	36
5	16	7	16	9	8	56
6	14	5	15	9	9	52
7	12	3	13	6	12	46
8	10	4	7	4	10	35
9	5	5	8	2	4	24
10	3	4	5	3	3	18
11	4	1	3	2	2	12
						344

Les enfants remarquent alors que les résultats obtenus ne correspondent pas du tout aux prévisions qu'ils avaient faites. Ils constatent que les nombres qui soertent le plus sont 5 le 6 et le 7 et que ceux qui sortent le moins sont le 11, le 10, le 2 et le 1.

La maîtresse demande : Si ces 11 évènements sortaient avec la même fréquence, quelle serait la fréquence pour chacun d'eux (sur les 344 tirages que vous venez de faire) ?

.../...

Les enfants calculent : 344 : 11 = 31,27.

La maîtresse demande alors aux enfants d'essayer de comprendre pourquoi les nombres 5, 6, 7 sortent plus souvent que les autres.

Une fillette dit alors : "c'est normal qu'on ne trouve pas souvent 2 parce qu'il n'y a que 2 possibilités pour le faire :

0 avec le dé blanc, 2 avec le dé rouge

ou 1 " " et 1 " " " "

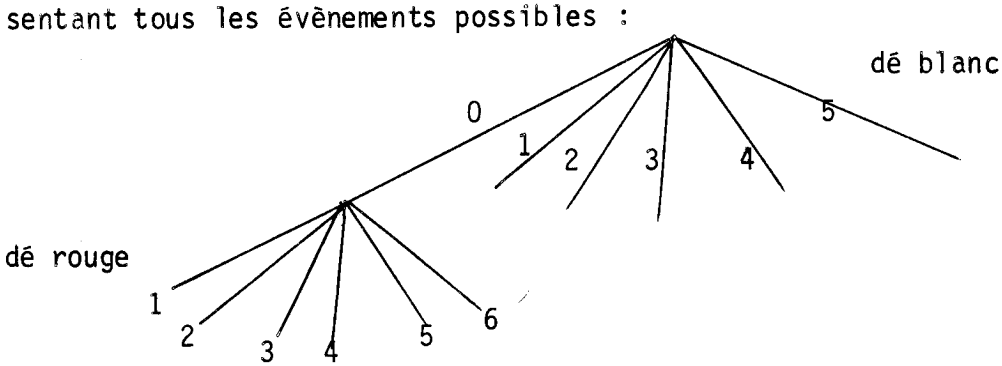
Les enfants proposent alors de chercher combien il y a de possibilités de faire 5 (puisque c'est lui qui est sorti le plus).

Le même travail se fait ensuite pour 1, pour 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et on obtient le tableau suivant :

pour	faire	1	1	possibilité	
"	"	2	2	"	"
"	"	3	3	"	"
"	"	4	4	"	"
"	"	5	5	"	"
"	"	6	6	"	"
"	"	7	5	"	"
"	"	8	4	"	"
"	"	9	3	"	"
"	"	10	2	"	"
"	"	11	1	"	"

(Les différentes manières d'obtenir ces sommes sont énumérées par les enfants).

La maîtresse demande de calculer la probabilité d'un de ces évènements élémentaires. Pour cela, les enfants proposent de faire 1 arbre représentant tous les évènements possibles :



6 x 6 = 36

La probabilité pour chacun est calculée ensuite : $\frac{1}{36} = 0,027$

La maîtresse demande alors de calculer quelle probabilité aura chaque somme de sortir.

.../...

Un enfant vient au tableau et écrit :

(*) Somme

pour 1	0,027
pour 2	0,027 x 2 = 0,054
pour 3	0,027 x 3 = 0,081
pour 4	0,027 x 4 = 0,108
pour 5	0,027 x 5 = 0,135
pour 6	0,027 x 6 = 0,162
pour 7	0,027 x 5 = 0,135
pour 8	0,027 x 4.....

Les enfants remarquent que pour 8, 9, 10, 11, l'on retrouvera la même probabilité que pour 4, 3, 2, 1.

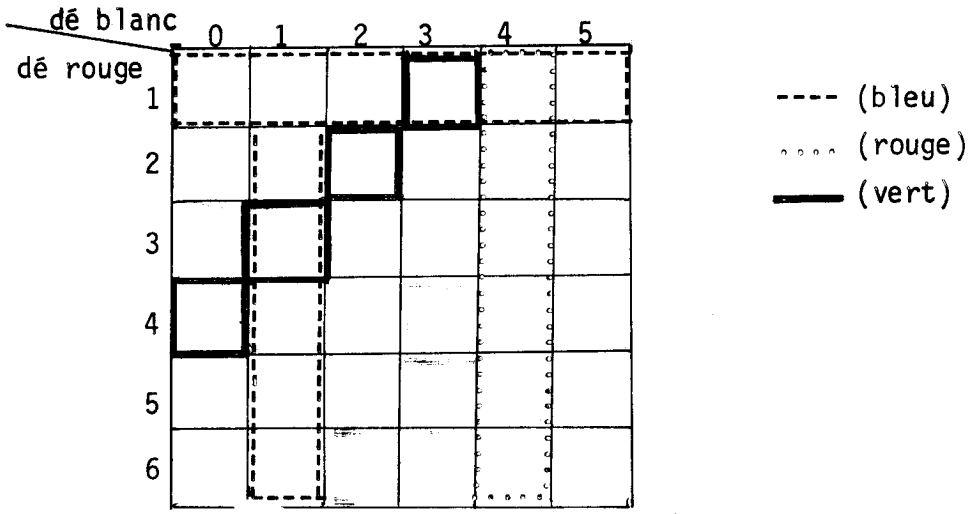
30ème leçon :

Cette leçon a eu essentiellement pour objectif de rappeler aux enfants ce qu'ils avaient trouvé au cours de l'expérience précédente :

- jeter les 2 dés, faire la somme
- trouver tous les évènements élémentaires qui peuvent se produire.

I - Représentation des évènements à l'aide d'un tableau

Tous ces évènements peuvent être représentés à l'aide d'un tableau (la maîtresse dessine le tableau ci-dessous).



Question posée : "il sort 1 avec le dé rouge" il s'agit d'entourer les cases qui représentent cet évènement.
(c'est un enfant qui vient entourer les cases correspondantes avec une craie de couleur).

.../...

Même question pour les évènements :

"il sort 4 avec le dé blanc"

"je tire un 1" etc.....

"Ça pourrait être en diagonale !" dit un enfant.

On cherche alors un évènement en diagonale. Un enfant vient entourer les cases en vert. Cet ensemble est formé de 4 évènements élémentaires qui sont énumérés par les enfants et écrits sur le tableau par la maîtresse :

$\{ (3,1), (2,2), (1,3), (0,4) \}$

A la demande de la maîtresse, un enfant vient entourer les cases représentant les évènements :

"on fait 1 avec les 2 dés"

"on fait 2 avec les 2 dés"

"on fait 3 avec les 2 dés"

"on fait 4 avec les 2 dés"

II - Rappel de la dernière leçon : Travail individuel.

En se reportant aux résultats obtenus au cours de la leçon précédente(tableau *) la maîtresse propose aux enfants de calculer la fréquence théorique de sortir la somme 1, la somme 2, la somme 3... sur 344 coups tirés.

Les résultats sont marqués sur le tableau noir :

Somme	sur 344 coups
1	0,027 x 344 =
2	0,054 x 344 =
3	0,081 x 344 =
4	0,108 x 344 =
5	0,135 x 344 =
6	0,162 x 344 =
7	0,135 x 344 =
8	0,108 x 344 =
9	
10	
11	

Les derniers résultats ne sont pas marqués par les enfants qui rappellent ce qu'ils avaient trouvé au cours de la leçon précédente :"pour 8 c'est la même chose que pour 4, pour 9, c'est la même chose que pour 3, etc..."

.../...

31ème leçon :

Matériel : 5 sacs opaques
10 boules blanches
5 boules noires
5 icosaèdres
5 jetons (ou 5 pièces de monnaie)
5 feuilles de papier affiche
1 feuille (tableau récapitulatif)

Les enfants sont répartis en 5 groupes de 4. La maîtresse distribue à chaque groupe le matériel indiqué, à savoir :

- le sac opaque contenant 2 boules blanches et une boule noire
- 1 pièce de monnaie (1 f.)
- 1 icosaèdre
- 1 feuille de papier affiche

1ère phase : Explication du jeu par la maîtresse : "je jette la pièce de monnaie
Si elle tombe sur pile, je lance l'icosaèdre,
Si elle tombe sur face, je pioche une boule dans le sac."

La maîtresse demande aux enfants de faire l'arbre des évènements élémentaire sur papier affiche.

2ème phase : Les enfants réalisent par groupe de 4 l'arbre demandé.

3ème phase : Chaque groupe affiche son arbre au tableau noir. Les enfants comparent et discutent. Après validation de leur travail, les groupes reprennent leur affiche et la maîtresse leur demande de proposer des effectifs théoriques pour chacun des 2 évènements : "il sort pile" "il sort face" et pour chacun des évènements trouvés - et ceci pour 240 tirages.

4ème phase : Chaque groupe fait 48 tirages pour éprouver son modèle et va écrire son résultat sur un tableau récapitulatif. Les résultats sont cumulés et les enfants comparent avec ce qu'ils ont trouvé.

5ème phase : Elle a pour but de découvrir le produit des probabilités.

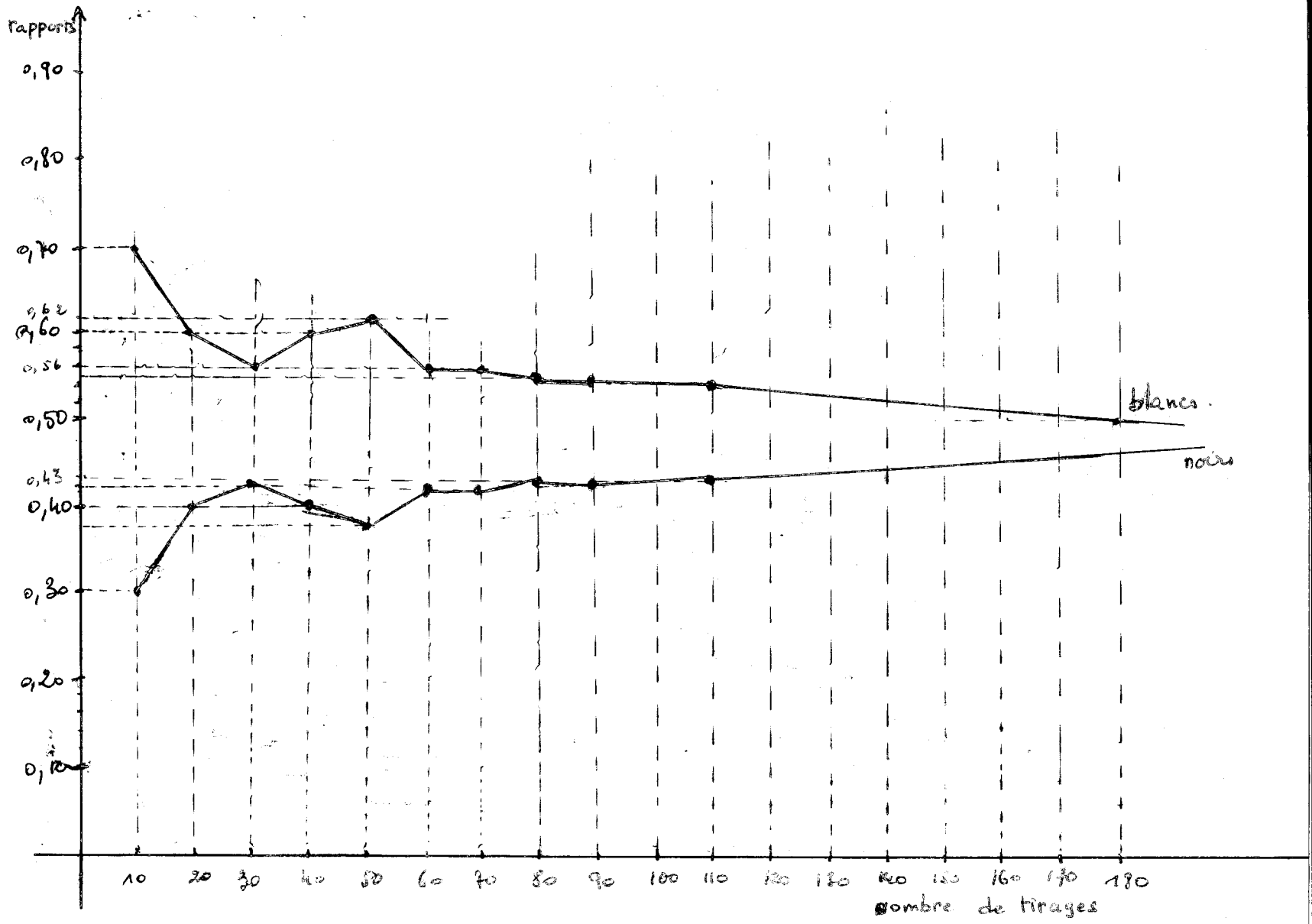


schéma de la p. 10
(fin de la 15e leçon)

SAC C

NNNNN BNBNN NNNNN BNNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNBBN NNNNN NNBNN NNNBN BNNNB
NNBNN NNBNN NNNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNBBN BNNNB BNNNB NNBNN BNBBN
BNNNN NBNNN BNNBN BNNNN NBBNN NNBNN NBNBB NNNNN NBBNN BBNNN NNNNN NBNNB NBBBN
NNNNN NNBNN NNNNN BNNNB NBBNN NNNNN NNNNB NNNNN BNNNN NNNNN NBNNN NNNNB NNNNN
NNNBN NNBNN NNNNN BNNNN NNNNN NNNNN NBNNN NNBBN NNNNB NNNBN NBNNB NNNNN NNBBN
NNBNN NNNNN NNNNN NNNNB NNBNN NNNNN NNNNB NBNNB NNBBN NNNBN NBBNN NNNNB NNNNB
NNNBN NBNNN NBNNN BNNNN NNNNN NNNNB NNBNN NNNNB NNNBB NNNNN NNNNB NBNNB BBBBB
BNNNN NNNNN NNNNB NBNNN NNNNB NBNNN NNNNN NNNNN NNNNN BBNNN NNNBB NNNBN BNBNN
NNNNB NNNNN NNNNN NNBNB NNNNB NNNNB BNNNN NNNNN NBNNN BNNNN NNNNB NBNBB NBNNN
NNNNN NNNNB NNNNN NNNNN BBNNN NNNNN BNNBN NBNBN NBNNB NNNNB BNBNN NBNBB NNNNB
NNNNN NNNBB NNBNN NNNNN NNNBN NBNNN NNNNN NBNNN NNNNN NNNNN NNNBN NBNNN NNNNN
NBNNB NBNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNNNN NNBNN NNBNN NNNNB NNNNN NNNNB NNNNN
NBNNN NNNBN BNBNN BNNNN BNNNN NNNNN NNNNB NNBNN NBBNN NNBNB BNNNN NNNNN NNNNN
NBBNN NBBNB NNNBN NNNNN NBNBN BNBNB NBNNN NNNNB NNBBN NNNNN NNNBB NNNNN NNNNN
BBBBN NNNNN NNNNN BNBBB NNNNN NNNNN NNNBB BBNNB BNNNB NNNNB NBBNN NNNNN NBNNN
NBNBB NNNNN NNNNN NNNNN NNNBN

SAC A

NNBBB BBBBN BBBBB NBBNB BNNNB NBBNN NBNNN BNNNN NBBBN NNBBB NNNNB BBBNB BNBBN
BBNBB BNBBN NBBBN BNBNB BBNNB BBBBN BBNNB BNBBB NBBBB BNBBN NBBBN BNNBB NNBNB
NBNNN NNBNN BNNNB NBBBN NBNBN BBBBN BBBNB BNBBB BNNBN NBNBN BNNBN BBBBB BNBNN
BNNNB NBBNB BNBBB BBNNB NNNNB NNBBB NBBBB BNBBB NBBBB NBBNB BNBNB BNBBB NBBBN
NBBBB BBBNN BBBNB BNBBB BNNBB NNBNB BBNBN BBBBB BBBBN NBBNB BNBBB NNNNB BBBBN
NNBNB NNBNN BBBBN NBNBB BBBBB BBBBB BNNBN NBBBB BNNBN NBBBN BBNNB NBBBB NBNNB
BBNBB NNBBN BNBNB BNBBB NNNBB BBNBN BBBBB NNBBB BBBBB NNBBN BNNNN BNBNB BNNBB
BNNNN NBBBB NBBNN NBBBN NBBNB BNNBB NBNBN BBBNB BBNBB BBBBN BBNBB BBBBB BBBNN
NNBNB BNBBB BNBBN NNBNB NNNBB BBBBB NNNBB NNBNN NNBBN BBNBB NNNBB BBBNB BBBNB
BNBBN NBBNB NNNNN BNNBN BNBBN BBNBN NNBNB BNBNB BBBBB NNBBB BBBBB NBBBB BNBBN
NBBBN NNNNB NNBBN NBBBB BBBNB BNNBB NNBBB NBBNN BNBBB BNBBB BNBBN NBBNB BBNBB
BNNBN BNNNB BBBBN BBBNB BNBNB BBBNN BNBNB BNBNB BBBNN NBBBB BBBBN NBBBB BNBNB
BBNBB BBBNN BNNBB NBBBN BBBNN NBNBN NBBNB BNBBN NNNNB NBNBN NBBBN BNBNB BBBNN
NNBBB NNNNN BBBBB BNBNB BNBNN BBNBB BBBBB NBNBB NNNNN NNBBB BNBBB NNNNB BBBBB
NBBBB BBBBN BNNNB NBNNB NBBBB BNNBN BBNNN NNNBN BBBNB NBNNB NBBBB BNBNB BBBNB
BNBBN NBNNB NBNBB BBBBB NNNBB

.../...

SAC.B

BBNBN NNBNB NNBNB BBNBB NBBNB NBBBB BNBNB NNBBN BBNBN NBBNN BNBNB BNNNB NBBBN
BBNNN NBNBN NNBBB BBBNB BNBBB NNNBB BNBBB NBBNN BBBBB BBBBB BBNBB BNBBN BBBBB
NBBBN BNNNN NBBNB NBNBB BBBNB BNBNN NBNBB NBBBB BNNBN NBNBB BNBBB NBBBN NNBBB
BNNNN NBBBN NBBBB BNBNB NNNNB NNBBN NBBNB NNBBB NBBBB BBBBN BNBBB BNBBN BNNNB
NBBNN BBBBN BNNNB NBNNB BNNNB BBNBB NNBNN NNNBB BBBBN BBBNN NBNNB NNBBB BBNBB
BNBNB NBBNB BNNNN NBBNN NNBBB BBBNB BBBNN BBBBB BBBBB NBBNB BNBNB NNNBN NNBBB
NNBBN NBBBB BBNBN BBBNN BNBBN BNNBB BNBBB BNBBN BNBBN BBNNN NBBNB BNBBB BBNNB
BBBNB NBNNB NBBBB NNNBB BBBBN NNBBB NNBBN NBNNN NNBBB BBBNN BNNBB BBNNB BNBBN
NNNBB BBBBN BBBNN BNNBB BNBBB NNBNN NBBNB BBBBB BNNNB BBBNB BNBBB BBBNN BBNNN
BBNNB BBBBB BBBBB BNBBN NBBBB NBBNB NBNBB NBBNB BNNBB BBBBB NNBNB BBBBB NNBNB
BBBNB BBBNB BNBBN NBBNN BBBBB BBBNN BBBBN NBBBN BBBBB BNBNB NBNNN BNNNB NBNBN
BBNNN BBNBB NBBBB NBBBB NBBBN BBNBN NNNBB NBNBB BNNBN BBBBB BBBNN NNBBN NNBBB
BBBBB BNBBB BBBBN NNBBN NBBNN NNBBN NBBBB NBNBN NNNBB NNBNB BBBBN BNBBB NBBBB
BBBBB BBNBN BBBBB BBNBN NBNNB BBBNB BBBNB BBBNB BBBNN NNBBB BBNBN NBNNB BNNBN
BBBNN BBNBB BNBNN BBBBB NNBNN BBBBB BNNBN BNBBN NBNNB BNBNN BBBBB NBNNN BBNBN
NNNBB BNBBB NBNBB BNBBN NNBBB

1 BLANCHE - 4 NOIRES

NNNNB	NNNBN	NBNNN	BNNBB	NBNNN	BNNBB	NNNBN	NNNNN	NNNNN	BNNNN
NBNNN	NNNBN	NNNNN	NNBNN	NNNNN	NBNNN	BBBNN	NNNNN	NNNBB	BNNBN
NNNNN	NNBNN	NNNNN	NNNNN	NBBNN	NNBNN	NNNNN	NNNBB	NBNNN	NBNNN
NNNNB	NNNNB	NNNNN	NNBNN	BNNNB	NNNNB	NNNBN	NBNNN	NNBNN	NBNNN
NNNNN	BNNNN	NNNNN	NNBNN	NNBNN	BNNNB	NNBNN	NNNNN	NNNBN	NNNNN
NNBNN	NBNBN	NNNNN	NNNNN	NNBBN	NNNNN	BNNNN	NNNBN	BBBNB	BNNNN
BNNNN	NNNNN	NNNNN	NNNBN	NNNNN	NNNNN	BBBNN	NNNNN	NNNNN	NNNBN
NNNNB	NBNNN	NNNNN	NNBNN	BNNNN	NBNNN	BNNBN	NNNNN	BNNNB	BBNNN
NNNNN	NNNNN	NNNBN	NNNNN	NNNNN	NNNNB	NNBBN	NNNNN	NNNNN	NBNNN
NNBNN	NNNNN	BBNNB	NNBNN	NNNBN	NBBNB	NNNNN	NNNNN	NNNNN	NNBNN
NNNNN	NNNNN	NNNNB	NNBNN	BNNBN	NNBNN	NNNBN	NNNBN	NNNNN	NNNNN
NNBNN	NNNNB	NNNBN	NBBNN	BNBBN	BNNNN	NBBNN	NNNNB	BNBNN	NBNNN
BNNNB	BNNNN	BNBNB	NNNNN	NNBNN	BNNBN	NNNNN	BNNNN	NNNNN	NNNNN
NNNNN	NNNNN	NBBNN	NBBNN	BNNNN	NBNNN	BBNNN	NNNNN	NNNBN	NNNNN
NBBNB	NNBNN	NBNBN	NNNNB	NNNNB	NBNNN	NBNNN	NNBBN	NNNBN	NNNNN
NNNNN	NNNNN	BNNNN	NNNNB	NNBNN	NNBNN	NNNBN	NNBNN	NBNNN	NNBNN
NNNNN	NNBNN	NBBBN	NBNNN	NNNNN	BNNNN	NNNNN	NNNNN	NNNNN	NNNNN
NBNNN	NNNBN	NNNNN	NNNBB	NNNNB	NNNNN	BNNNN	NNBNN	NBNNN	NNBNN
NNNNB	NNNNN	BNNNN	NBNBN	NNBNN	BBNBB	NNNNN	NNNNN	NNBNN	NNNBB
NNNNN	BBBNB	NNNNN	NNNNN	NNNBN	NNNBN	NNNNN	BNNNN	NBNNB	NNNNN

2 BLANCHES - 3 NOIRES

BBBBN	NBNNB	NNBBN	NNNBN	NNNBB	NNNNN	BBBNN	BBNBN	BBBNB	BNNNN
BBNBB	NNBNN	BNNNN	BBNNN	NNNBB	BNNNN	NNNNN	NBNNN	NBBNN	BNNBB
NNNBB	NNBBN	NNBNN	BBNBN	BNBBB	BBBBB	BNNNN	NBNNB	BNNBN	BNBBB
NBNBN	NBNNB	NNBBN	NBBNB	NBNBN	NNNBB	BNNNN	BBNBB	BBNNN	NBNBN
NBBBB	NNBBB	NNBNN	NNBBB	BBBBN	NNBNB	NBBBN	NNNNB	BNNNN	NBNNB
NNNNN	BNBBB	NNBBN	BBNNN	NBNNN	BNBNN	NBBNN	NBNNN	BNBNB	BNBNN
NNNNN	BBBNB	BNBBN	NBNBB	BNNNN	BNNBB	NNBNB	NNNNN	NNNNB	NNNNN
NNNBB	NNBBN	BNNBB	NNBBN	NNBBB	NNBBB	BNNNN	BNBNB	BBNNN	BBBNB
NNBBN	BBNBN	NNNNB	BBNNB	BNNNB	NNNNN	NBNBN	BNBNN	NNNNB	NBNBB
BNNBN	NBNNB	NNNNB	BNNBB	BNBBN	NNNBB	NNNBB	NNNNB	BBNBN	BNBNB
NNNNB	NNNBB	NNNNB	BNNNN	BBNNN	NBNBB	NBNNB	NBBNN	NNBNN	BNNNN
NBNBB	BNBBN	BBBNB	BBBBN	NBNNN	NBNNN	BNNBN	NNNBB	BNBBN	BNNNB
BNBNN	BNNNN	NNNNB	BNNNB	NNNBN	BBBBN	BNNNB	BNBNB	NNBBN	BNNNN
BNBBN	NBNBB	NNNNB	BNBNN	BBBBB	BBBNB	NNNNN	BNNNN	BNBNB	BNNNN
BBNNB	BNBBB	NBNBN	NBNNN	NNNNN	BBBBB	BBBNB	BBNBN	NNNNN	NBNNN
NBNNN	BNNNN	BNNNB	NNNNB	BNBBN	BNBBN	NNNNN	BBNNB	BNNNB	NBNNB
NNBNN	NBNNB	BNNBN	NNNBN	BNNNN	NBNNB	NNNNB	BBBNB	NBNNN	NNNBB
NBBBB	BNBNB	NBNNB	BBNNB	NNBNB	NNNBB	NBNNB	NNNNB	NNBNB	NBNBN
BNBBN	BNNNN	NNNNN	NNBNB	NNNBN	NNNNN	NNNBB	NNNNB	NBNNB	BBNNB
NBBNB	NNNBB	NNNBN	BNBBN	NBNBN	NNBNN	NNNBB	NNNNN	NNNNB	NNBNB

3 BLANCHES 2 NOIRES

NNBNN	BBNBN	BBBBB	BNBBB	NBBNN	BNBBB	NNNNN	BNBBB	NNBBN	NNBBB
NBNBB	NNBBB	BNNNN	BNNNN	BBNNB	BBNNN	BBBNB	NBBBB	BBBBB	BBNBN
NNBBN	NNNNB	NBBNN	BNBNB	BBBBB	BBBNB	BNBNN	BBNNN	NBBBB	BBBNB
BNNBB	BNBBB	NNBBB	NBNNB	NBBBB	BNNBB	BBBNB	NBNBB	NBNBB	BNNBB
BNNBB	BBBNB	BBBNB	BNBBN	BBNBN	BBNBB	BBNNN	BNNNB	NBBNN	BNNNB
NBBNN	NBBNB	NBBBB	BBNBB	NNNBB	BBNNN	BBBBN	BNNBB	NBBBB	BNBBB
NBBBN	NBBNN	BNBNB	BNNBN	BBNBB	BBBBB	BBBNN	BNNBN	NNNNN	BBNBB
NNNNB	BNBNN	BNNNB	BNNBN	BNBBN	BNNBN	BNBNB	BBBNB	NBNBN	NBBBN
BBBBN	BBNNB	BNBBB	NNBBN	BBBBB	BBNNB	BBNBB	BBNNB	NNBBN	BNBBB
BBNBB	BBBBN	BNBBN	BBNNB	NNBBN	BBBNB	BBNNB	NNBNB	BBNBB	NNBBB
BBNNB	BBBNN	BBNNN	BNBBB	BBNBB	BNBNN	BNBBB	BBNBB	NNBBB	BBBBB
BBNBN	NNBBN	BNNNB	BNBNB	BBNNB	BNNBB	BNNNN	BBNBB	BBBNB	BBNBN
BNNNB	BNBNB	BBBBB	NBBBN	NNBBN	BNNBB	NBBBB	BNBBN	NBBBB	BBNBB
BBBBB	BNNNB	BNBBN	NNBBN	BBNNN	NBBNB	NBBNB	NNNBB	NBBBB	BBBNB
NBBNB	NBBBB	NBNBB	BBBNB	NNNNN	NBNBB	NBNNN	BNBNN	NNBNB	NBBBN
BBNBN	BNBBB	BNNNN	BBBBB	BBBBN	BBBBB	NNBBB	BNNBN	BBNNB	BNNNB
BNNBB	NBBBB	NBBNN	BBNNN	NBNBB	NNNBB	NNNBB	NBNNN	BBBNN	BNNBN
BBBBN	BBBNB	NNNBB	BBBBB	BBNBN	BNBBN	BNNNB	NNBBB	BBBBB	BBNNB
BNBNB	NBBBN	BBNBB	NNNNN	BBBBB	BNBNN	NBNNB	BBBBN	BBBBN	BBBBB
BNBBB	BBNNB	BBNBB	NBBBB	BBBNB	BNNNN	BBNNB	BBNNN	BNNBN	BNBBN

4 BLANCHES - 1 NOIRE

BBBBB	BBNBB	NBBBB	NBBBB	BBBNB	BBBBB	BNNBN	BNBBB	NBBBB	BBBBB
BBNNB	BBNBB	BBBBN	BBBBB	BBNBB	BBBBB	BBBNN	BBBBB	NBBBN	BBBBB
BBBBB	NBBBB	BNBBB	BBBBB	BBBBB	NBBBB	BNBBB	NNBBB	NNBBN	BBBBB
NNBBB	BBBNB	BBNBB	BBNBB	BBBNB	NBBBB	BBBBB	BBNNB	BBNBB	BNBBB
BBBNN	BBNBB	NNBBB	NNBNB	NBBBN	NBBBB	NBBBB	BBBBB	NBBBB	BBNBN
BBBBN	BBNBN	BNBBN	NBBBB	BBBNN	BBBBB	NBBBB	BBBNB	BBBBN	BBBBB
BBBBB	BBBBB	NBNBN	BBBBB	BNBBB	BBNNB	NNBBB	BBNNB	BBBBN	BBNBB
BBBNB	BBNBB	BBBBB	BBBBB	BBBBB	BBBBB	BBBBB	BBNBB	NBNBN	BBBBB
BBNBN	BBBBN	NBBBN	BBBBB	BBBNB	BBBBB	BBNBB	NBNBB	BBBBB	BBBBB
BBBBB	BBBBN	BNBBN	BBBBB	BBBBN	BBBBB	BBBBN	BNBBB	BNBBN	BBBBN
BNBBB	BBBBB	BBNNB	BBBBB	BNBBB	BNBNB	NNBBB	BBBBN	BBBBB	BBBBN
BBBNB	BBBNB	BBBBB	BNBNB	NBBBB	BBBBB	NBBBB	BNBBN	BBBBB	BBBBB
BBBBB	BBNNB	BNBBB	NBNBB	BBBBB	NBBBB	BBBBB	BBBBN	BNBNB	NBBNB
BBBNB	BBBBN	BBBNB	BBBBB	BBBNB	BNNBB	NNBBN	BNBNN	BBBBN	BBNBB
BBBBB	NBBBB	BBBNB	BBBBB	BBBBB	BBBNB	BBBBB	NBNBB	BNBBB	BBBBB
BBBBB	BBBBB	NBBNB	BBNNB	NBBBB	BNBNB	BBBNB	NBNBB	BBBBB	BBBBB
NBBBB	BNNBB	BNBBB	BBBBB	BBBBN	BBBBB	BBBBB	BBBBN	BBBBB	BBBBN
BBBBB	BBBNB	BBBNN	BNNBB	NBBBB	BNBBB	BBNBB	BNBNN	BNBBB	BBBBN
BBBBB	NBBNN	BBNBB	NBBBB	BBBBB	BNBNB	BBBBB	BBBBN	BBBBB	NBBBB
BBBNB	NBBBB	BBBBB	BBNBB	BBBBB	BBBBB	BBNBB	BBBBB	BBBNN	BBBBB