Annexe 1

Une expérience de premier enseignement des statistiques et des probabilités[1]

Guy Brousseau[2]   Nadine Brousseau[3], Virginia Warfield[4]

Introduction

Les activités que nous décrivons ci-après se sont déroulées en 1973-1974 dans une classe de cours moyen deuxième année de l'école Jules Michelet de Talence qui comprenait 17 élèves. Elles avaient été précédées d'une expérience similaire quoique plus courte dans une classe de CM2 l'année précédente. Les deux expériences ont été dirigées par l'institutrice de cette classe, Nadine BROUSSEAU. Elles ont été conçues par Guy Brousseau dans le cadre des recherches qu'il avait entreprises à l'époque sur la possibilité d'un enseignement des probabilités dans la scolarité obligatoire.
L'école Michelet était une école ordinaire mais elle était dotée conjointement par l'Université (plus précisément l'IREM, dirigé par le professeur COLMEZ) et l'inspection d'Académie de la Gironde, d'un centre d'observation (le COREM, dirigé par Guy BROUSSEAU).
Les résultats des nombreuses recherches qui ont accompagné ces activités devaient faire l'objet d'une thèse qui n'a jamais été soutenue. Ils n'ont été publiés à ce jour que de façon très fragmentaire et très confidentielle.
Un court compte rendu des 35 séances a été communiqué à la 26ième rencontre de la CIEAEM et publié dans un fascicule relatant quelques-uns des travaux de cette rencontre. Un film a été réalisé (sous la direction de J. BOLON) par l'ORTF dans sa série Atelier Pédagogique (destinée à la formation des maîtres) et diffusé pour la première fois le 30 novembre 1976. Les bandes vidéo quotidiennes réalisées par Pierre RAYMOND ne sont plus lisibles depuis longtemps. Seules subsistent, notre mémoire et quelques notes manuscrites.
L'environnement scientifique de ces activités est exposé ailleurs. Nous ne l'évoquerons qu'à l'occasion des observations.
Il n'y a aucun désir dans ces leçons de réaliser aucune méthode pédagogique particulière. Seulement celui d'abord de réaliser des activités enrichissantes pour les élèves, et ensuite de le faire si possible en respectant les conditions didactiques conçues pour les besoins de l'étude.
A l'exclusion de quelques « vraies leçons », chaque séance n'occupait qu'un moment assez court de la plage horaire quotidienne réservée aux mathématiques, une dizaine de minutes en moyenne. Nous appelions ce genre d'activités « un fil rouge ». Le professeur lançait un défi aux élèves, qui, chaque jour faisaient avancer la question par leurs apports ou leurs réflexions. Le professeur se bornait à encourager les intervenants, à enregistrer les questions, à préparer les réalisations suggérées par les élèves etc. et à maintenir l'intérêt. Même les débats pouvaient être écourtés lorsqu'ils prenaient la forme d'une confrontation à deux pour laisser aux autres le temps de réfléchir et de donner leur avis.

Première phase : une introduction au test d'hypothèse

La situation fondamentale, les premières manifestations des concepts.

Sous une forme implicite, dans une usage simple, les concepts fondamentaux et les moteurs du processus se manifestent déjà au cours des cinq premières séances :

- relativement aux épreuves, la connaissance de ce qu'est un tirage, une série de tirages,

[1] Les 5 premières phases ont été publiées en Anglais dans The Journal of mathematical behavior of children. La 6ième est reprise du texte original de 1974.
[2] Professeur émérite de Mathématiques à l'IUFM d'Aquitaine, à l'époque assistant au département de mathématiques de l'Université Bordeaux 1, chercheur à l'IREM, concepteur du dispositif de l'expérience,
[3] Institutrice en retraite, à l'époque institutrice à l'école J. Michelet, attachée au COREM. Elle a mis en œuvre le dispositif avec les enfants et a rédigé les comptes rendus
[4] Professeur de Mathématiques à l'Université du Washington, participe à la nouvelle rédaction et la traduit en anglais

- relativement aux statistiques observées, ce qu'est un événement réalisé ou non,
- relativement aux rapports avec la machine de hasard, ce qu'est une hypothèse sur son contenu, une certitude, une possibilité
- relativement aux prévisions ou aux anticipations, ce qu'est une possibilité, un événement certain, un événement dont on n'est pas certain
- la question du rapport entre la composition des sacs et celle des séries de tirages est posée et en partie résolue
- la question du rapport entre la composition des sacs et la prévision du résultat d'une série de tirages est posée
- l'idée qui consiste à rechercher des informations nouvelles dans une répétition de tirages a été amorcée
- la recherche d'une méthode de décision pour l'arrêt des tirages est engagée

Première séance : une curieuse devinette !

a) Le Déroulement

La présentation

La maîtresse a préparé trois sacs de tissu noir, bien opaque, assez profonds et étroits, et repérés par de grosses lettres épinglées : A, B, C. Elle a devant elle une boîte contenant beaucoup de jetons noirs et blancs (genre jetons de jeu de dames).
M : *(elle fait ce qu'elle dit à mesure)* Voici trois grands sacs vides (elle les retourne) ils s'appellent A, B et C. Je plonge ma main dans la grande boite et SANS REGARDER, après avoir bien brassé, je prends 5 jetons, je ferme bien la main et toujours sans regarder je la plonge dans le sac A. J'ouvre la main. Il y a maintenant 5 jetons dans le sac A, mais je ne sais pas combien il y a de blancs ou de noirs. Le savez vous vous ?
La classe : Nooon !
Mais vous pouvez vérifier à travers le sac qu'il y a bien 5 jetons. Jean, viens vérifier…
M. Maintenant, je fais la même chose dans les deux autres sacs…

Le défi

M : Vous allez essayer maintenant de deviner quelle est la composition de chaque sac. Mais comme on n'a pas le droit de regarder dans les sacs et que personne ne connaît leur contenu exact, personne ne pourra vous dire si vous avez deviné juste. Il faudra vous convaincre vous même !
E. *(perplexité, puis comme une rumeur)* C'est impossible !
M : On aura donc le droit de regarder un peu dans le sac, mais attention ON NE POURRA REGARDER QU'UN JETON A LA FOIS, ET ON LE REMETTRA AUSSITÖT DANS LE MEME SAC ! On appellera ça un *tirage*.
M : Alors, chacun va pouvoir venir, à son tour faire UN tirage dans chaque sac, et vous me direz ce que vous avez appris.

Les premiers tirages

Chaque élève vient tirer un jeton dans le sac A, le montre à ses camarades et le remets, puis fait de même dans le sac B…
Dès que le premier élève a accompli son tirage, le maître demande
- M. : Vous avez appris quelque chose[5] ?
- E. (*mezzo voce, puis plus ouvertement),* en tout cas il y a (au moins) un jeton noir dans A et dans B et (au moins) un jeton blanc dans C
- M. : continuons

Elle fait de même à chaque élève : avez vous appris quelque chose de nouveau ?
Très vite les élèves demandent de marquer au tableau les jetons qu'on a déjà sortis[6]. Surprise! certains enfants n'ont pas du tout retenu le résultat de leur tirage ou sont contestés par d'autres[7]. Ceux qui ne se rappelaient plus recommencent leur tirage. Sur trois lignes parallèles A, B, et C, le maître fait enregistrer au tableau les résultats connus, Il y a bientôt sur chaque ligne, 17 lettres :

A : n n b n b b n n b b n n b b n n b
B : n b n n b n n b n n b n b b n n n

[5] *Ce qu'on apprend à chaque tirage nouveau. Individuel collectif*
[6] C'est la première marque encore tout à fait implicite, d'un intérêt de certains pour des arguments stochastiques
[7] Les élèves qui ne tirent aucune information supplémentaire de leur tirage l'oublient aussitôt

C : b b n b b b b b n b b b b n n b n

Les premières déclarations

- M. : Alors ?
- E: Dans les sacs A et B il y a plus de noirs que de blancs, dans le sac C plus de blancs que de noirs.

Il n'est pas possible de savoir si cet élève parlait du contenu des sacs ou des résultats des tirages. Mais un autre élève comprends qu'il s'agit du contenu des sacs et proteste

- E. Non, car on peut tirer toujours le même jeton
- E. Ce qui est sûr, c'est qu'il y a des blancs et des noirs dans tous les sacs *(approbation générale)*
- E. (sentencieux) : Le sac A a montré 9n et 8 b, B a montré 11n et 6b, C a montré 5n et 12 b, c'est sûr aussi.

Les quelques interventions des enfants à ce moment montrent que le contenu des sacs est bien mis en rapport avec les tirages, mais ce rapport n'est pas bien perçu ou justifié par les élèves. Implicitement, l'idée que « s'il y a plus de noirs que de blancs dans le sac, on doit avoir plus de tirages noirs » est acceptée par beaucoup. Mais dès qu'elle est formulée, certains opposent des objections "rationnelles" du genre " de celle de Nathalie, ou encore : "il pourrait y avoir un jeton jaune qu'on ne voit jamais"
D'autres élèves formulent des objections fondées sur des modèles spontanés bien connus : "si on a vu beaucoup de noirs, alors le tour des blancs va venir".
La maîtresse "enregistre" quelques unes des déclarations des enfants en les répétant sur le mode dubitatif, mais elle s'abstient de les mettre en discussion[8]. Elle en relève toutefois certaines "pour elle" derrière le tableau "pour plus tard"[9].

Conclusion et relance

Elle aide à tirer des déclarations des enfants une question qui clôt la séance :
M. : comment savoir si, (et se convaincre que), quand il y a plus de noirs que de blancs dans un sac, on tire plus souvent des noirs que des blancs.
Réfléchissez, nous en reparlerons demain. Je garde les sacs pour que personne ne vienne y glisser un coup d'œil indiscret.

b) Commentaires

La séance a duré environ 15 min.
Les résultats de cette activité ne s'expriment pas en termes d'apprentissages « évaluables individuellement ».
Pourtant, l'évolution de la situation montre que certaines conditions sont maintenant réunies pour que les élèves entreprennent de nouvelles actions, se posent de nouvelles questions, fassent des hypothèses, anticipent certains résultats d'expériences etc. qu'ils n'auraient certainement pas pu envisager si cette « leçon » n'avait pas eu lieu.
La façon dont ces conditions produisent finalement des savoirs appris et compris était justement l'objet de l'étude de Didactique. Encore faut-il bien distinguer les problèmes résolus (ou non) par les élèves, et les raisons de leurs actions. Les élèves ont

- formulé des observations déterministes, et
- formulé des hypothèses (plus de noirs que de blancs) sur la machine de hasard,

---

[8] Diverses expériences ont montré que les élèves ont des modèles implicites d'origines diverses pour interpréter les phénomènes aléatoires qu'ils rencontrent, et qu'ils ne répugnent pas à discuter ces opinions. Pour intéressantes que soient les conversations des élèves sur ce sujet, il est évident qu'elles ne peuvent pas aboutir. Il a été montré qu'elles ne peuvent guère suggérer de méthodes de travail, et qu'au contraire elles ravivent inutilement les modèles spontanés populaires et les obstacles épistémologiques qui leur sont attachés. L'enseignant est donc bien avisé de ne pas favoriser à ce moment là une discussion libre, que les élèves pourraient croire déterminante.

[9] L'enseignante a recueilli les remarques des élèves pour pouvoir en faire usage le moment venu. Elle répertorié ces remarques :
suivant leur objet :

- celles relatives au contenu des sacs, celles relatives aux tirages effectués, celles relatives aux prévisions sur les tirages à venir
- celles relatives à la valeur données aux déclarations : vraies, fausses, certaines, probables, plausibles, possibles, improbables, impossibles
- celles relatives aux méthodes permettant d'obtenir des informations, d'augmenter la conviction, d'arrêter une décision.

et suivant leur forme (question, suggestion, insinuation, affirmation)

- décidé de noter les résultats des tirages (statistiques)
- établi une relation entre ce contenu et les premiers résultats des tirages, qui va les conduire à faire d'autres tirages. Ce point est très important. Il n'y a pas de raison a priori de multiplier les observations si on n'a pas l'idée qu'on peut tirer quelque information de ces réitérations, donc si on n'a pas au moins un « modèle implicite probabiliste » pour cela. Mais les objections déterministes en usage chez les enfants de cet âge, s'opposent à ce que cette stratégie soit acceptée par les élèves.
- Compté des nombres de tirages de chaque type
- Commencé à poser un problème de confrontation entre une anticipation (il devrait y avoir plus de tirages noirs) et une hypothèse sur la machine (là ou il y a plus de noirs) ou entre une anticipation et une statistique (là où il est sorti pus de tirages noirs.

Il est clair que peut-être aucun élève n'est en mesure de manifester, seul, la plupart de ces conclusions, et a fortiori, d'en avoir conscience.

2ième séance : Les effectifs des événements

a) Déroulement

Tirages

Les 17 enfants sont présents, ils recommencent une nouvelle série de tirages.

A : b n b n b n n n b n b n n n n b b
B : n n n b b n n n b n n n b b n n n
C : n b b n b b b b b n b b b b n b b

Une grande idée

Un(e) élève*, Dominique, *propose de faire les totaux et de les comparer avec ceux de la veille :

Hier	Aujourd'hui
A : 9n ; 8b B : 11n ; 6b C : 5n ; 12b	A : 10 n, 7 b B : 12 n, 5 b C : 4 n, 13 b

Des élèves constatent que, comme la veille, on tire plus de noirs dans A et dans B et plus de blancs dans C. Les arguments de la veille sont réexaminés.

Discussion :

- E1 : « On pourrait tirer toujours un même jeton !
- E2 : « On a réfléchi à la maison ; s'il n'y avait qu'un blanc dans le sac, ça serait dur de trouver 13 blancs à la suite ! »
- E3 : « Quand on pioche, on mélange, on ne peut pas tirer toujours le même »
- E4 : « Hier, il y avait 9 noirs pour A, là, il y en a 10, dans tous les sacs, il y a 1 de différence ».

Une autre grande idée

Un(e) élève* Camille *propose qu'on fasse des séries de 5 tirages

La proposition est tout de suite acceptée par les autres élèves

A : n n n n b
B : b b n n n

Avant de tirer dans C, un élève déclare dans le silence relatif

- E. "il va y avoir plus de blancs"

C : n n b n n

Déception du malheureux qui s'était engagé avec espoir

- E. "dans C, c'est pas pareil"

On décide de faire une autre suite de 5 tirages, malgré l'opinion désabusée de certains :

- E. "ça sert à rien"

A : b n b n n

- E. "ça prouve qu'on n'a pas dit juste car il n'y a pas toujours la même chose"

B : n b n n n

C : b b b b n

(En effet ils ont obtenu : pour A : (4n ; 1b) puis (3n ; 2b)
pour B : (3n ; 2b) puis (4n ; 1b)
pour C : (4n ; 1b) puis (1n ; 4b))

Les enfants demandent qu'on leur donne la composition d'un des sacs, puis combien il y a de noirs en tout, de blancs en tout. La maîtresse se récuse :on ne peut pas ouvrir les sacs avant de savoir.

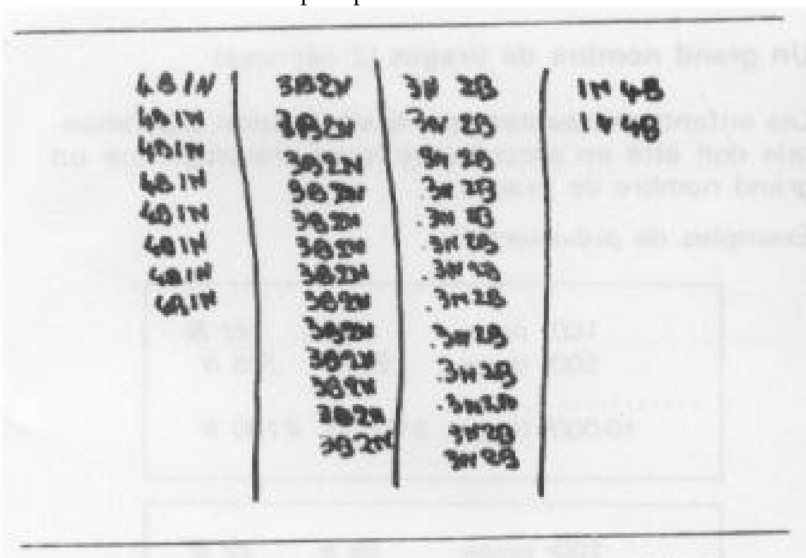


Figure 4. — Une autre manière de noter les résultats.

b) Commentaires

La proposition de faire des suites de cinq tirages joue un rôle capital dans le processus de confrontation des résultats statistiques avec les compositions possibles de la machine de hasard. Une suite représente une composition possible de la machine.

Cette idée permet une transaction implicite entre ceux qui pensent que chaque jeton se montre à son tour et qui cherchent encore une correspondance déterministe entre les informations qu'on obtient dans les tirages et ceux qui veulent interpréter les comparaisons implicitement en termes d'effectifs ou de fréquences. La transition entre ces deux formes de justifications va prendre un certain temps, mais l'idée de raisonner sur des séries de 5 tirages redonne courage à ceux que le scepticisme commençait à gagner.

Raisonner directement sur des fréquences exigerait une dextérité dans l'utilisation des fractions que les élèves de ce niveau ne possèdent guère, raisonner sur des effectifs est insuffisant car il ne permet pas de représenter le cumul des informations. Cette difficulté avait été signalée par Piaget qui attendait du développement de l'enfant la capacité de la dépasser, et par de nombreux autres auteurs qui en inféraient que les élèves ne pouvaient pas développer de connaissances probabilistes avant d'avoir appris à utiliser les rationnels.

Ici, la situation a été calculée pour permettre cette astucieuse transition et en étudier les possibilités. L'expérience a montré que les enfants saisissent certainement cette opportunité. Les enfants vont raisonner sur des distributions d'effectifs – c'est-à-dire avec des nombres naturels- sur des évènements qui, eux, représentent bien une fréquence sous la forme d'un couple d'entiers : (3b ; 2n) (mais cette fréquence est rapportée à un nombre fixe de tirages).

La 3ième séance : composition des sacs et effectifs des tirages

a) Déroulement

Les enfants proposent de continuer des séries de 5 tirages.

A : b n n n n
B : n n n n n
C : b b b b b

Mais il y deux accidents immédiatement relevés par les élèves :

- E. "les deux dernières (séries) sont fausses car il y a des blancs dans B et des noirs dans C"

- E. "Il faut tirer à nouveau dans B et C".

Les autres sont d'accord :

B : n b n n n
C : b b b b b

Il faut retirer encore une fois dans C :

C : b n b b b

(Joie bruyante des enfants, soulagés par un événement attendu).

Mais ces deux séries récalcitrantes contribuent quand même insidieusement à la conviction des élèves. Des « certitudes » sur la composition de C se font jour. Ils pensent qu'il y a quatre blancs et un noir.
Les enfants veulent donc retirer encore dans C mais l'un deux aussitôt appuyé par d'autres propose de récapituler les tirages de 5, issus de C.

C :	1n 4b
C :	5b
C :	5b
C :	4b 1n

La séance s'arrête là.

b) Commentaires

Une partie des élèves est prête à investir ses convictions sur le contenu du sac C dans des prévisions. Pour ces élèves la comparaison des prévisions avec les résultats puis celles des résultats avec le contenu supposé du sac C doit "confirmer" la conviction etc. Une autre partie des élèves préfère noter scrupuleusement ce que l'on fait à chaque étape.
La première remarque montre que la représentation du contenu des sacs par une série de 5 tirages est implicitement, clairement et unanimement acceptée par les élèves comme règle d'évaluation. Mais cette règle ne peut être institutionnalisée, ni même formulée parce qu'elle est visiblement fausse dans un raisonnement déterministe. La composition d'un sac est déterminée, et fixe, elle ne peut pas fluctuer d'un moment à l'autre. Ce qui n'empêche pas une utilisation heuristique qui permet - condition nécessaire - de n'être pas obligé de rendre immédiatement des comptes. Il est essentiel pour le chercheur de ne pas ignorer l'existence de ce double statut des connaissances à l'œuvre dans une situation didactique. Et il est non moins essentiel pour le professeur de les distinguer et d'en respecter les règles de fonctionnement dont on voit bien ici qu'elles sont différentes.
Le remplacement des suites d'évènements telles que « nnbnn » par « 4n 1b », le nombre d'évènements « blanc » et « noir » est une démarche qui peut paraître évidente pour un adulte, mais qui est très importante. Des enfants auraient pu s'intéresser à l'ordre dans lequel apparaissent les évènements ou à la longueur des suites de résultats semblables etc.
Il faut remarquer la centration des élèves sur le nombre de jetons du sac – où l'ordre des jetons n'intervient pas. Ce comportement est vraisemblablement le résultat du choix d'un nombre assez petit de jetons, impair, plus grand que 3, qui permet la considération de ces séries de 5 tirages. Tout a été décidé dans la préparation de l'expérience en fonction de cette orientation (l'année précédente certains paramètres avaient été légèrement différents).
Le fait de compter des évènements contient l'idée qu'ils sont « équivalents » alors que dans les rapports avec des machines de hasard, le problème consiste à dire qu'est-ce qui est équivalent ou pas.

La 4ième séance : distributions d'effectifs [10]

a) Déroulement

Résumé de l'histoire

La maîtresse demande aux enfants de raconter les séances précédentes.
- « On a tiré dans le sac C pour voir si on trouvait les mêmes résultats ».
- « On a trouvé ce qu'il y a dans le sac : 4 blancs, 1 noir. »
- «On va essayer pour les autres sacs : B d'abord, ensuite A»

[10] Les titres des séances ne sont pas des titres de leçons. Ils ne sont pas destinés aux élèves. Ils sont formulés à l'aide d'un vocabulaire et de concepts qui ne sont pas ceux des enfants, mais ils décrivent l'activité dans les termes didactiques et mathématiques appropriés. De plus ils ont été ajoutés, pour le lecteur, après l'expérience.

b) Commentaire

1. Faire raconter aux enfants les évènements passés, et, sinon les propositions des uns ou des autres, du moins les résolutions retenues par l'ensemble, est une activité d'institutionnalisation indispensable aux élèves comme au maître. Non seulement elle permet de maintenir l'homogénéité (les élèves qui participent peu aux débats sont invités à les raconter) et de raviver l'intérêt des élèves (leurs remarques existent pour les autres), mais aussi elle favorise l'apprentissage. Elle demande un effort de formulation réflexive. Elle réorganise le passé et la mémoire de chaque élève (ce qu'il convient de retenir permet d'oublier en partie le reste). Elle permet aux élèves de décanter leurs questions et de faire de nouvelles propositions et au professeur de continuer son travail.
2. Les enfants, qui étaient prêts la veille à retirer dans le sac C, se disent convaincus. Sans doute grâce à la « récapitulation » et en tenant compte implicitement des deux séries de 5 blancs. Leur conclusion est juste mais bien prématurée !

Tirages dans B

(Les enfants font toujours des séries de 5 tirages)

B : 4n 1b
5 n
3n 2b
4n 1b
5 b

Les élèves veulent éliminer les séries de 5 n et 5 b, comme précédemment. Ils les barrent sur le tableau.

«il y a 3n 2b ou 2n et 3b».

«On va faire 5 séries de 5 tirages»

Ils continuent donc de nouveaux tirages

B 3n 2b
4n 1b
3n 2b
2n 3b
4n 1b

A ce moment un élève demande de compter le nombre de fois que le tirage donne une "composition possible".

B 4n 1b ------ 5 fois
3n 2b ------ 4 fois
2n 3b ------ 2 fois

- « ''5 n'' est faux, on ne le compte pas »
- « même ''5 b'' est faux ».

Les enfants continuent les tirages dans B : le tirage suivant donne

3 n 2 b.

- « donc on compte maintenant

3 n 2 b ------ 5 fois.

C) Commentaires

Eliminer les séries de 5 tirages successifs de même couleur, ce que les élèves appellent des "compositions impossibles" et les remplacer par uin autre tirage est très logique dans leur méthode. Cela peut poser un problème au professeur : a-t-on le droit de procéder ainsi ? Ce procédé modifie évidemment momentanément les fréquences cumulées et retarde leur convergence vers la valeur théorique, mais il ne la change pas. Il est nécessaire de faire un véritable calcul de probabilités pour s'en assurer, mais il n'est pas question de contester la légitimité de cette procédure avec les enfants, même si leur expérience s'écarte alors de celle, très classique de Bernouilli.

Une proposition étonnante : un Critère

> *Un(e) élève,* **Vivien** *propose alors « Il y a deux ex-aequo : il faut tirer à nouveau jusqu'à ce qu'il y ait deux de différence ».*

Les élèves ne comptent plus que les tirages entre lesquels ils hésitent : 3n 2b et 4n 1b et ils négligent les autres

On tire, un moment plus tard il y a 27 tirages plausibles et parmi eux :

3 n 2 b ------ 6 fois
4n 1b ------- 6 fois

Ils décident de continuer

3 n 2 b ------ 2 fois

« Ca y est ! il y a deux de différence. Dans B, il y a 3 noirs et 2 blancs »,

Ils ont obtenu cette conclusion en cumulant les deux séries de 5 tirages : il est sorti 8 fois 3n 2b et 6 fois 4n 1b

« et on sait aussi que dans C, il y a 4 blancs 1 noir ».

Fin de la séance.

d) Commentaires

1. La proposition d'un critère pour arrêter la discussion est un pas très important dans le processus. Elle préfigure toute la démarche du test d'hypothèse où on répète une expérience un certain nombre de fois jusqu'à ce que la fréquence de l'évènement contraire à l'hypothèse envisagée devienne si faible qu'elle rende improbable sa validité.
2. Il peut paraître surprenant qu'un élève la propose. Cependant à y réfléchir, c'est presque inévitable. Les élèves ont hâte de sortir de ces dilemmes. Les deux compositions (3,2) et (2,3) sont en compétition et implicitement ce sera la plus fréquente qui indiquera « la gagnante ». Il faut se donner un critère pour arrêter le concours. Le fait qu'il y ait une différence de ''un'' tirage paraît un événement trop banal, mais deux devraient convenir.

La satisfaction du critère et la conviction des élèves au sujet de la composition de deux des sacs leur donne bon espoir pour le troisième… le lendemain.

La 5^{ième} séance : Les fréquences

a) Déroulement

L'utilisation du test

Les enfants cherchent maintenant le contenu du sac A, en comptant les tirages de 5

15 séries de 5 tirages donnent :

A : 3n 2b ------ 5 fois
4n 1b ------ 3 fois
2n 3b ------ 7 fois

Certains enfants proposent alors pour A la composition : 2 n 3 b. en accord avec le critère de **Vivien.**
Et sans doute aussi avec l'idée que les sacs sont tous différents car ils croient peut être que la nature ou l'enseignant doit ménager des cas différents)

D'autres protestent,

EE "non, car si on regarde les résultats des tirages des autres séances, on a toujours tiré plus de noirs que de blancs dans ce sac A"

Un enfant vient argumenter cette opinion en cumulant implicitement les tirages du jour avec ceux des jours précédents.

Finalement la méthode de **Vivien** est jugée peu sûre par la classe, qui modère sa conviction que dans le sac A il y a 2n et 3b.

b) Commentaire :

Pour le lecteur, voici les distributions obtenues à ce moment là (La maîtresse ne les avait pas écrites pour les élèves) :

	5b	1n 4b	2n 3b	3n 2b	4n 1b	5n
A	-		7	5	3	-
B	-		2	8	6	-
C	*2*	2			1	-

Les fréquences

Un(e) élève profite de l'indécision générale pour glisser sa proposition.

Claude *: « 3 élèves tireront chacun 5 fois. On comptera combien il y a en tout de blancs et de noirs et on divisera par 3 pour trouver la composition du sac A.*

Les enfants adoptent cette proposition nouvelle et tirent en tout :

10 n et 5 b

10n 10 : 3 = 3,33

5b 5 : 3 = 1,66

La classe est à la fois satisfaite et un peu perplexe. A tout hasard un élève fait remarquer que la somme est "4,99, ce qui fait presque 5".
La séance s'arrête là

b) Commentaire

Ici encore il s'est produit un événement important.
1. Avant la proposition de Claude, les élèves comparaient des effectifs sur des compositions possibles déterminées : dans A on compte 7 fois (2n 3b) et 5 fois (3n 2b), la cause paraissait entendue.
Mais on néglige alors les 3 séries de (4n 1b), qui tireraient la décision vers (3n, 2b) alors qu'il n'y a aucune série à (1n 4b). Les élèves ne pouvaient qu'augmenter les effectifs de leurs distributions en s'interrogeant sur le moment où les différences d'effectifs leur paraîtraient convaincantes.
2. Les observateurs redoutaient que les élèves se lancent dans des pondérations (du genre barycentre) : par exemple
les 3 séries (4n 1b) annulent 3 des 7 séries (2n 3b) puisqu'elles se trouvent de part et d'autre et à égale "distance" de (3n 2b), il resta alors 5 séries (3n 2b) contre 4 séries (2n 3b) et donc on ne peut pas dire que le sac A contient (2n 3b).
3. La proposition de Claude élimine heureusement cette évolution et donne directement un moyen de comparer les résultats des tirages avec les contenus supposés du sac par des différences de décimaux.
En effet sur les tirages effectifs, l'utilisation de ce calcul fournit des valeurs non entières, mais elles seront considérées comme des « modèles » approchés du contenu d'un sac. L'écart étant dû au caprice des billes qui ne sortent pas exactement dans l'ordre prévu. En d'autres termes le nombre moyen de noirs par séries de 5 est une valeur approchée du contenu du sac. Par ce moyen les élèves peuvent rapprocher cette expérience de celles qu'ils avaient commentées plus tôt dans l'année à propos des mesures et des erreurs de mesures.[11] La proximité de
Cette méthode permet de faire que tous les tirages contribuent à déterminer l'image statistique de la composition du sac. Pour un statisticien elle permet de mieux résumer et de mieux utiliser l'information recueillie : de 3,33 avec 3 et celle de 1,66 avec 2 explique à la fois la satisfaction et la perplexité des autres élèves.

4. Cette nouvelle méthode supposerait que l'on pense que deux résultats différents comme
(3n ;2b), (3n ;2b), (4n ;1b) et (4n ;1b), (4n ;1b), (2n ;3b)
sont équivalents, puisque désormais ils ont le même résumé : (10n ; 5b) qui se traduit par deux fréquences : (3,33 ; 1,66). Les élèves peuvent voir que cette valeur se rapproche plus de (3n,2b) que de (4n ,1b).
Mais il s'agit là d'une inférence statistique douteuse, car personne ne songerait à dire que la série
nnnnnnnnnnnnnnnnnnnnbbbbbbbbbb donne la même information sur la machine qui l'a produite que les séries
nnbnnbnnbnnbnnbnnbnnbnnbnnbnnb ou que
nbnbnnnnbnnnbnbnnbnbnnnnnnnbbb .
Elles donnent pourtant les mêmes fréquences cumulées.

5. Ainsi l'idée "géniale" de Claude marque un changement très important de stratégie.
Il peut paraître surprenant qu'un élève fasse une pareille suggestion. Après l'avoir trouvée merveilleuse, il faut maintenant trouver le canal par lequel elle a pu sembler raisonnable. Il est certain qu'une fois formulée elle a semblé claire aux autres élèves. Si cet élève avait été absent quelle chance y avait il qu'un autre fasse une proposition semblable ? Je crois que dans un fil rouge, où l'opinion de quelque membre de l'une des familles peut intervenir, on doit s'attendre à l'intrusion des pratiques classiques ou des connaissances culturelles. Cette intrusion n'est pas gênante si la situation est solide et on peut en tirer parti dans la mesure où les enfants, celui-ci et les autres, ont compris et utilisé l'information. Il est possible que cet enfant ait bénéficié d'un tel appui de son environnement. Mais je crois que cette idée peut apparaître assez sûrement sous la double pression : augmenter la conviction en augmentant le nombre de tirages sans perdre la représentation des contenus envisagés.
Remarquons que les enfants n'ont pas encore eu l'idée de tenir compte systématiquement de leurs expériences antérieures, de les cumuler. Ils recommencent toujours une expérience qu'ils modifient. Il n'est pas évident que

---

[11] Voir une étude des problèmes de la mesure et de l'approximation à ce niveau scolaire dans BROUSSEAU G. et BROUSSEAU N. (1992) "Le poids d'un récipient: étude des problèmes de mesurage en CM". in GRAND N N° 50 IREM Université J. Fourier Grenoble.

l’on peut « ajouter » les effectifs d’une expérience avec ceux d’une autre, surtout si on ignore pourquoi ils sont différents !
6. Claude ne s'attendait peut être pas nécessairement à voir le résultat sous forme de nombres décimaux, mais il est probable qu'il voulait intégrer plus d'informations et qu'il a utilisé pour cela le seul algorithme qu'il connaît celui de la règle de trois.
On peut interpréter le raisonnement intuitif de cet élève ainsi : Si chaque série de 5 tirages représente exactement le contenu du sac, trois séries de 5 tirages représenteront 3 fois le contenu du même sac. Pour trouver le contenu du sac il faudra alors diviser par 3. Ce raisonnement simple est établi dans l’hypothèse déterministe des tirages exhaustifs qui était celle des enfants.
La proposition est acceptée par les autres, plus peut être à cause de la familiarité du calcul déterministe que par compréhension effective de sa justification.
Il n'est pas évidemment pas nécessaire d'élucider tous les points obscurs que nous venons de soulever avec les élèves de ce cet âge.

Deuxième phase : Modélisation et expérience

6ième séance : Des modèles pour savoir si les statistiques correspondent au contenu

a) Déroulement

Bilan et nouveau départ

La maîtresse fait rappeler par les enfants la nouvelle méthode proposée par eux au cours de la 5ème séance : 3 tirages de 5, totaliser puis diviser par 3.
Un(e) enfant* Antoine *propose alors de fabriquer un sac dont on connaîtra la composition afin de voir s’il est vrai que les tirages ressemblent au contenu.

b) Commentaire

1. En d’autres termes, cet élève propose de fabriquer un modèle de ce qu’il étudie, dans lequel il connaîtra ce qu’il cherche dans la réalité, pour mieux interpréter ce qu’il observe.
2. Ici, encore, une proposition apparaît miraculeusement à l’instant propice. Il est vrai que les expérimentateurs avaient décidé que, dès que les élèves considèreraient avoir trouvé le contenu d’un sac, la maîtresse élèverait des doutes et leur proposerait de « remplacer », ou de représenter ce sac et ses jetons malcommodes par une bouteille en plastique et par des billes, afin de rendre les expériences plus rapides et donc plus nombreuses.
Elle avait donc préparé des bouteilles transparentes - afin que les enfants "voient" les billes (indiscernables) - et les avait munies d’un bouchon transparent qui peut laisser apparaître une bille chaque fois qu’on la retourne. Il suffit alors de composer le contenu de la bouteille à sa guise, par exemple trois boules noires et deux boules blanches. Pour effectuer un tirage on retourne la bouteille, on regarde la couleur de la bille qui se loge dans le bouchon, on retourne la bouteille on secoue, on retourne etc. Pour représenter le problème des sacs elle avait aussi préparé des bouteilles opaques.
3. Il est sans grande signification que ce soit un élève ou la maîtresse qui ait proposé ce genre d’expérience.
La véritable question est la suivante : pourquoi une bouteille composée avec des billes fonctionnerait-elle comme un sac avec ses jetons, sous le prétexte que les nombres de blancs et de noirs sont les mêmes. D’une expérience à l’autre, les tirages *dans le même sac* ne se **ressemblent** pas, au sens déterministe. De plus, un grand nombre de conceptions populaires du hasard font intervenir dans ce genre d’expériences toutes sortes de caractéristiques circonstancielles, personnelles ou même astronomiques. Au point qu’il est difficile d’accepter « rationnellement » l’idée d’ajouter les résultats de deux séries, alors qu’il faut refuser de multiplier par deux les résultats d’une série pour en avoir une seconde plus longue ! . Il serait même discutable dans cette optique de "compter" les noirs ou les blancs (cf. le commentaire 4 de la 5e séance). Dans la plupart des expériences qui ne soulèvent pas cette question, les élèves acceptent sans manière d’ajouter des tirages sans trop réfléchir et parce qu’on le leur fait faire.
4. Mais la démarche expérimentale audacieuse de cet élève séduit ses camarades, même ceux qui avalent « flairé » l’obstacle », et qui auraient refusé de trouver que deux sacs identiques vont donner les mêmes résultats.

Il s’agit sans aucun doute d’une faiblesse de la situation. Sans cette idée de "modèle" - d’ailleurs du point de vue logique assez infondée -, il aurait fallu prendre tout de suite la voie plus pénible basée sur des anticipations et des répétitions d’expériences, un processus que nous retrouverons un peu plus tard.

La bouteille Z

La maîtresse s’engouffre dans la proposition de l’élève et présente le nouveau matériel pour faire des tirages plus rapidement:
- des bouteilles au lieu des sacs et des billes bleues ou jaunes au lieu des jetons blancs ou noirs. Elle leur montre comment on opère et leur dit qu’il peuvent mettre les billes comme l’a proposé Antoine.
(Les élèves acceptent l’idée fortement suggérée par la maîtresse, que « la bouteille ou le sac c’est pareil », mais il y a des bouteilles opaques et d’autres transparentes, ils choisissent quand même les bouteilles transparentes).

Les élèves demandent à la maîtresse de mettre dans la bouteille, 4 billes bleues et une jaune. Elle s’appellera la bouteille Z. Elle fournit les résultats suivants:

	Z	5 b
		5b
		3b 2j
Au total :		13b 2j
donc		4,33 0,66

La maîtresse propose alors de refaire des tirages avec un sac pour comparer avec ce résultat.. Les enfants décident qu'il faut essayer le sac C. *(parce qu’ils pensent que son contenu est 1n 4b)*
Les enfants font les tirages et obtiennent :

C :	11b ; 4n	qui donne les fréquences 3,66 et 1,33

Pas de grandes difficultés pour les élèves qui pratiquent les décimaux depuis un an, pour voir que les deux résultats s’écartent également de (4 ; 1). Pas d’étonnement non plus, puisque ils étaient « sûrs de la composition du sac C, et qu’ils ont admis que la bouteille devait bien représenter le sac C.

Commentaire

Par conséquent, on pourrait imaginer qu’ils s’arrêtent là, estimant qu'ils viennent de vérifier que la bouteille et le sac se comportent à peu près de la même manière. La méthode est suffisamment confirmée avec le contenu de C et qu’ils entreprennent alors les sacs A et B.

Relance : augmenter le nombre de tirages et diviser

Pourquoi faites-vous toujours 3 séries de 5 tirages ?
« Les enfants proposent de faire 5 séries de 5 tirages <u>avec la bouteille Z</u>.

- M. : faudra-t-il diviser par trois ?
- EE : non par 5 (les nombres ne sont pas tout à fait propice à distinguer leur fonction.

Suite du commentaire précédent :

Pourquoi les élèves veulent-ils continuer des tirages avec la bouteille Z ?
1. Le processus qui s’amorce ici implicitement est le suivant. S’il est vrai que les tirages indiquent le contenu des sacs (hypothèse qui avait été choisie contre l’hypothèse des compensations) c'est-à-dire, si l’on peut utiliser les statistiques pour deviner le contenu des sacs, alors, puisque le contenu des sacs ne change pas, les futurs tirages (de 5) devraient ressembler au contenu (supposé) des sacs et aux tirages passés. La perspective de prévoir quelque chose qui peut se produire ou non, et le plaisir de voir se réaliser un phénomène inconnu excite les enfants et les incite à continuer l’expérience. Celle-ci va progresser maintenant explicitement sur le modèle (implicite) du test d’hypothèse.
2. La perspective d’obtenir une réponse aux questions soulevées à propos du passé de la machine de hasard par de nouvelles séries de tirages va être exploitée systématiquement par les organisateurs pendant toute la deuxième phase du processus, à chaque moment où ils sentaient que les élèves avaient tendance à se lasser.

Le comportement du modèle Z

Les résultats sont les suivants:

Z :	3b ; 2j		
	5b ;		
	4b ; 1j		
	4b ; 1j		
	3b ; 2j		
Au total	19 b: 6j;	qui donnent les fréquences	3,8 et 1,2

Les enfants tirent encore 2 fois dans Z pour **cumuler** avec les trois premiers tirages faits précédemment dans Z .

Ils trouvent encore 19 bleus 6 jaunes

et en divisant par 6, 3,8 et 1,2

Surprise ! les élèves ne savent pas trop que penser de cette égalité intempestive, eux qui commençaient à penser que les statistiques variaient à chaque fois pour se rapprocher d'un contenu de la bouteille.

Ils décident néanmoins qu'il faut continuer à faire des tirages, peut être pour voir ce que deviennent les nombres encore un peu mystérieux, calculés par division.

Le séance s'arrête juste à ce moment

b) Commentaire.

La maîtresse a profité d'une opportunité pour faire en sorte que les élèves cumulent les résultats de plusieurs expériences successives. Et il semble qu'il n'y ait pas eu à ce sujet de discussions. Il y a là un escamotage d'un obstacle assez souvent ignoré mais important et que l'auteur de ces lignes avait reproché à d'autres expériences. Mais ce cumul occasionnel sera-t-il réitéré sans difficulté ?

7ième séance : Variations sur la longueur des séries

a) Déroulement

Reprise

Les enfants rappellent ce qu'ils ont fait à la séance précédente : des séries de 5 tirages, d'abord 3 séries de 5 tirages, puis 5 séries de 5 tirages sur lesquelles ils ont calculé des fréquences.

Sur la proposition des enfants, l'enseignante fait refaire l'expérience avec une nouvelle bouteille contenant 4 billes blanches et 1 noire. Cette composition représente encore le sac C, tout comme la bouteille Z. Seule la couleur des billes a été changées. Ils proposent 5 séries de 5 tirages.

Résultats des tirages dans cette nouvelle bouteille (appelons là Z_2):

Z_2	b b b b n			
	b b b n n			
	etc.			
	b b b n b			
Au total	7n 18b :	effectif, 7n	fréquence	7 : 5 = 1,4
		effectif, 18b	fréquence	18 : 5 = 3,6

b) Commentaires

Les enfants refont pour la troisième fois les expériences qui concernent le sac C, celui pour lequel ils se sentaient le plus sûr. C'est peut-être pour se conforter un cas moins incertain et moins exigeant que A et B, mais probablement pour vérifier la méthode qu'ils hasardent. Donc ils se disent convaincus, mais ils doutent. C'est pourquoi ils veulent bien à ce moment là continuer à faire des tirages. (Remarque : Ayant compté par erreur 6 n, des enfants trouvent tout de même 1,4 ce qui prouve qu'ils opèrent par soustraction).

Nouveaux tirages avec la bouteille Z_2 :

Résultats :

Z_2 b b b n b
b b n n n
b b b b b
b b b b b
b b n b n

Les élèves commentent le tirage 5 b:

"ils sont faux" (les cinq tirages), mais ils ne les retirent pas des comptes et ne proposent pas de les refaire.

Un autre enfant explique pourquoi le total fait toujours 5 :

19 + 6 = 25
25 : 5 = 5

Un enfant propose d'ajouter les résultats. Une discussion s'engage au cours de laquelle les autres enfants lui expliquent qu'il faudra diviser par 10.

Résultats :

n : 13 — 13 : 10 = 1,3
b : 37 — 37 : 10 = 3,7
37 b ; 13 n

Commentaire

Les élèves auraient pu vouloir comparer ce qu'ils trouvaient en comptant ce qu'ils appellent les résultats faux avec ce qu'ils trouvent en les éliminant. Ils ne l'ont pas fait et l'enseignante ne l'a pas proposé. C'eût été un fort distracteur sans grand intérêt à ce moment là pour les enfants.

Changement de nombre de séries

Certains enfants proposent alors de faire 6 séries de 5 tirages

Tirages.

Z_2
b n b n b
b b b b n
b b b b b
b b n b b
n b b b b
b b b b n

<u>Résultats</u> : 24 b, 6 n

n : 6 — 6: 6 = 1
b : 24 — 24 : 6 = 4

Commentaire des élèves qui ne s'attendaient pas à tomber sur un nombre exact

E2 : « C'est un coup de ''pot'' » (un coup de chance)

La maîtresse suggère en réponse d'opérer sur les 16 séries de 5 tirages (80) effectués ce jour :

19 n et 61 b — noirs : 19 : 16 = 1,18 — blancs : 61 : 16 = 3,81

b) Commentaire :

Les élèves obtiennent une confirmation de la méthode implicite qu'ils avaient utilisée : les nombres moyens de tirages blancs par 5 tirages semblent s'approcher du contenu supposé du sac. Mais certains élèves soupçonnent cet événement d'être contingent (de n'être qu'un hasard). Ils émettent le soupçon que si on continue les tirages, les quotients vont – probablement - s'écarter des valeurs « modèles », ce qui pourrait en effet se produire.

Report de la méthode

La maîtresse propose aux enfants d'utiliser aussi les résultats obtenus au cours des séances précédentes.
Mais ils veulent tester maintenant la méthode sur le sac A puis sur le sac B.

A :	b ----- 19	19 : 6 = 3,16
	n ----- 11	11 : 6 = 1,83
B :	b ----- 11	11 : 6 = 1,83
	n ----- 19	19 : 6 = 3,16

Désarroi : les deux valeurs sont les mêmes alors qu'ils avaient l'impression que les deux sacs étaient différents
Les élèves cumulent les résultats d'une même journée, mais la proposition de la maîtresse de cumuler les renseignements du jour avec ceux de la veille reste sans effets.
La séance s'arrête là.

8^{ième} séance : Tous les modèles possibles…

a) Déroulement Changement de matériel, report des modèles et reprise de méthode

La facilité de manipulation des bouteilles conduit les enfants et l'enseignante à vouloir représenter les sacs par des bouteilles. Elles doivent évidemment être opaques. Pour plus de commodité, les enfants demandent à la maîtresse de faire " en cachette" des bouteilles de même composition que les sacs A, B, C qu'ils désignent de même : "bouteille A, bouteille B, bouteille C".
Les enfants étaient sûrs de la composition des sacs B et C depuis la 4ème séance. Ils s'intéressent donc de nouveau à la composition du sac A, devenu "bouteille A".
Ils hésitent (voir 5ème séance) entre les compositions :

3 b 2 n et 2 b 3 n.

Une fillette propose de refaire des séries de 5 tirages et de compter combien de fois sortent les compositions précédentes :

Commentaire

Cette proposition semble ramèner la classe à la méthode et au projet et à la méthode initiale de Claude. Ces retours sont fréquentes dans une classe lorsque comme ici, la nouvelle méthode n'a pas été "institutionnalisée". Mais ce qui est important c'est que les enfants pensent maintenant pouvoir obtenir des informations de grandes séries de tirages.

Ils n'avaient pas pu conclure avec 15 tirages, ils demandent à en faire 150.

Résultat

La première composition l'emporte nettement.
Les enfants concluent : "il y a 2 blancs, 3 noirs dans le sac A comme dans le sac B".

c) Commentaires

Cette séance appelle plusieurs observations.
1. Elle paraît entériner sans discussion le fait que les bouteilles se comportent comme les sacs de même composition ! Il y a sans aucun doute ici l'effet de la composante didactique de la situation. Les élèves sont tellement contents d'avoir « inventé » ce que le professeur avait préparé de son côté, qu'ils sont convaincus de la légitimité de cette « modélisation » des sacs pas des bouteilles
2. Elle peut sembler marquer une régression par rapport à la séance précédente :
Les élèves abandonnent le cumul de plusieurs séries et les divisions par le nombre de tirages
Ils recommencent à éliminer les séries correspondant à des compositions écartées.
Dans un processus de ce genre il est normal que les avancées les plus hardies, même momentanément acceptées par les élèves, soient abandonnées, momentanément peut être aussi lorsqu'il s'agit de faire des choses que tout le monde comprenne… Il était nécessaire sans doute à ce moment là, de revenir aux pratiques bien approuvées par la majorité des élèves.
3. Cependant, c'est seulement à partir de cette séance que les enfants manifestent et acceptent l'idée qu'il est nécessaire de procéder à un grand nombre de tirages avant de conclure. Il est vraisemblable que cette idée est étayée, bien à tort mais qu'importe, par l'image d'une précision de plus en plus grande dans le calcul du quotient qui indique le contenu de la bouteille. Cette idée de la statistique « nombre de tirages d'une couleur divisé par le nombre de séries de 5 tirages », comme mesure approchée de la composition du sac, n'est pas fausse puisque le rapport tend bien en probabilité vers cette valeur. Mais elle n'est sûrement pas comprise ainsi.
4. Elle marque aussi l'aboutissement d'un processus a-didactique et peut être le maximum de ce qu'il peut produire. Quoi qu'il en soit une première expérience s'achève à ce moment là.

Conclusions sur les deux premières phases

.

1. *Le caractère « naturel » de la dialectique qui s'est engagée entre le passé, la constitution et le futur d'une simple machine de hasard a permis au professeur de laisser cette première phase aller au gré des élèves. D'aucuns trouveront cette phase a-didactique, assez conforme aux thèses constructivistes.*
2. *Qu'est-ce qui a été appris ? Que reste-t-il à enseigner ? pourquoi ne pas en rester là ?*
    a) *Les connaissances développées dans cette première phase sont celles généralement requises (implicitement) pour les étudiants qui commencent des études de probabilité :*
    - *la correspondance « fréquence – structure de la machine - probabilité » est prise comme évidente,*
    - *l'idée que la répétition d'épreuves donne naturellement des statistiques qui indiquent la validité ou la fausseté des hypothèses.*
    - *le vocabulaire*

    b) *Mais dans cette méthode, c'est le test d'hypothèse qui est le moteur du processus et non pas la curiosité pour le hasard ou pour les résultats d'une épreuve. L'examen de ce qu'il convient de* *regarder dans les statistiques est soumis à des hypothèses et mis à l'épreuve dans des anticipations. Les probabilités vont être un moyen de résoudre ces questions et non un but premier. Le « sens » du hasard ou une pensée pré-probabiliste ne sont donc nullement pré-requis et la démarche est assez expérimentale et « naturelle » pour être proposée à des élèves de 10 ans.*

c) *Il reste alors à établir la conviction que les séries de fréquences convergent vers des valeurs limites déterminées par la structure de la machine de hasard, et donc qu'il suffit de disposer de séries* ***assez longues*** *pour « connaître cette structure. La familiarité avec des longues séries impose des procédés de plus en plus puissants pour les produire : des sacs aux bouteilles, des bouteilles à l'ordinateur, puis aux graphiques, la deuxième phase est une course à l'économie dans la production et la présentation des séries statistiques.*

d) *Mais cette convergence est seulement une convergence en probabilité. Quand est-ce qu'une série est assez longue ? Si on fixe un intervalle de confiance on peut chercher à partir de quelle longueur des séries cet intervalle contient 95% des fréquences de ces séries. Cette partie de l'expérimentation était terriblement ambitieuse et périlleuse .*

e) *La dernière phase est consacrée à l'introduction au calcul des probabilités, (espace d'évènements, sommes et produits). L'explication des relations qu'on peut observer entre la composition d'une machine de hasard et les statistiques qu'elle produira, permet de donner un premier sens précis à la notion de probabilités : c'est ce que les fréquences ramenées à l'attente des résultats d'un expérience unique permettent d'espérer. Pourquoi la fréquence tend-elle vers cette valeur là calculée que l'on calcule ainsi ?*

Ce processus permet à l'élève de percevoir de façon encore informelle, que la légitimité du rapport entre la probabilité d'un événement et la fréquence de son apparition dans des épreuves répétées indépendantes est la loi des grands nombres.

3. *Les élèves répondent aux situations qui leur sont proposées par des remarques, des questions, des suggestions des décisions et des réponses qui témoignent de leurs connaissances et de leurs découvertes. Ces connaissances, surtout celles qui apparaissent au contact de la situation, sont fugitives, fragiles, et étroitement dépendantes de la situation où elles sont apparues, même si elles paraissent familières. Pour devenir des connaissances utilisables par les élèves ou mobilisable par le professeur, elles doivent subir des étapes et des transformations dont certaines seulement sont caractérisées par une fixation dans la mémoire des élèves. Ce sont celles qui sont le plus remarquées des professeurs et des évaluateurs. Mais la plupart des autres consistent :*
   - *à transformer ces connaissances,*
   - *à les rendre formulables plus aisément,*
   - *à les utiliser personnellement dans différents cas pour produire des effets connus ou nouveaux,*
   - *à les manifester en sachant que l'autre aussi va les comprendre et les accepter,*
   - *à pouvoir en parler en les mettant en relation explicitement ou implicitement avec d'autres connaissances*
   - *etc.*

   Ces transformations des connaissances en savoirs « culturels » ne peuvent pas se produire spontanément. Elles ne peuvent s'effectuer que dans des situations didactiques au sens strict. Ces ***situations d'institutionnalisation*** *n'ont été identifiées que quelques années après l'expérience que nous rapportons*[12] *ici. La démonstration de leur nécessité et de l'impossibilité d'obtenir leur résultat dans des situations a-didactiques a montré les limites du constructivisme et l'impossibilité du constructivisme radical.*

   Pour suivre le cours des propositions des élèves et pour éviter d'alourdir le processus, peut-être aussi par un reste d'idéologie « non directive », les expérimentateurs ont négligé de ménager des phases d'institutionnalisation, sauf dans les séances où la maîtresse a demandé aux élèves de décrire, de répéter et de résumer ce qu'ils avaient fait et ce qu'ils voulaient faire. En particulier, l'explicitation et la fixation du vocabulaire n'est pas satisfaisante, ni l'identification des connaissances acquises et leur utilisation dans des exercices.

Ce défaut n'est pas trop marqué dans la première phase, mais il va devenir très vite évident dans les suivantes.

Troisième phase : représentation graphique de longues séries

Une autre phase commence qui va consister à introduire un certain nombre de concepts et de méthodes, traditionnellement reconnus comme la marque d'une préoccupation probabiliste : fréquence, tableaux,

[12] Institutionnalisation : auteur date

graphiques etc. Elle va réclamer aux élèves de grands calculs et au professeur une grande rigueur pour échapper à la tentation de céder aux demandes des enfants qui veulent ouvrir sacs et bouteilles, et ainsi d'interrompre le processus.
On peut penser que cette phase plus directement didactique est prématurée, qu'elle rompt un processus « naturel » et qu'elle est le signe d'une impatience inopportune.. Peut-être cette impatience était-elle dictée par le désir de justifier le temps passé sur cette expérience en exhibant des signes « repérables » d'apprentissage. Mais les expérimentateurs avaient l'espoir que la longue phase a-didactique permettrait de bien accepter et comprendre les connaissances classiques.

9ième séance : l'exploration systématique

a) Déroulement

Récupération didactique

Au début, la maîtresse rappelle aux enfants qu'ils ont proposé 2 méthodes
- la première (compter les séries « utiles » de 5 tirages) les a conduits à conclure;
- la deuxième (cumul et divisions, a été à peine ébauchée (6ème et 7ème séances).

Elle propose de reprendre cette deuxième méthode (jusqu'à des conclusions que l'on comparera aux précédentes).

Plan de travail

1 - Faire un grand nombre de tirages
2 - Diviser le nombre des blancs et le nombre des noirs par le nombre de tirages*.
La maîtresse introduit la notion de <u>cumul</u> de manière systématique.

Organisation de la classe :

3 groupes de travail I, II, III.
- Le groupe I fait des tirages avec la bouteille A
- le groupe II fait des tirages avec la bouteille B
- le groupe III fait des tirages avec la bouteille C

Les résultats sont disposés dans des tableaux : On effectue des séries de tirages (10 tirages, 5 tirages, 15 tirages...). Pour chaque tirage, sont notés :
- le nombre de blancs
- Une ligne indique le cumul du nombre des coups « blancs » obtenus
- le nombre de noirs.
- le cumul du nombre des coups « noirs » obtenus
- Une ligne indique le cumul du nombre des coups tirés.
- Les 2 dernières lignes indiquent les fréquences le rapport des nombres cumulés de blancs ou de noirs au nombre cumulé de coups tirés.

Exemple 1ere série : 10 tirages :
blancs : 5 ; noirs 5
Nombre total de tirages : 10,
fréquence des blancs 5 :10 = 0,5
fréquence des noirs 5 : 10 = 0,5
2ième série : 5 tirages
blancs : 2 ; noirs : 3
nombre cumulé de blancs : 5+2 = 7
nombre cumulé de noirs : 5+3 = 8
nombre total de tirages : 15
Fréquence (cumulée) des blancs : 7 : 15 = 0,45
Fréquence (cumulée) des noirs : 8 : 15 = 0,53

Chaque groupe va ainsi faire un grand tableau à la confection duquel chaque élève participera. Le tableau est composé de rubans que l'on assemble ensuite en tableau. L'un des élèves effectue les tirages, un autre les enregistrements et les calculs de cumul, un autre la vérification du nombre total de tirages, un autre enfin les calculs de la fréquence. Ils changent de rôle périodiquement

b) Résultats

<u>exemple de tableau réalisé par un groupe</u> :

série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Blancs	5	2	7	4	3	4	3	3	3	6	5	5
Cumul	5	7	14	18	21	25	28	31	34	40	45	50
Noirs	5	3	8	6	7	5	7	7	7	4	5	5
Cumul	5	8	16	22	29	34	41	48	55	59	64	69
Nbr.tir	10	15	30	40	50	59	69	79	89	99	109	119
.												
Calcul	5 :10	7 :15	14:30	18:40	21:50	25:59	28:69	31:79	34:89	40:99	45:109	50:119
Fréq.B	0,5	0,45	0,49	0,45	0,42	0,42	0,40	0,39	0,48*	0,44*	0,41	0,46*
Calcul	5 :10	8 :15	16 :30	22 :40	29 :50	34 :59	41 :69	48 :79	55 :89	59 :99	64:109	69:119
Fréq.N	0,50	0,53	0,53	0,55	0,58	0,57	0,57*	0,60	0,61	0,50*	0,58	0,57

Les nombres accompagnés d'une étoile sont les résultats de calculs erronés des élèves. Ce résultat montre qu'ils n'ont pas procédé par soustraction pour trouver la fréquence des noirs et qu'ils n'ont pas fait la somme des deux fréquences pour retrouver 0,99.

Série	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Blancs	5	3	6	4	3	4	3	5	3	5	4	11	36
Cumul	55	58	64	68	71	75	78	83	86	91	95	106	142
Noirs	5	7	4	6	7	6	7	5	7	5	1	4	64
Cumul	74	81	85	91	98	104	111	116	123	128	129	133	197
Nbr.tir	129	139	149	159	169	179	189	199	209	219	229	239	339
Fréq.													
Calcul													
Fréq.B	0,42	0,417	0,429	0,427	0,420	0,418	0,412	0,417	0,411	0,415	0,414	0,443	0,418
Calcul													
Fréq.N	0,57												

c) Commentaires

1. L'enseignante propose froidement de diviser l'effectif des blancs ou des noirs par le nombre de tirages alors que les enfants divisaient jusque là ces effectifs par le nombre de séries de 5 tirages. Cette consigne fait disparaître le moyen assez simple de comparer le résultat des statistiques avec les contenu possibles des bouteilles.

Il s'agit encore ici d'une de ces généralisations "sournoises" que la pratique et la culture imposent aux débutants. Calculer la fréquence par rapport à 1 ou par rapport à un nombre fixe (en pourcentage) permet de comparer des fréquences entre des expériences ou entre des machines de hasard différentes ou même dont la composition est ignorée. Ici cet usage ne s'imposait pas. Les enfants vont avoir à faire la "découverte" du fait que les fréquences peuvent être liées aux compositions du sac et à utiliser familièrement cette correspondance : 0,20 pour 1 blancs, 0,4 pour 2 blancs etc. Cette difficulté aura quelques conséquences favorables mais cela va prendre un certain temps qui aurait pu être mieux employé.

2. La consigne maintient des séries de 5 tirages, mais les calculs demandés n'utilisent plus cette propriété de représentation du contenu. On pouvait avoir l'espoir que les enfants mettraient « officieusement » en regard, d'une part les calculs des fréquences demandés par l'enseignante, et d'autre part les calculs de leur modèle de la composition des bouteilles (en divisant les effectifs obtenus par les nombres de groupes de 5) afin de comprendre la signification de la fréquence et son rapport avec le contenue des bouteilles. Mais cette possibilité n'a pas utilisée par les élèves, ni exploitée par la maîtresse.

Au résultat, cette décision se révèle très mauvaise et le sens de la fréquence sera d'autant plus dur à comprendre.
En fait si la consigne des multiples de cinq tirages continue à être appliquée dans le groupe A après la 11$^{\text{ième}}$ série, c'est seulement par fidélité à la règle, car une erreur se glisse dans le nombre de tirages enregistrés. Cette

erreur ralentit évidemment les divisions au point que les élèves ne parviendront pas à les finir toutes et montreront une lassitude légitime.
Le respect de la consigne est tel qu'il ne pensent pas ou n'osent pas faire une série de 11 tirages pour retrouver des effectifs faciles à calculer. Il est clair que les raisons intellectuelles de l'organisation de ce travail ne peuvent que finir par échapper aux élèves, à supposer que certains les aient comprises au début.
3. Toutefois, le but initial reste toujours clair : être sûr de la composition des sacs (que la maîtresse refuse d'ouvrir). Les enfants espèrent que le prolongement des tirages et que les calculs de quotients - mystérieux et inexplicables pour la plupart des élèves -, montrera quelque chose qui emportera la conviction.

10ième séance : Re - tirages

Les enfants ont repris les tirages commencés au cours de la 9ème séance et poursuivent suivant le même plan sans discuter. La séance est relativement courte.

11ième séance : Re-re- tirages

a) Déroulement

Poursuite des tirages et des calculs

Le groupe I (bouteille A) a fait 249 tirages
Le groupe II (bouteille B) a fait 249 tirages
Le groupe III (bouteille C) a fait 229 tirages.

A la fin de la 11ème séance, la lassitude des enfants devient évidente. Ils répugnent de plus en plus à faire tous ces calculs : additions et divisions, d'autant qu'ils n'ont pas eu le temps de réfléchir à ce qu'ils pourront faire des résultats obtenus ! Ils regrettent la phase du fil rouge où chaque jour amenait questions et nouveautés.
Ils somment la maîtresse d'ouvrir les sacs, ils prétendent qu'ils sont sûr de leur contenu.
Contre argument de la maîtresse : « Si vous êtes sûr de la composition des sacs (ou des bouteilles, il est inutile d'ouvrir les sacs » . La situation devient tendue. Les élèves considèrent qu'il y a une sorte de rupture de contrat de la part de l'enseignante

Une proposition nouvelle

C'est alors qu'une fillette, Pauline, à la fin de la séance, fait la proposition suivante aussitôt adoptée par toute la classe :

- « On n'a qu'à inventer des bouteilles dans lesquelles on mettra les billes nous-mêmes. Des bouteilles en plastique transparentes.
  - Le sac C sera représenté par la bouteille X --> 4b ; 1n
  - Le sac B sera représenté par la bouteille Y --> 3b ; 2n
  - On utilisera la bouteille Z recomposée Z --> 1b ; 4n

On ajoutera tous les blancs et tous les noirs et on divisera par le nombre de tirages (pour chaque bouteille) »

Les autres enfants sont d'accord (sans doute pour sortir de cette phase fastidieuse et dont ils ignorent le but).
La fillette compose les 2 bouteilles d'après les résultats trouvés au cours des 4ème et 8ème séances et qu'il s'agit de contrôler.
Elle ne pense pas à la 4ème composition non triviale possible qui est 2 b, 3 n.
(La maîtresse lui fait écrire au tableau l'essentiel de ce qu'elle vient de dire, pour pouvoir en faire le point de départ de la séance suivante).

- C X --> 4b ; 1n
- B Y --> 3b ; 2n
- Z Z --> 1b ; 4n

b) Commentaire

La proposition de la fillette détend la situation mais il est clair pour les élèves et pour le maître

1. que la poursuite des tirages n'apporte pas les révélations attendues et que dans ces conditions on ne sait plus très bien pourquoi on effectue tous ces tirages, et surtout pourquoi il faudrait en faire de nouveaux. Il y a un

décalage entre la conviction, assez forte, de connaître le contenu des sacs et l'impossibilité de prouver la validité de cette conviction.

2. A ce moment la maîtresse doit expliciter les termes du raisonnement qui soutient les enfants dans leur stratégie de continuer des tirages et elle doit tenir ferme son projet de ne pas ouvrir les bouteilles. Le raisonnement est celui ci : Si vous êtes vraiment persuadés d'avoir raison
   a) il n'est pas besoin d'ouvrir ces bouteilles.
   b) Mais vous pouvez prouver que vous avez raison en montrant que vous pouvez prévoir certains certaines choses de ce qui va se passer dans les prochains tirages. Par exemple, sur 100 tirages, il y aura plus de tirages blancs que de noirs dans cette bouteille.

Si les statistiques vous disent comment la bouteille est faite, alors savoir comment la bouteille est faite vous permet de prévoir ce que seront les prochaines statistiques !

12ième séance : Re-re-re tirages,

a) Déroulement

Nouveau projet

On reprend, au cours de cette séance, la proposition faite et écrite à la fin de la 11ème séance.

Un enfant écrit sur le tableau noir pour résumer :

X--------> 4b 1n
Y--------> 3b 2n
Z--------> 1b 4n

Plusieurs enfants pensent alors qu'il faudrait une 4ème bouteille car ils s'aperçoivent qu'il manque la composition possible : 2 b 3 n

Cette nouvelle proposition est adoptée et une bouteille est aussitôt ajoutée.

Certains enfants pensent également aux compositions 5n et 5b mais les rejettent immédiatement "puisqu'il est sorti des blancs et des noirs de tous les sacs".

Ils ne disent pas « parce qu'on est sur de ce qu'on verra sortir » peut être parce que c'est évident.

b) Organisation de la classe :

On a donc maintenant 4 groupes (I, II, III, IV) qui font eux-mêmes la composition de leur bouteille :

groupe I -------> 4 b, & n
groupe II -------> 1 b, 4 n
groupe III -------> 3 b, 2 n
groupe IV -------> 2 b, 3 n

Les tirages recommencent. Les enfants entreprennent la réalisation de 4 nouveaux tableaux (1 par groupe) pour une série de 180 tirages.

En experts maintenant, les enfants ont choisi des séries de 10 pour faciliter les divisions.

13ième et 14ième séances :

Pendant 2 séances, les enfants tirent, inscrivent leurs résultats sur les tableaux , calculent les rapports indiqués… Chaque groupe fait 180 tirages.

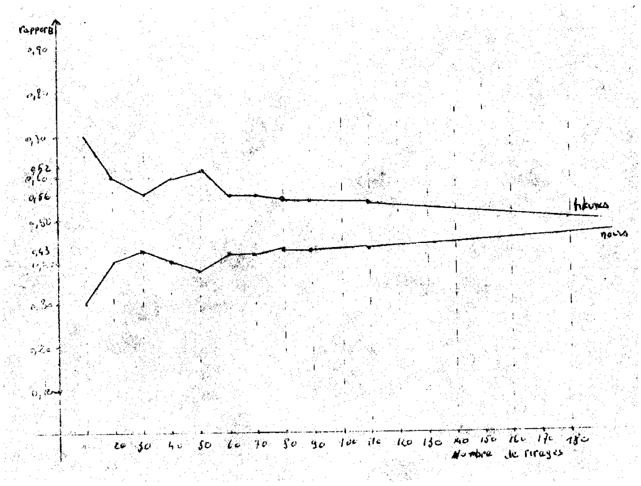
15ième séance : Les graphiques

Au cours de cette « leçon », la maîtresse fait faire pour chaque groupe un graphique représentant les tirages (courbes).

Horizontalement, on indique le nombre de tirages (par 10)

Verticalement, on indique les valeurs des rapports. Chaque point indique un rapport marqué dans le tableau

Voici le graphique correspondant aux tirages présentés dans le tableau précédent :



Exemple : au 70ème tirage, le rapport est 0,56 pour les blancs
0,40 pour les noirs (?)

(Au cours de cette longue séance, les enfants, après avoir gradué les 2 axes, ont tracé successivement des parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre glissante (qu'ils venaient d'utiliser en géométrie) car ils ne disposaient pas de papier quadrillé asse grand !)

16ième séance : L'ordinateur

a) Déroulement

Un terminal d'ordinateur[13] est mis à la disposition des enfants ,
Au cours de cette séance, i1s vont 1 'observer, on leur montre la manière de l'utiliser : chaque groupe, tout à tour, vient appeler le programme . La machine imprime d'abord le message suivant :

"Nous allons faire des tirages avec remise dans un sac contenant des billes blanches et noires, il faut remplir le sac avant de jouer, Combien met-on de billes blanches ?"
L'élève répond par exemple : 3, et le dialogue continue
"et combien de billes noires ?"
Combien de tirages doit-on effectuer ?
Puis la réponse vient immédiatement :

« Dans l'ordre, on a obtenu les couleurs : n, n, n, b, n, b, b, n, n, b, n, b, b, b, n, b, n, b, n, n et il conclut :
Les 20 billes tirées ont été : 9 billes blanches, 11 billes noires", »
On explique aux enfants que la machine effectue elle-même des opérations similaires au remplissage des sacs et aux tirages auxquels ils étaient habitués,
Les enfants admettent que ces expériences sont équivalentes parce que nous le leur affirmons, et parce que les tirages fournis, par la machine sont présentés comme ceux auxquels ils étaient habitués.

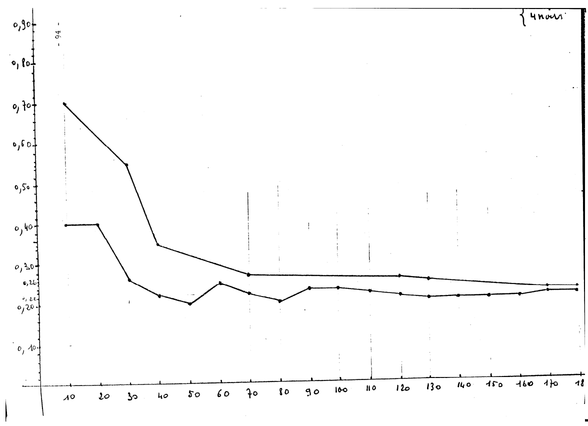
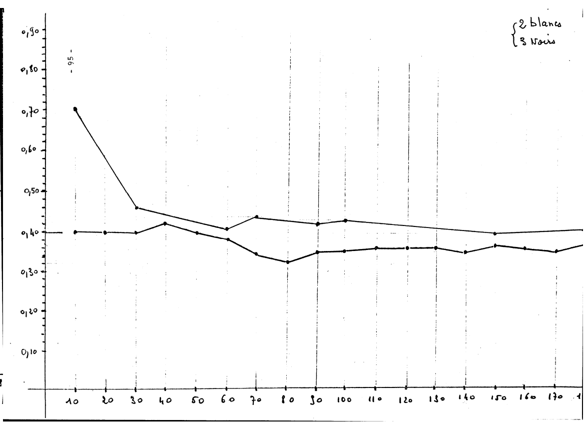
Exemple :

```
--------COMBIEN DE TIRAGES DOIT-ON EFFECTUER ?
?100
DANS L'ORDRE ON A OBTENU LES COULEURS
N N B B B B N N B B N N N B B B B N B B
N B B B N B B B N B B B B N N N N B N B
B B B B B B B N B N N B N B B N N B B B
B B B B B B N N B N B N N B N N B N N B
******* CES 100 BILLES TIREES ONT ETE :
*******  60 BILLES BLANCHES ET 40 BILLES NOIRES
```

[13] Nous utilisions à cette époque un terminal Olivetti TE 300 relié à un IBM 360/30 de l'Université.

POUR TIRER ENCORE DANS CE SAC ECRIVEZ 1
POUR CHANGER SON CONTENU ECRIVEZ 2
POUR CESSER LE JEU ECRIVEZ 3

Les enfants demandent 10 tirages, puis 20, puis 50... jusqu'à 180 tirages (comme ils l'avaient fait "à la main").
Pour leur permettre de calculer les fréquences cumulées très rapidement et de tracer une nouvelle courbe, nous mettons à leur disposition une « calculette »
Les élèves obtiennent alors un nouveau graphique

Commentaires sur la 3ième Phase

1. Pourquoi ne pas montrer le contenu des bouteilles opaques quand les enfants le demandent en disant "qu'ils sont sûrs" du contenu ? La vérification expérimentale d'une hypothèse est une habitude légitime et bien ancrée dans la pensée des élèves. Cette attitude leur semble frustrante et offensante, contraire au "contrat didactique" habituel.

L'enseignante ne fait qu'appliquer les consignes des expérimentateurs.
Cette décision est fondée, théoriquement, en ce sens qu'habituellement on n'a pas la possibilité de "casser" les machines de hasard qui fournissent les valeurs recueillies dans les statistiques. Les seules validations légitimes dans ce domaine sont qualité de la prévision et la consistance (la non contradiction) de la théorie et du calcul des probabilités. Le mieux que l'on puisse faire c'est de dire ce qu'on peut et ce qu'on ne peut pas prévoir, de vérifier que les prévisions sont "assez bonnes" et de montrer que les calculs sont compatibles avec des hypothèses "raisonnables" comme celle ci "aucune bille n'a de raison de se montrer plus souvent qu'une autre".
Que se serait il passé si l'enseignante avait permis aux élèves de constater que les bouteilles sont bien conformes à ce qu'ils pensent ?
Les élèves auraient seulement "appris" une nouvelle technique : l'on peut "deviner sûrement" la composition inconnue d'une bouteille effectuant ou en simulant de nombreux tirages.
Mais ils n'auraient eu aucune idée de ce qui est spécifique du calcul des probabilités et qui fait l'objet des deux prochaines phases : un doute subsistera toujours, il faut seulement comparer le prix de l'erreur qu'on risque de commettre avec le prix de l'obtention de nouvelles informations qui diminuent les doutes et les risques d'erreur.
Sans ce refus, l'observation du comportement des fréquences dans les longues suites de tirages n'aurait été qu'un exercice sans enjeu, sauf si l'enseignant annonce une espèce de convergence vers certaines valeurs. Mais ces valeurs ne sont pas "empiriques", elles ne peuvent être fournies que par un raisonnement sur la structure de la machine : 0,20 parce qu'il y a une boule blanche et quatre noire (et non pas 0,20 parce que c'est une valeur simple proche de la valeur effective 0,21 observée!

2. Le contrat didactique habituel fait que les connaissances enseignées par le professeur apparaissent comme des savoirs certains, garantis. Eventuellement, le professeur simule une démonstration ou une preuve expérimentale mais le doute est un mythe scolaire. Dans le cas précis de l'enseignement de la pensée probabiliste et statistique, ce contrat ne convient pas puisqu'il ne peut pas déléguer aux étudiants la responsabilité de la réduction du doute subsistant.

3. La "représentation" successive des sacs par leur composition supposée (4e séance), puis par la distribution des effectifs sur les séries de 5 tirages, puis par les bouteilles (6e), puis par les longues suites de fréquences "normées" (9e), par les graphes de ces suites (15e), puis par des suites de lettres fournies par un ordinateur (16e), etc. permet d'enrichir la connaissance des élèves sur la machine étudiée, mais elle pose un problème de "crédibilité" déjà signalé: pourquoi ces représentations préserveraient elles ce que nous voulons étudier ? Les

enfants ne savent pas si les tirages ne dépendent pas de la personne qui tient la bouteille, et ils doivent pourtant admettre qu'ils ne dépendent pas non plus de toutes ces transformations bien plus grandes…

Quatrième phase : La convergence et la décision statistique

17ième séance : L'examen des courbes

Déroulement

Les enfants rappellent ce qui avait été proposé à la fin de la leçon précédente : refaire les courbes sur du <u>papier quadrillé</u>

- La courbe représentant les tirages faits avec les bouteilles,
- la courbe représentant les tirages donnés par l'ordinateur.

1) Par groupe, les enfants retracent les courbes.
2) **Examen de ces courbes**.

Les courbes terminées, les enfants observent et font des remarques.

- "au début, elles sont très écartées, et puis elles se rapprochent de plus en plus".
- "Peut-être que si on continuait des tirages, elles se rapprocheraient encore, peut-être qu'elles se rencontreraient".
- "Elles s'écarteraient peut-être comme au début.
- "S'il y en avait d'autres, est-ce qu'elles feraient pareil ?"

(A la fin de la séance, la maîtresse reporte sur un même papier quadrillé les courbes de tous les groupes).

18ième séance : La comparaison des courbes

L'observation des courbes

Les papiers quadrillés sur lesquels sont tracés les courbes sont affichés au tableau.
Les enfants rappellent ce qu'ils ont découvert la veille.
Ils observent tous maintenant les 4 courbes correspondant aux 4 compositions des bouteilles

1 b 4 n 2 b 3 n 3 b 2 n 4 b 1 n

Ils remarquent que, lorsqu'il n'y a qu'une bille blanche, la courbe est « en bas », qu'elle est un peu plus haute lorsqu'il y a 2 blancs, un peu plus avec 3 blancs et qu'elle est en haut de la feuille quadrillée quand il y a 4 blancs. Plusieurs d'entre eux remarquent qu'au 180ème tirage les courbes restent autour des valeurs 0,20, 0,40, 0,60 et 0,80.

Ils demandent alors que l'on fasse de grands tirages : 2000, 4000, 5000,"pour voir ce que font les courbes à ce moment-là". Ils acceptent sans peine que l'ordinateur ne donne que les nombres des tirages blancs et les noirs
L'ordinateur donne instantanément les résultats des tirages demandés par les enfants qui traceront les courbes correspondantes.

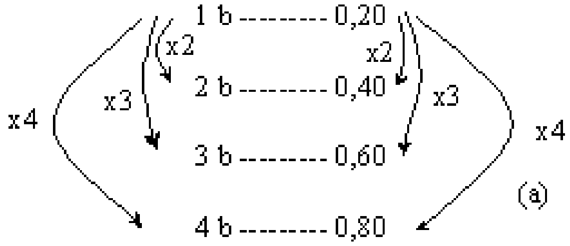
Une relation entre les valeurs :

La maîtresse fait une suite de tirages à l'ordinateur pour un contenu de sac de 5 billes. Elle marque sur le tableau les fréquences cumulées touts les 10 tirages et ceci jusqu'à 180 (l'ordinateur donne ces fréquences).
Les enfants doivent deviner dans quel sac elle a fait le tirage : Tous les élèves volontaires pour l'essai réussissent

Un enfant explique comment il a trouvé :

- E1 : « si les fréquences sont autour de 0,20, il y a 1 blanc
  - si elles sont dans les 0,40, il y a 2 blancs
  - si elles sont dans les 0,60, il y a 3 blancs
  - si elles sont dans les 0,80, il y a 4 blancs »

Un autre propose le tableau suivant qui exprime avec les procédés habituels dans la classe, que la fréquence des



billes blanches est proportionnelle au nombre de billes blanches contenues dans le sac.

19ième séance : Le "jeu des devinettes" (le jeu fondamental du test d'hypothèses)

a) Déroulement

Règle du jeu

La maîtresse propose alors aux enfants de jouer à un jeu :
Elle réalise, sur l'ordinateur, une composition de sac (contenant toujours 5 billes). Les enfants ne connaissent pas la composition de ce sac, mais peuvent demander des résultats de tirages qu'ils peuvent se procurer avec des jetons.
La classe est divisée en 4 groupes, chaque groupe dispose de 20 jetons.
Avec ces jetons les élèves peuvent « acheter des résultats de tirages avec le sac inconnu fabriqué par la maîtresse.

1 jeton donne droit à connaître les résultats de 5 tirages

Lorsque les élèves d'un groupe pensent avoir assez de tirages pour être presque sûrs de connaître la composition du sac, ils peuvent faire un pari

- Ils misent un certain nombre de jetons, le nombre qu'ils veulent
- Ils proposent une composition du sac
- Ils indiquent la valeur dont ils pensent que les fréquences cumulées se rapprochent si on fait beaucoup de tirages
- Ils vérifient alors le contenu du sac sur une fiche qu'ils font imprimer par l'ordinateur

Si la composition proposée est la bonne, ils récupèrent le double de leur mise
Si la composition proposée n'est pas la bonne, ils perdent la mise.
C'est le groupe qui devine la bonne composition et qui a le plus de jetons en fin de partie qui a gagné.

Trois groupes sur les quatre trouvent la bonne composition.
Le 1er groupe qui avait voulu économiser ses jetons, n' a demandé qu'un trop faible nombre de tirages, d' où échec.

Méthode de prévision

Pour trouver les valeurs vers lesquelles tendrait la fréquence cumulée, ceux qui ont gagné ont tous fait le tableau suivant :

blancs	*valeur limite (supposée)*
5 b------------------------->	
4 b ------------------------->	0,80
3 b ------------------------->	0,60
2 b ------------------------->	0,40
1 b ------------------------->	0,20
0 b ------------------------->	0

Ils expliquent leur tableau de manières différentes suivant les groupes :

Beaucoup d'enfants (la majorité à) cherchent la valeur pour 5 b, puis trouvent cette valeur pour 1 b en divisant par 5. Ensuite, ils calculent successivement pour 2 blancs, 3 blancs, 4 blancs (voir 18ème leçon, tableau (a).
Un autre enfant explique que pour trouver ces valeurs, il divise chaque fois le nombre de blancs par 5.

Changement du nombre de jetons

La maîtresse demande alors :

"S'il y avait 4 jetons dans le sac, pourriez-vous calculer ces valeurs" ?

Les enfants réalisent alors le tableau suivant :

Blancs

4b ------------------------→ 1
3b ------------------------→ 0, 75
2b ------------------------→ 0, 50
1b ------------------------→ 0, 25

La maîtresse demande alors les valeurs limites pour un sac qui contient huit jetons

8b ------------------------→ 1
7b ------------------------→ 0, 87
6b ------------------------→ 0, 75
5b ------------------------→ 0, 62
4b ------------------------→ 0, 50
3b ------------------------→ 0, 37
2b ------------------------→ 0, 25
1b ------------------------→ 0, 12

b) Commentaires

a) Ce jeu est en fait la "situation fondamentale d'action" du test d'hypothèse en ce sens qu'elle est le prototype de tous les problèmes de décision en conditions aléatoires. Elle donne leur fonction principale à tous les concepts essentiels : probabilités, fréquences, convergence, intervalle de confiance etc. La recherche des comportements limites de cette situation montrera les limites de son étude empirique, et justifiera le recours au raisonnement mathématique. Elle permettra ainsi de "donner directement un sens" global, concret et correct à ces études. La situation de communication correspondante est la situation fondamentale de la statistique descriptive.

b) Cependant les enfants ne sont pas mis au courant de l'importance culturelle et mathématique de ce jeu. Cette institutionnalisation ne serait pas possible, d'abord parce qu'elle n'apporterait rien immédiatement aux enfants et serait donc inintelligible, ensuite parce qu'elle n'a actuellement aucune place dans les enseignements ultérieurs.

Il est même probable que l'attention des enfants est focalisée sur les circonstances imposées par l'enseignant: nombre de jetons, valeur en tirage, gain final… et pas sur les règles du jeu.

20ième séance :

Au cours de cette leçon les enfants vérifient à l'aide de l'ordinateur, les fréquences limites *théoriques* qu'ils ont trouvées pour les différents contenus : 5 billes, 4 billes, 8 billes.

Pour cela ils font une grand nombre de tirages (5000 dans l'ensemble). L'ordinateur donne les fréquences limites, ils les comparent avec les fréquences théoriques qu'ils ont trouvé.

Commentaires sur la 4ième Phase

La troisième phase avait fait apparaître la tendance des fréquences « cumulées » à se rapprocher de certaines valeurs déterminées par le contenu de la bouteille, comme une sorte de « loi empirique », même si les professeurs savent bien qu'elle peut être établie comme un théorème. Cette « convergence » est souvent utilisée pour introduire le calcul des probabilités auprès des élèves, et elle est considérée comme le but et la fin d'une première initiation. L'enseignement des probabilités a servi à présenter aux élèves une connaissance nouvelle sur le monde. Dans le processus proposé ici, les élèves sont invités immédiatement à aller plus loin, sans s'arrêter au « pourquoi » de cette « loi naturelle». La quatrième phase engage déjà les élèves dans un nouveau rapport à ce fait : comment l'utiliser ?

Les statistiques permettent d'obtenir de l'information sur une machine inconnue, plus j'obtiens de résultats de tirages, plus je peux conclure avec confiance. Pour établir ce fait, le professeur a dû faire en sorte que les élèves puissent obtenir aussi facilement (pour « le même prix ») 1 million de résultats de tirages que seulement 10.

Mais en général, l'obtention d'information coûte (on pourrait dire à peu près que la confiance croît comme la racine carrée du nombre de tirages). Il faut donc chercher un certain équilibre entre deux coûts : ce que coûtera une erreur sur le contenu de la machine, ce que va coûter l'obtention d'informations plus sures.
C'est ce que cette phase tend à introduire.
Le jeu marque de façon critique le choix que doivent faire les enfants : en réservant trop de jetons pour le pari final, et donc trop peu pour obtenir des informations, ils risquent de tout perdre, mais en consacrant trop de jetons à être sur de la réponse, ils ne peuvent plus miser suffisamment pour gagner suffisamment… [14]

Cinquième phase : Les intervalles de décision

21ième séance : La méthode de recherche empirique des fréquences limites

a) Déroulement : 1. rappel des notions considérées comme acquises

La maîtresse fait le point de ce qui a été « découvert » par la classe.

- Vous avez découvert que si l'on faisait un grand nombre de tirages dans des sacs contenant 5 billes, les… fréquences cumulées… de tirages ''blancs'' devenaient voisines des valeurs suivantes :

si le sac contient	1 bille blanche........................	0,20
	" 2 billes "	0,40
	" 3 billes "	0,60
	" 4 billes "	0,80
	" 5 billes "	1

Elle fait formuler aux enfants la correspondance, puis la propriété de linéarité[15] : la fréquence des billes blanches est proportionnelle au nombre de billes blanches contenues dans le sac. sous la forme : "S'il y a deux fois plus de billes blanches dans le sac, la fréquence des blancs est deux fois plus grande"

Elle leur pose alors la question suivante :

- M : « Si on vous demandait de deviner la composition d'un sac qui contient 8 billes, comment feriez-vous ? »[16]
- EE. : « on ferait pareil »
- M : « … ? »

Les enfants évoquent progressivement les étapes. La maîtresse insiste pour obtenir des formulations résumées avec les termes spécifiques (en gras)

a) nous **simulerions** les différents sacs possibles
b) nous ferions de nombreuses **suites de tirages.**
c) nous calculerions les **fréquences cumulées**
d) nous ferions autant de tirage qu'il faut pour que les fréquences soient bien séparées),
e) nous ferions dans le sac inconnu une série de ce nombre de tirages
f) et nous comparerions la fréquence cumulée aux valeurs obtenues par simulation.

Les trois dernières étapes sont formulées avec l'aide de la maîtresse.

Commentaire

De toute façon l'évocation collective d'un processus aussi long ne permet pas de conclure qu'il est connu au moins par un élève de la classe
Remarquons que les enfants n'utilisent pas le calcul théorique des valeurs limites, mais la linéarité.
L'enseignante cherche à faire rappeler par les enfants les étapes du processus qu'ils ont suivi. Mais elle veut profiter de ce rappel pour "enseigner" (ou plutôt laisser entendre) à ses élèves qu'il conviendrait de procéder de la même façon quel que soit le nombre de billes dans les bouteilles.
Etant donné que les enfants viennent de rappeler qu'ils obtiennent la fréquence des blanches - dans le cas de quatre billes blanches et d'une noire - en multipliant par quatre la fréquence observée dans le cas d'une seule bille

[14] Exceptionnellement, les variables de la situation : nombre de billes dans la bouteille, valeur des jetons en nombre de tirages, nombre de jetons donnés aux élèves, et gain suivant la mise ont dû être fixées au moment de l'expérience sans que soient connus des enseignants les valeurs optimales données par une étude mathématique de la situation. Ce sont les valeurs empiriques effectivement choisies par l'enseignant que nous avons rapportées.

[15] Le linéarité a été remarquée au cours de la 18ième leçon

blanche pour 4 noires, on pourrait craindre de les voir généraliser ce calcul au cas d'une bouteille contenant 8 billes. Ils croiraient obtenir la fréquence des blanches dans le cas de 7 blanches et d'une noire en multipliant 0,2 par 7, ce qui donne la fréquence absurde de 1,4.
Le rappel par l'enseignante de l'ensemble du processus est alors bien nécessaire, mais cette précaution est probablement insuffisante pour obtenir que les élèves évitent eux-mêmes cette erreur. C'est une des raisons pour lesquelles elle ne va pas favoriser la détermination "théorique" dans la phase suivante.
Par contre cette déclaration de généralisation était indispensable au professeur pour faciliter le choix d'une autre composition de bouteille dans la phase suivante.
L'objectif de la cinquième grande phase du processus est de faire découvrir aux élèves qu'il est possible de prévoir les valeurs théorique par d'autres moyens pour économiser la simulation.

b) Retour au jeu fondamental :

consigne.

- M : « Nous avons un sac qui contient 4 billes, vous devez
  - 1) Deviner la composition du sac.
  - 2) Deviner les valeurs dont se rapprochent les "fréquences cumulées" (au bout de 3000 tirages par exemple).

Pour cela , vous avez le droit de faire des tirages (à l'ordinateur) dans ce sac mais il faut les acheter avec des jetons : 1 jeton donne droit à 5 tirages.
Quand vous croyez savoir ce que contient le sac, vous pouvez parier sur son contenu. On n'a le droit de parier qu'une fois. Supposons par exemple que vous vous misiez 12 jetons, si vous avez raison, vous prenez 24 jetons, vous en avez donc gagné 12, mais si vous avez tort, vous perdez votre mise de 12 jetons. De même pour les valeurs, vous pouvez parier (à quitte ou double) dès que vous voulez.
Alors la machine fait 3000 tirages et vous voyez si vous avez gagné.

Au départ, chaque groupe a 25 jetons. On verra ceux qui auront le plus de jetons à la fin. »

Distribution des jetons :

Les groupes peuvent venir demander leurs tirages à tour de rôle .
C'est le même sac pour tout le monde.

Conclusions (phase collective)
Les valeurs trouvées par les élèves sont
1-----------0,25
2-----------0,50
3-----------0,75

Propositions pour la suite :
M. Pourriez-vous trouver les valeurs dans le cas ou le sac contient 8 billes ? On répondra une prochaine fois, mais vous devrez répondre individuellement.

22ième séance : Elaboration, par les enfants, d'un tableau des intervalles.[17]

a) Déroulement

Rappels par la maîtresse

M. Vous savez maintenant comment on fait pour deviner quelle est la composition d'un sac contenant un nombre quelconque de billes lorsque vous avez un grand nombre de tirages.
Vous savez aussi trouver les valeurs vers lesquelles s'approchent les fréquences cumulées lorsqu'on fait un grand nombre de tirages (et ceci pour toutes les compositions).

Question :

- M. : « "Si vous voulez expliquer à des camarades qui s'interrogeraient sur la stratégie à employer pour deviner la composition d'un sac de 5 billes, que diriez-vous ? il faudrait que ces enfants puissent décider <u>dans tous les cas</u> qui se présentent".

[17] vendredi 31 mai 1974

Après discussion avec les enfants, la maîtresse propose de rassembler dans un tableau tous les résultats obtenus et rappelés en désordre par les enfants ("si on trouve 0,80, on peut dire qu'il y a 4 blancs, si on trouve 0,60, on peut dire qu'il y a 3 blancs, et... si on trouve 0,79...).
Les enfants travaillent par groupe (il y en a 6). Chaque groupe cherche et écrit sur une feuille les intervalles correspondant à toutes les compositions possibles. Ces résultats sont rassemblés dans un tableau collectif inscrit sur le tableau noir de la classe.

discussion Toutes les équipes ne sont pas parvenues à découper entièrement l'intervalle [0 ; 1]. Le tableau incomplet sera complété au fur et à mesure des débats. Mais le désaccord et l'incertitude sont flagrants.
Un groupe d'enfants avait placé la valeur 0,99 dans la dernière colonne (5 blancs)

4 b		5 b	
0,80	0,98	0,99	1

Une discussion très intéressante s'est alors engagée entre ce groupe et les 5 autres.
Un enfant est venu expliquer :

- Laurence : « Si on trouve 0,99 à la fréquence, ça voudra dire qu'il y a 1 noir dans le sac. Comme il n'y a pas de noir il faut mettre 0,99 dans la colonne 4 blancs".

Tous les groupes sont convaincus et corrigent le tableau en conséquence.
Sur la lancée les enfants proposent de vérifier et de modifier la 4ème colonne (4 b, 1 n) du tableau A .
Le maître réserve ce projet pour la leçon suivante. Voici le tableau A à la fin de la séance.

TABLEAU A

	1 blanc	2 blancs	3 blancs	4 blancs	5 blancs
Equipe I	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe II	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe III	0,01 à 0,36	0,37 à 0,55	0,56 à 0,76	0,77 à 0,99	1
Equipe IV	0,01 à 0,26	0,27 à 0,56	0,57 à 0,79	0,80 à 0,99	1
Equipe V	0,01 à 0,38	0,39 à 0,58	0,59 à 0,78	0,79 à 0,99	1
Equipe VI	0,01 à 0,29	0,30 à 0,59	0,60 à 0,79	0,80 à 0,99	1

Commentaire

La tâche est difficile. Les intervalles sont inégaux alors que les limites sont équiréparties.
Toutes les équipes choisissent "correctement" des intervalles qu'ils croient jointifs (connexes) mais qui, exprimés avec des décimaux, laissent à leur insu quelques trous.
Les équipes I, II et VI trouvent correctement le milieu 0,3 de l'intervalle [0,20 et 0,40], et en déduisent que le premier intervalle est]0; 0,30] ce qu'ils écrivent [0,01 ; 0,29].
Il semble qu'ensuite les trois équipes cèdent au modèle linéaire en reportant un intervalle de même longueur que le premier : 0,30 ce qui leur fait conclure que l'intervalle est [0,30; 0,60]. Ce qui reste est partagé en deux, les bornes sont égales aux valeurs.
Les intervalles des trois autres groupes sont établis "au jugé", sans calcul.

23ième séance : Vérifications du tableau des intervalles.[18]

Rappel de la tâche en cours

Le tableau des intervalles réalisé au cours de la précédente leçon est resté inscrit sur le tableau noir de la classe.
La maîtresse demande aux enfants de rappeler pourquoi ce tableau a été fait (il doit permettre de décider s'il y a 1 blanc, 2 blancs, 3 blancs, 4 blancs, dans un sac contenant 5 billes) par le procédé suivant :

[18] mardi 4 juin 1974

Chaque intervalle correspond à une composition du sac. Si la fréquence cumulée "tombe" dans un des intervalles choisis, on peut décider la composition du sac correspondante.
Il s'agit donc de savoir si les intervalles proposés par les élèves sont "corrects", c'est-à-dire si la décision qui leur est associée est "conforme à la réalité".

Mise à l'épreuve du tableau A

Tous les enfants ne sont pas d'accord : certains veulent le modifier, d'autres non, d'autres enfin ne savent pas. Devant l'impossibilité de faire partager par tous les enfants la stratégie du découpage "géométrique" commencée dans les trois groupes qui ont mis une borne en 0,29, la maîtresse leur propose de vérifier empiriquement ces intervalles
Toutefois il lui paraît intéressant de suivre la remarque de Laurence et de commencer par régler le sort de la 4ème colonne qui correspond à la composition 4 b 1 n.
Les enfants, qui travaillent en équipe. Ils ont à leur disposition des feuilles de tirages faits par l'ordinateur pour la composition 4 b 1 n. Chaque équipe a 2 feuilles comportant :

- 1ère feuille : des suites de 10 tirages
  des suites de 20 tirages
  des suites de 50 tirages
- 2ème feuille : des suites de 200 tirages
  des suites de 500 tirages
- Sur les deux feuilles l'ordinateur à calculé les fréquences cumulées correspondantes à chaque série de tirages.

Dans chaque équipe, les enfants se partagent le travail :

- l'un "vérifie" si les fréquences cumulées des suites de 10 et 20 tirages sont dans les intervalles chgoisis
- un autre "vérifie" les suites de 50 et de 200 tirages
- un autre enfin "vérifie" les suite de 5000 tirages.

Pour cela, ils marquent en face de chaque fréquence donnée par l'ordinateur : "vrai" ou "faux" (sous entendu notre hypothèse est vraie ou fausse) suivant que cette fréquence se trouve dans l'intervalle proposé par l'équipe ou non.

Exemple : l'Equipe I :

Tirages dans un sac de 4 billes blanches et 1 bille noire : résultats pour les billes blanches.

Nombre de tirages	Nombre de blancs	Fréquence des blancs
10	7	0,70
20	7	0,70
30	8	0,80
90000	4012	0,80
95000	3997	0,80
100000	4024	0,80

Elle avait proposé, dans le tableau A, (22ème leçon) (et pour la composition 4 b 1 n), 1 intervalle "0,80 à 0,99".
Sur la feuille de tirages de l'ordinateur, l'enfant marque "vrai" en face des fréquences qui se trouvent dans l'intervalle ci-dessus et "faux" en face des fréquences qui se trouvent en dehors de cet intervalle.
Il compte le nombre de "vrai" et de "faux"[19].
Ces résultats (nombre de "vrai" et de "faux") sont relevés et inscrits sur le tableau noir en face de chaque équipe :
Il est alors possible pour tous les enfants de les comparer et de voir quelle est la " méthode" qui a donné le plus de "vrai" pour toutes les suites de tirages. Elle est déclarée la meilleure par l'ensemble de la classe. Chaque équipe corrige donc la 4ème colonne du tableau A en fonction des résultats qu'elle vient de trouver.
A la fin de la leçon, la maîtresse proposera aux enfants d'améliorer le tableau pour les compositions 2 b, 3 n et 3 b 2 n, au cours de la prochaine séance (et ceci en utilisant la même méthode).

[19] Il est clair pour le professeur que compter le nombre de réussites de leur système de décision est de nature à faire rectifier les intervalles. Remarquons que dans ce cas ce sont les informations obtenues avec les "séries courtes ou moyennes" qui sont les plus pertinentes. Ainsi pour éviter les deux "erreurs" dues aux séries de 10 ou de 20 tirages, il faudrait élargir l'intervalle jusqu'à 0,70. Les valeurs sur 10 000 tirages ne donnent aucune indication sur les intervalles de décision. Les élèves ne peuvent pas le savoir mais ils vont avoir à le comprendre.. En fait le procédé proposé par l'enseignante favorise une réflexion "rationnelle" sur la longueur et la position des intervalles, indépendamment du nombre et des résultats des tirages que l'on peut faire.

24ème séance : étude des intervalles (suite)

Vérification des intervalles de 2ème et 3ème colonnes du tableau A, (22ème leçon),
2 b, 3 n et 3 b, 2 n

a) Déroulement

Travail de groupe

Les enfants reprennent leur travail sur le tableau des intervalles réalisé au cours de la 22ème leçon et modifié (pour la composition 4 b, 1 n) au cours de le leçon précédente.

Ils doivent :

a) Eprouver les intervalles qu'ils ont proposés pour la composition 3 b, 2 n. Pour cela, ils utilisent les feuilles de tirages de l'ordinateur. Ils procèdent de la même manière que la veille :

Pour chaque groupe :
- l'élève vérifie les suites de 10 tirages
- " " " 20 tirages
- " " " 50 tirages
- " " " 200 tirages et de 5000 tirages,

et compte, pour chaque série, combien de fois il trouve "vrai" et combien de fois il trouve "faux".

b) D'après les résultats obtenus, améliorer, si possible, les intervalles de manière à avoir le plus de "vrai" possible (surtout dans les suites de 10, de 20, de 50 tirages).

c) Eprouver les intervalles pour la composition 2 n, 3 b (par le même procédé) et les améliorer.

Phase collective :

Chaque groupe dicte à la maîtresse les nouveaux intervalles que l'on inscrit sur le tableau collectif.
On compare les solutions et on cherche quelle est celle qui a donné les meilleurs résultats en comptant pour chaque série le nombre de "vrai" et de "faux".
Les enfants rectifient eux-mêmes les intervalles pour la composition 1 b, 4 n (sans vérification sur la feuille de l'ordinateur) en fonction des intervalles de la colonne 2 b, 3 n.

Observation du tableau :

La maîtresse fait rappeler par les enfants quelles valeurs théoriques ils avaient trouvé pour chaque composition (contenu : 5 billes).

1 b------------> 0,20
2 b------------> 0,40
3 b------------> 0,60
4 b------------> 0,80
5 b------------> 1

- M. « Comment faites-vous pour découper les intervalles ? Où faut-il mettre ces valeurs théoriques dans le tableau ?
- E1. "On a coupé au milieu".

Le milieu d'un segment :

Une discussion s'engage à propos "du milieu"
De quel milieu s'agit-il ?
- E2 « On a coupé le tableau entre 0,20 et 0,40, au milieu"

On cherche quel est ce milieu. Un enfant explique ce qu'il a trouvé :
- E3 « j'ai fait 0,40 - 0,20 : 2 et j'ai ajouté le résultat à 0,20.

Le calcul suivant fait par l'enfant sur son brouillon est écrit sur le tableau :

$$0,20 + \frac{0,40 - 0,20}{2} = 0,30$$

Pour s'assurer que tous les enfants ont compris, la maîtresse propose de trouver le milieu entre 0,35 et 0,55

entre 0,29 et 0,65
entre 0,40 et 0,60
entre 0,60 et 0,80

(Ce travail est un exercice individuel effectué par tous les enfants).
Le tableau des intervalles ci-dessous est donc définitivement adopté par les enfants :

0 b		1b		2b		3b		4b		5b
	0 0,01		0,29 0,30		0,49 0,50		0,69 0,70		0,99 1	
0		0,20		0,40		0,60		0,80		1

En conclusion, la maîtresse fait alors remarquer que même le meilleur découpage en intervalle n'est jamais sûr au bout de 10, de 20, de 50 tirages. Pour être à peu près sûr de la composition d'un sac de 5 billes, il faut au moins 200 tirages. Au bout de 5000 tirages, on peut être certain du résultat.

Exercices

A la fin de la leçon, on propose aux enfants, les exercices écrits individuels suivants (qui seront corrigés au cours de la leçon suivante). Les réponses attendues peuvent être accompagnées de déclarations comme "je suis sûr", "à peu près", "ce n'est pas sûr", "on ne peut pas savoir", "je ne peux pas dire sûrement", "je parierai que" etc.

1) Sur 100 tirages, on a trouvé une fréquence cumulée de 0,91 blancs . Combien de fois a-t-on tiré 1 blanc ?

2) Il y a 4 billes dans un sac :

- a) au bout de 10 tirages, on trouve une fréquence cumulée de 0,30 blancs Combien y a-t-il de jetons blancs dans le sac ?
- b) on trouve 0,30 au bout de 100 tirage. Combien y a-t-il de jetons blancs dans le sac ?

3) Dans un sac, on met 10 billes. De quelles valeurs se rapprocheront les <u>fréquences cumulées</u> des blancs suivant la composition des sacs ?

4) Quels sont les intervalles de décision ?

5) Combien de tirages demanderez-vous pour que la méthode donne plus de 9 réponses justes sur 10 ?

25ème séance : Correction des exercices[20]

L'enseignante laisse échanger des opinions sur les réponses et les fait converger vers les conclusions suivantes:

1. La première question est une simple question de calcul et les élèves devaient dire "je suis sûr que c'est 91
2. Au a) de la deuxième question la réponse est du genre "s'il me faut choisir un nombre, je dirai 1 blanc (parce que 0,30 est plus près de 0,25 que de 0,50) mais ce n'est pas sûr !
   Au b) la réponse peut être plus nette "Il est probable - mais pas sûr - qu'il y a 1 blanc
3. La troisième question appelle la réponse suivante : 0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; …; 0,9 ; 1 pour 0, 1 , 2, 3, … ou dix billes blanches.
4. Les intervalles de décisions sont

[0]]0 ; 1,5]]1,5 ; 2,5]]2,5 ; 3,5] …]7,5 8,5]] 8,5 ; 10[[10]

5. Cette dernière question n'était qu'une amorce pour une étude à venir sur l'intervalle de confiance et sur le nombre ou la proportion des séries qui se trouvent à l'intérieur d'un intervalle donné (avec une probabilité donnée). Les réponses attendues sont du genre "au moins deux cents" ou "au moins deux mille" le mot important est "au moins"

Commentaires sur la 5ième Phase

La quatrième a présenté le « jeu de la décision », c'est à dire les conditions dans lesquelles il convient de choisir entre deux risques, celui de se tromper sur la vérité d'un modèle ; le contenu des bouteilles, et celui de dépenser

[20] Vendredi 7 juin, samedi 8 juin

trop d'efforts inutiles pour obtenir cette information… La cinquième permet d'expliciter et de « formaliser les instruments de résolution de ce jeu. La variété et la sophistication des moyens mathématiques utilisés par les élèves peuvent apparaître comme très excessives. Mais il faut songer qu'il ne s'agit que d'une « utilisation » dans un contexte très précis et très familier, et non pas l'application de « savoirs scolaires » dûment définis, justifiés et classifiés. Que l'on songe à la complexité effective de certains milieux auxquels les enfants s'initient assez facilement : tels que ceux que l'on rencontre dans certains jeux de rôle - l'univers de Tolkien par exemple, ou dans certains jeux informatiques…

Sixième phase : Les événements et leur probabilité

Introduction

26ème séance : Les événements d'autres expériences

a) Nouvelle expérience : Recherche d'évènements quelconques.

Matériel : 5 cartons carrés : 3 rouges et 3 jaunes.
Sur chaque carton est inscrit 1 chiffre :

1	2	3	4	5	6
Carton rouge	Carton jaune	Carton rouge	Carton rouge	Carton jaune	Carton jaune

La maîtresse montre les cartons aux enfants, puis les met dans un sac de tissu opaque :

Question : "On va piocher des cartons l'un après l'autre (comme dans une loterie).
Que peut-il arriver lorsque je tire 1 seul carton ?"
Elle invite les enfants à écrire sur leur cahier la liste de toutes les possibilités.

- On appelle "ce qui peut se produire" un **"évènement"**.
Tous les évènements trouvés par les enfants sont inscrits sur le tableau noir :

- il sort un carton rouge ou
- ‘’ un carton jaune
- Il sort, le carton 1 ou
- " " 2
- " " 3
- " " 4
- " " 5
- " " 6

Mesure de probabilité sur ces évènements

a) La maîtresse propose aux enfants de trouver la **probabilité** de sortir le carton 1 ?
(Auparavant, il a fallu rappeler - ce qu'était la probabilité
ce qu'était la fréquence cumulée.
A ce moment-là, un enfant fait le rapprochement avec les billes du sac et dit :

- E1 « Les cartons, c'est comme les billes,
- E2 « Oui ! C'est comme s'il y avait 6 billes dans le sac.
- E3 « C'est la même chose que les billes blanches et les billes noires".

b) Alors la majorité de la classe pense à une nouvelle composition de sac :

3 rouges et 3 jaunes

La question posée "probabilité de tirer le 1 est oubliée : les enfants s'intéressent pour l'instant à la couleur.
La maîtresse demande alors :

- M "quelle est la probabilité de tirer un jaune ?"

Réponse des enfants : "c'est 0,50"

- M : « Pourquoi ? »
- E4 : « parce que 3 : 6 = 0,50 »

c) On reprend la première question ;

- M : « probabilité de tirer le 1 ? »

Les enfants s'intéressent au carton 1 comme ils se sont intéressés aux billes blanches).
Ils cherchent sur leur cahier et la majorité écrit : 1: 6 = 0,16
La maîtresse propose alors de calculer la probabilité de tirer le 2 ? le 3 ? le 4 ? le 5 ? le 6 ?

Echec presque total de la classe.

Les enfants répondent :

pour le 2 ---->0,33 (2 : 6)
pour le 3 ---->0,50 (3 : 6)
pour le 4 ---->0,66 (4 : 6)
pour le 5 ---->0,83 (5 : 6)
pour le 6 ----> 1

Beaucoup d'élèves ne comprennent pas que les chiffres ne sont que des signes.
Un élève dit pourtant :
- E5 « on aurait pu mettre A, B, C, D, E, F à la place des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 ».
mais personne ne comprend son objection, tant la prégnance du tableau est forte
L'examen de cette question sera reprise à la séance suivante.

27e séance : Recherche d'évènements et de leur probabilités.[21]

a) Matériel :

Les cartons de la leçon précédente (portant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6)
- Des cartons identiques aux précédents mais portant les lettres A, B, C, D, E, F, à la place des chiffres.
- Des "dés" : certaines faces portent
  - des points de couleur,
  - d'autres sont blanches :
- 1 dé avec des points rouges et des faces blanches
- 1 dé avec des points bleus et des faces blanches
- 1 dé avec des points verts et des faces blanches.
- Des "dés" ordinaires (dont les faces portent 1, 2, 3, 4, 5, 6 points)
- 1 dé blanc (dont les faces portent 0, 1, 2, 3, 4, 5 points)
- 1 dé "pipé" (une des faces est « plombée »)
- 1 polyèdre à 20 faces. Sur chaque face 1 chiffre : 1 ou 2, ou 3 ou 4 ...9 (il y a 2 zéro, 2 un, 2 deux, etc.)
- une boite en plastique transparent contenant 20 perles de couleurs différentes (2 bleues, 2 rouges, 2 vertes, 2 jaunes

b) Travail en Groupes :

La classe est divisée en plusieurs groupes de travail, chaque groupe a un matériel différent : soit un dé, soit un polyèdre, soit les cartons, soit la boîte de perles, etc...)

On demande aux enfants de chaque groupe de faire sur leur cahier de brouillon, la liste de tous les évènements possibles.

[21] lundi 10 juin 1974

c) Phase collective :

Un enfant de chaque groupe énumère la liste des évènements correspondant au matériel qu'il a :

Cette liste est écrite sur le tableau noir et disposée de la manière suivante : (voir tableau B - page suivante)

1) - on inscrit dans chaque colonne I, II, III, IV, V, VI, VII, la liste de tous les évènements.

2) - on propose aux enfants de calculer (individuellement ou par groupe) la probabilité de chaque évènements.

- d'abord pour les colonnes I, II, III, IV
- puis pour les colonnes VI, VII, VIII.

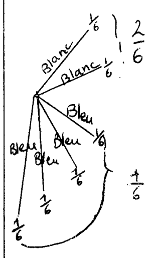
3) - on demande aux enfants de calculer, pour les colonnes I et II, la probabilité de tirer un carton jaune.

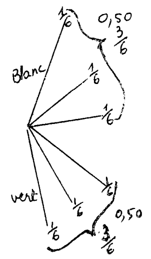
- et pour la colonne I, la probabilité de tirer un nombre pair.

Les enfants paraissent avoir bien compris, presque tous ont fait des calculs de probabilités exacts et savent expliquer ce qu'il ont fait.

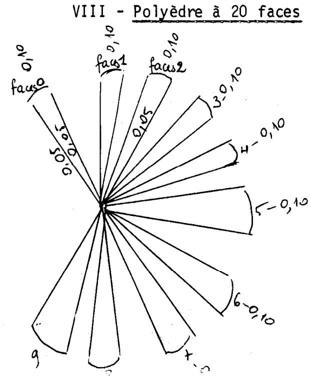
d) Tableau

I L (cart. s por- tan les t- tres)	Probabilité	II sac N (carton por- tant les nom- bres)	Probabilité	III Dé rouge	Probabilité	IV dé bl	Prob- ilité	ce pipé		V dé ble	VII dé vert
Il sort 1 jaune											
" " 1 rouge											
" " A	$\frac{1}{6}$	il sort 1	$\frac{1}{6}$	il sort 1	$\frac{1}{6}$	il sort 0	$\frac{1}{6}$				
" " B	$\frac{1}{6}$	il sort 2	$\frac{1}{6}$	il sort 2	$\frac{1}{6}$	il sort	$\frac{1}{6}$				
" " C	$\frac{1}{6}$	il sort 3	$\frac{1}{6}$	il sort 3	$\frac{1}{6}$	il sort 2	$\frac{1}{6}$				
" " D	$\frac{1}{6}$	il sort 4	$\frac{1}{6}$	il sort 4	$\frac{1}{6}$	il sort 3	$\frac{1}{6}$				
" " E	$\frac{1}{6}$	il sort 5	$\frac{1}{6}$	1 sort 5	$\frac{1}{6}$	il sort 4	$\frac{1}{6}$				
" " F	$\frac{1}{6}$	il sort 6	$\frac{1}{6}$	1 sort 6	$\frac{1}{6}$	il sort 5	$\frac{1}{6}$				





VIII - Polyèdre à 20 faces



a) on cherche la probabilité de tirer 1 face : 1 : 20 = 0,05

b) on cherche la probabilité de tirer une face 0, une face 1, une face 2, etc...

2 : 20 = 0,10

(B)

-24-

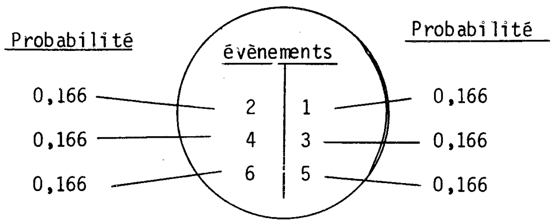
28[ième] séance : calcul des probabilités

A) Nouvelles expériences

On prend 1 dé à jouer (portant sur chaque face 1 point ou 2 points ou 3 points ou 4 points ou 5 points, ou 6 points).

"Si je le lance, dit la maîtresse, quelle sera la probabilité pour qu'il tombe sur un nombre pair".

Recherche individuelle puis correction collective sur le tableau noir.



- les enfants écrivent la liste des évènements
- ils calculent la probabilité pour chaque évènement

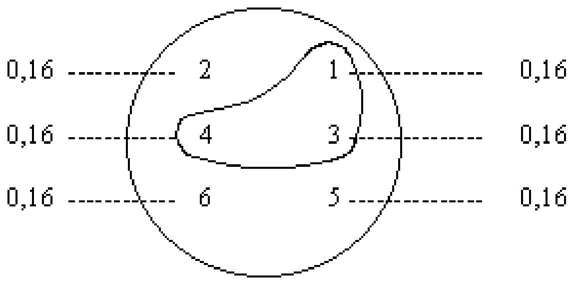
Question : " Si on fait 1000 tirages, combien de fois (approximativement) sortira chaque nombre ?
- 166 répondent les enfants (0,166 + 0,166 + 0,166 = 0,498

Quelle sera la probabilité pour qu'il tombe sur un nombre pair ?

Réponse des enfants : "0,166 + 0,166 + 0,166 = 0,498"
" on aurait pu le trouver en faisant
$\frac{3}{6}$ = 0,50"

b) Phase collective

- M. : « On prend les cartons portant les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ceux de la 25ème leçon). Ecrivons les évènements qui peuvent arriver et entourons en rouge les évènements : "il sort un rouge" »



Pair ou impair ? :

0,16 + 0,16 + 0,16
ou : 3 = 0,50
quelle est la probabilité de sortir ?

- 1 rouge
- 1 jaune
- 1 pair
- 1 impair
- 1 rouge pair
- 1 rouge impair

Calcul très rapide et très sûr des enfants pour les 4 premiers évènements (on marque à mesure sur le tableau des probabilités trouvées)

Pour les deux derniers (1 rouge pair, 1 rouge impair) la maîtresse propose à chaque groupe de venir écrire ses résultats sur le tableau (disposés de la manière suivante) :

Equipes	1	2	3	4	5

Rouge pair	0,16	0,50	0,16	0,33	0,50
Rouge impair	0,33	0,50	0,16	0,66	0,50

Une discussion très intéressante s'engage entre les équipes.
Deux équipes viennent très vite rectifier leurs résultats (Equipe 2 et équipe 5). Lorsque tout le monde est d'accord, le tableau est corrigé.

c) Exercice individuel

On reprend les cartons (matériel de la 27ème séance) A B C D E F

<u>Questions posées par écrit sur le tableau noir</u>

Quelle sera la probabilité des évènements suivants :

"il sort un rouge"
"il sort une voyelle"
"il sort une consonne"
"il sort une des 3 premières lettres de l'alphabet"
"il sort l'initiale du prénom de Joèl"
"il sort une lettre
"il sort l'initiale du prénom de Frédéric"

Très grande réussite à cet exercice pour l'ensemble de la classe.

29ième séance : Lancers successifs d'un dé

Matériel : 1 dé à jouer (portant de 1 à 6 points)

a) Phase collective

- M. : « Si je jette le dé, quels sont les évènements qui peuvent arriver ? »
Les enfants énumèrent la liste des évènements élémentaires :
"il sort 1
il sort 2, etc. »

b) Travail en groupes

<u>Question de la maîtresse</u> : Je vais lancer le dé trois fois de suite

1) cherchez tous les évènements élémentaires qui peuvent se produire et marquez-les sur votre cahier, combien y-en-a-t-il ?
2) trouvez un moyen pour les compter tous sans répéter 2 fois le même.

<u>Activités des élèves</u>
Les enfants travaillent par groupes. Au début, tous les enfants commencent la liste de tous les évènements possibles. Mais très vite, certains protestent : "c'est beaucoup trop long" quelques-uns continuent jusqu'au bout, d'autres cherchent un moyen plus rapide.
Finalement :

- 3 groupes pensent à faire un arbre
- 1 groupe essaie, par des calculs, de trouver le résultat demandé
- 1 groupe fait la liste complète (voir feuille jointe) des évènements élémentaires.

c) Mise en commun des résultats

Un représentant de chaque groupe vient expliquer ce qui s'est fait dans son groupe.

<u>Résultats obtenus</u> :
Equipe 1 : l'arbre est commencé correctement mais pas terminé.

Equipe 2 : c'est le résultat qui fait la liste complète des évènements mais elle n'arrive pas au résultat demandé : nombre des évènements.

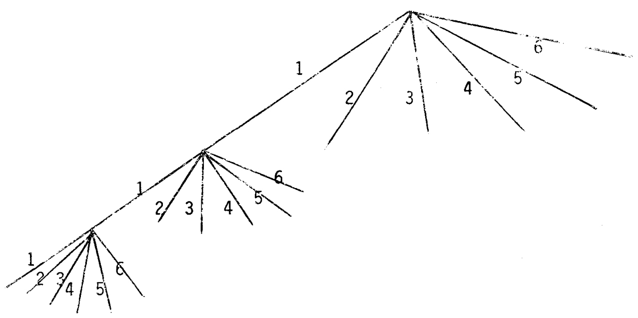
Equipe 3 - Equipe 4 : l'arbre est fait correctement - les résultats sont corrects : 216 évènements.

Equipe 5 : le résultat est correct : 216 évènements. Une fillette vient expliquer comment elle a obtenu ce résultat : "je peux faire une colonne en commençant par le 1
par le 2
par le 3 etc..."
Dans chaque colonne, il y a 36 évènements possibles. (Elle précise qu'elle les a comptés pour la 1ère colonne). Puisqu'il y a 6 colonnes, il y a 6 x 36 évènements".
La technique de l'arbre est adoptée par toute la classe, qui trouve ce moyen plus sûr. (L'arbre n'est d'ailleurs pas reproduit en entier sur le tableau noir.

Les enfants énumèrent les évènements en suivant les branches de l'arbre :

111	241	411	541
112	242	412	542
113	243	413	543
…	…	…	…
234	362	535	665
235	363	<u>536</u>	<u>666</u>
<u>236</u>	364		
	365		
	366		

et les comptent.



30^{ième} séance : Expériences successives

Matériel : 2 dés :
- l'un rouge, avec 1, 2, 3, 4, 5, 6 sur les faces
- l'autre blanc avec 1 face blanche que les enfants désignent 0 et 1, 2, 3, 4, 5

a) Expérience proposée aux enfants :

On jette les 2 dés en même temps : on fait la somme de ce qui sort.

<u>Question posée</u> : Quels sont tous les évènements élémentaires qui peuvent se produire ?
La liste de ces évènements est marquée sur le tableau noir par la maîtresse sous la dictée des enfants : (les enfants remarquent que l'on ne peut avoir 0 puisque le dé rouge n'a pas de face sans chiffre, ni 12).
En face de ces évènements, la maîtresse écrit la probabilité qu'ils ont de se produire, toujours sous la dictée des enfants.

Les enfants pensent que tous les évènements vont se produirent avec la même probabilité.

Question de la maîtresse :

« Si je jette 200 fois les dés, combien de fois sortira le "5" par exemple ? »
Après réflexion, plusieurs enfants répondent 18 fois.
A la demande de la maîtresse, une fillette vient expliquer :
"009, c'est pour 1 tirage"
si on fait 100 tirages, on trouvera 0,09 x 100 = 9 fois
et si on fait 200 tirages, 9 x 2 = 18 fois.

b) Travail de groupe : Vérification des prévisions

La classe est divisée en en 5 équipes. La maîtresse distribue 2 dés à chaque équipe (1 rouge et 1 blanc) et invite les enfants à jeter les dés, à faire la somme et à marquer ce qui sort. Les résultats de chaque équipe sont ensuite marqués sur le tableau noir de la manière suivante :

Sommes	Equipe I	Equipe II	Equipe III	Equipe IV	Equipe V	Total
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	3	2	2	8
2	5	4	6	3	4	22
3	15	1	5	10	6	35
4	7	8	9	8	4	36
5	16	7	16	9	8	56
6	14	5	15	9	9	52
7	12	3	13	6	12	46
8	10	4	7	4	10	35
9	5	5	8	2	4	24
10	3	4	5	3	3	18
11	4	1	3	2	2	12

						344

Les enfants remarquent alors que les résultats obtenus ne correspondent pas du tout aux prévisions qu'ils avaient faites. Ils constatent que les nombres qui sortent le plus sont 5 le 6 et le 7 et que ceux qui sortent le moins sont le 11, le 10, le 2 et le 1.

La maîtresse demande : Si ces 11 évènements sortaient avec la même fréquence, quelle serait la fréquence pour chacun d'eux (sur les344 tirages que vous venez de faire) ?
Les enfants calculent : 344 : 11 = 31,27

La maîtresse demande alors aux enfants d'essayer de comprendre pourquoi les nombres 5, 6,7 sortent plus souvent que les autres.

Une fillette dit alors : "c'est normal qu'on ne trouve pas souvent 2 parce qu'il n'y a que 2 possibilités pour le faire :

0 pour le dé blanc, 2 avec le dé rouge
ou 1 avec le dé blanc et 1 avec le dé rouge.

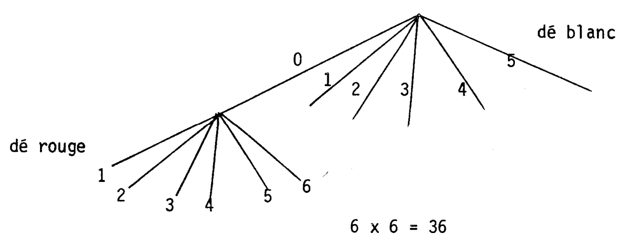
Les enfants proposent alors de chercher combien il y a de possibilités de faire 5 (puisque c'est lui qui est sorti le plus).

Le même travail se fait ensuite pour 1, pour 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et on obtient le tableau suivant :

Pour faire	**1**	**1 possibilité**
" "	2	2 "
" "	3	3 "

"	"	4	4	"
"	"	5	5	"
"	"	6	6	"
"	"	7	5	"
"	"	8	4	"
"	"	9	3	"
"	"	10	2	"
"	"	11	1	"

(Les différentes manières d'obtenir ces sommes sont énumérées par les enfants).
La maîtresse demande de calculer la probabilité d'un de ces évènements élémentaires. Pour cela, les enfants proposent de faire 1 arbre représentant tous les évènements possibles :



La probabilité pour chacun est calculée ensuite : $\frac{1}{36}$ = 0,027

La maîtresse demande alors de calculer quelle probabilité aura chaque somme de sortie.
Un enfant vient au tableau et écrit :

(*) **Somme**

pour 1 0,027
pour 2 0,027 x 2 = 0,054
pour 3 0,027 x 3 = 0,081
pour 4 0,027 x 4 = 0,108
pour 5 0,027 x 5 = 0,135
pour 6 0,027 x 6 = 0,162
pour 7 0,027 x 5 = 0,135
pour 8 0,027 x 4 ....

Les enfants remarquent que pour 8, 9, 10, 11, l'on retrouvera la même probabilité que pour 4, 3, 2, 1.

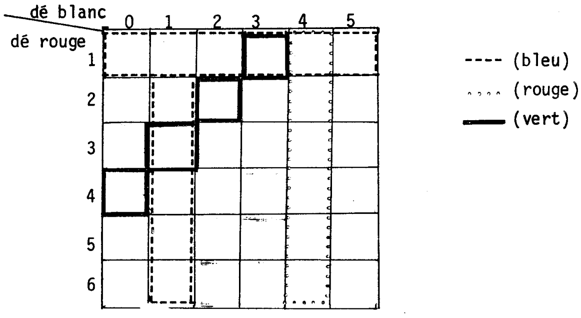
31^{ième} séance :

Cette leçon a eu essentiellement pour objectif de rappeler aux enfants ce qu'ils avaient trouvé au cours de l'expérience précédente :

- jeter les 2 dés, faire la somme
- trouver tous les évènements élémentaires qui peuvent se produire.

a) Représentation des évènements à l'aide d'un tableau

M. : « Tous ces évènements peuvent être représentés à l'aide d'un tableau »
(la maîtresse dessine le tableau ci-dessous). Nous marquerons en tête de colonnes ce que fait le dé rouge et en tête de ligne ce qu’a donné le dé blanc



Si je lance les deux dés, si le dé rouge sort 3 et si le dé blanc sort 4, cet événement est représenté par la case que je marque d'une croix.

Question posée : " il sort 1 avec le dé rouge" ils s'agit d'entourer les cases qui représentent cet évènement. 'C'est un enfant qui vient entourer les cases correspondantes avec une craie de couleur).

Même question pour les évènements :

"il sort 2 avec le dé blanc"

"je tire un 1 etc................

"ça pourrait être en diagonale ! dit un enfant.

On cherche alors un évènement en diagonale. Un enfant vient entourer les cases en vert. Cet ensemble est formé de 4 évènements élémentaires qui sont énumérés par les enfants et écrits sur le tableau par la maîtresse :

(3,1), (2,2), (1,3), (0,4)

A la demande de la maîtresse, un enfant vient entourer les cases représentant les évènements :

"on fait 1 avec les 2 dés"
"on fait 2 avec les 2 dés"
"on fait 3 avec les 2 dés"
"on fait 4 avec les 2 dés"

b) Rappel de la dernière leçon :

Travail individuel

En se reportant aux résultats obtenus au cours de la leçon précédante (tableau *) la maîtresse propose aux enfants de calculer la fréquence théorique de sortir la somme 1, la somme2, la somme 3... sur 344 coups tirés.

Les résultats sont marqués sur le tableau noir :

Somme	**sur 344 coups**
1	0,027 x 344 =
2	0,054 x 344 =
3	0,081 x 344 =
4	0,108 x 344 =
5	0,135 x 344 =
6	0,162 x 344 =
7	0,135 x 344 =
8	0,108 x 344 =
9	
10	
11	

Les derniers résultats ne sont pas marqués par les enfants qui rappellent ce qu'ils avaient trouvé au cours de la leçon précédente: "pour 8 c'est la même chose que pour 4, pour 9, c'est la même chose que pour 3, etc ..."

32ième séance : Avec un icosaèdre

a) Matériel :

5 sacs opaques
10 boules blanches
5 icosaèdres
5 jetons (ou 5 pièces de monnaies)
5 feuilles de papier affiche
1 feuille (tableau récapitulatif)

Les enfants sont répartis en 5 groupes de 4. La maîtresse distribue à chaue groupe le matériel indiqué, à savoir :

- le sac opaque contenant 2 boules blanches et une boule noire
- 1 pièce de monnaie (1 f.)
- 1 icosaèdre
- 1 feuille de papier affiche

b) Consigne

Explication du jeu par la maîtresse : "je jette la pièce de monnaie :
Si elle tombe sur pile, je lance l'icosaèdre,
Si elle tombe sur face, je pioche une boule dans le sac."

La maîtresse demande aux enfants de faire l'arbre des évènements élémentaire sur papier affiche.

c) Déroulement

2ème étape :
Les enfants réalisent par groupe de 4 l'arbre demandé.

3ème étape :
Chaque groupe affiche son arbre au tableau noir. Les enfants comparent et discutent. Après validation de leur travail, les groupes reprennent leur affiche et la maîtresse leur demande de proposer des effectifs théoriques pour chacun des 2 évènements : "il sort pile" "il sort face" et pour chacun des évènements trouvés - et ceci pour 240 tirages.

4ème étape :
Chaque groupe fait 48 tirages pour éprouver son modèle et va écrire son résultat sur un tableau récapitulatif. Les résultats sont cumulés et les enfants comparent avec ce qu'ils ont trouvé.

5ème étape :
Elle a pour but de découvrir le produit des probabilités.

Commentaires sur la 6ième Phase

Cette sixième phase de l'étude est tout à fait classique. Cependant vouloir enseigner en 7 leçons aux élèves de dix ans, le vocabulaire des évènements, la recherche des événements dans d'autres expériences, le calcul de sommes de probabilités, expériences successives et produits de probabilités peut paraître une gageure. Pourtant les exercices furent réussi dans des conditions raisonnables, probablement grâce à la familiarité des concepts de base. Les valeurs avancées comme probabilités pour des raisons implicites de symétrie peuvent toujours être vérifiées par des expériences connues des élèves.
On pourrait s'étonner aujourd'hui de voir des élèves très jeunes utiliser avec efficacité des moyens sémiologiques aussi divers. Il faut simplement signaler qu'à cette époque un effort vraiment important avait été fait pour introduire ces moyens dans l'enseignement élémentaire. Les représentations de type ensembliste (fig. 1), les arbres, les tableaux à double entrée… étaient introduits à diverses occasions et utilisés fréquemment dès l'école primaire, en particulier à l'école Michelet. Mais évidemment si les élèves peuvent utiliser ces moyens d'expression un peu sophistiqués pour exprimer ce qu'ils veulent dire, il n'est pas exigé d'eux qu'ils les produisent à la demande. C'est souvent le professeur qui propose le dessin ou qui rectifie les tentatives incertaines des élèves.

Conclusions

L'expérience relatée ci-dessus était l'une des expériences menées sur le même sujet à la même époque dans notre laboratoire bordelais. A des variantes mineures près, celle-ci a été renouvelée pendant deux années successives avec le même personnel enseignant, chaque fois sur deux classes.

1. Quelles informations avons nous retirées de cette expérience précise?

Elles concernent évidemment les résultats des élèves, mais aussi les difficultés de l'enseignement, les caractéristiques des situations et du processus organisé, les possibilités de réplication de l'expérience, et de développement vers l'enseignement élémentaire. Mais nous avons pu aussi en retirer quelques enseignements sur les conceptions épistémologiques, notamment génétiques (au sens de Piaget), des probabilités et des statistiques et sur les conditions didactiques plus générales concernant la culture et le milieu éducatif

Les effets de l'expérience sur **les élèves** qui y ont participé ont été analysés :

- Les enfants se sont vivement intéressés à un processus assez long (35 séances), les uns parce que les divers défis successifs les tentaient et leur donnaient l'impression de réellement contribuer à des découvertes, les autres, peut être par grégarisme, et parce que le caractère collectif des débats et des activités les impliquaient personnellement dans leurs rapports avec un nombre suffisant de leurs condisciples. Tous se sont déclarés satisfaits par cette activité
- Tous ont pratiqué et appris nombre de connaissances mathématiques de leur niveau, comme la conception et le calcul d'opérations élémentaires notamment des divisions, de pourcentages et de fractions etc. Les résultats de ces élèves aux épreuves classiques de leur niveau se sont révélés très bons.
- Dans les leçons suivantes, l'usage du vocabulaire classique des évènements, le repérage des événements dans des expériences différentes et plus complexes (notamment composées), et la considération de distributions de fréquences sur des systèmes exhaustifs d'événements ont été facilités et ont permis une introduction facile des concepts élémentaires classiques du calcul des probabilités.
- Par contre dans une épreuve spécifique dans laquelle un test d'hypothèse était évoqué dans un environnement « raisonnablement similaire » (pour des mathématiciens) mais sensiblement différent, il s'est avéré que les différences entre ces élèves et ceux d'une classe témoin étaient insignifiantes. Les connaissances acquises sur les cinq premières phases de ce processus particulier ne sont pas transférables à une autre situation de « test d'hypothèse ». Nous reviendrons sur ce point.

Les difficultés de la mise en œuvre de ce processus par **le professeur** sont apparues assez vite.

- La principale vient de l'inquiétude du professeur de ne pas voir se réaliser les événements caractéristiques du processus, c'est-à-dire ceux qui ont été évoqués au cours des préparations, et décrits comme les moteurs de l'évolution de la pensée des enfants. Plus précisément, l'impossibilité dans laquelle il se trouve de provoquer lui-même l'apparition de ces événements, par essence aléatoires. Par exemple la sortie d'une série de 5 blancs dans le sac (4b;1n), au moment où son utilité dans la réflexion des enfants a été évoquée, n'a qu'une chance sur trois de se produire. Mais cet événement a de bonnes chances (presque neuf chances sur 10) de se produire au cours des cinq ou six tirages que prévoit le processus à ce moment là. La présence permanente des chercheurs qui avaient calculé les situations et évalué les risques de réalisations aberrantes s'est révélée presque indispensable pour soulager le professeur de la responsabilité d'une évolution qu'il craignait de voir lui échapper, pour exploiter certaines opportunités et pour expliquer en continu le déroulement des apprentissages. Par contre, il n'a pas été nécessaire de modifier sensiblement le projet d'ensemble. Ce fait montre que la reproduction d'une situation n'est envisageable dans l'enseignement que dans la mesure où le professeur pense pouvoir la diriger et la contrôler. La reproduction passe par la connaissance des conditions de la reproductibilité. Or ici une connaissance même convenable, mais élémentaire, des probabilités en tant que savoir à enseigner ne suffirait pas à l'enseignant pour s'assurer de la reproductibilité du processus[22].

- La deuxième difficulté provient de ce que les conditions habituelles de validation ont changé. Les élèves sont habitués à utiliser des déclarations « déterministes » vérifiables par un calcul ou par une confrontation directe avec une « réalité ». Le professeur lui-même se réfère à ce type de validation dans ses demandes d'explications. Ainsi, le fait de reproduire plusieurs fois la même prise d'information ou le même calcul n'apporte aucune information nouvelle. Si la réplication d'un calcul donne un résultat différent c'est que l'un des résultats au moins est faux. Or, ici, si les rapports statistiques obéissent bien à cette règle – ils décrivent ce qui est – les anticipations obéissent à un « modèle mathématique » très différent, dont la validité s'établit de façon nouvelle. Le but même des leçons est de montrer la façon dont cette validité s'établit. La difficulté est encore plus grande peut-être pour le professeur qui doit lui aussi modifier les bases des validations qui lui sont familières et qu'il exige de ses élèves.
- Une autre difficulté provient de ce que le processus est relativement long. Les enfants – et le maître - peuvent se lasser L'apparition des idées qui relancent la recherche est indispensable au bon moment. Peu importe alors pour l'ensemble des élèves que cette idée soit apportée par **un** élève ou – discrètement et habilement - par **le** maître. Un rythme alerte est essentiel pour ce processus. Plus que l'origine d' une idée nouvelle, ce sont sa pertinence, son adéquation, son utilité directe dans la situation qui assurent son acceptation et sa compréhension de la part des élèves.
- l'enseignante a signalé la nécessité et aussi la difficulté de faire en sorte que les élèves connaissent bien, en permanence, l'histoire du processus, l'objectif et les motivations de l'action en cours, et les conséquences qui ont été tirées des actions passées, afin qu'ils ne s'égarent pas dans le labyrinthe des actions « ordinaires » et parfois fastidieuses telles que les tirages ou les calculs répétés, les représentation diverses etc.

Le déroulement de l'expérience montre que les **situations** sont accessibles aux élèves de cours moyen (9 – 11 ans) et permettent bien les évolutions envisagées : justification des « retirages », étude des distributions de fréquences sur des événements « représentant » les compositions possibles des sacs, apparition puis perfectionnement des critères d'arrêt, la transition des raisonnements déterministes vers les raisonnements probabilistes etc.

Il y a lieu de souligner l'importance de certaines caractéristiques du **processus**

- Le caractère dialectique, c'est-à-dire le fait que chaque activité soit motivée par des résultats de la précédente et entraîne des questions qui engagent la suivante, aurait pu constituer une difficulté. Les enseignants ont plutôt tendance à isoler de petits objectifs d'enseignement qu'ils visent l'un après l'autre, et à essayer de faire en sorte que leurs leçons soient le plus « context free » possible et que l'apprentissage d'une connaissance nouvelle dépende le moins possible des apprentissages antérieurs (sans doute avec l'espoir d'échapper aux perturbations dues aux éventuels échecs anciens). Tel n'a pas été le cas, peut être parce que le déroulement exigeait seulement une mémoire de faits vécus et non

[22] L'étude mathématique de la situation (non didactique) est disponible mais n'entre pas dans le cadre de cet article.

celle de savoirs décontextualisés. Au contraire ce caractère dialectique a permis de maintenir, de soutenir l'intérêt des élèves. La durée du processus et l'habileté du professeur a ménager des périodes d'institutionnalisation et de participation de l'ensemble des élèves ont contribué à maintenir l'intérêt et à permettre le développement d'une « culture » des statistiques faites sur les productions de la « machine ».

- L'augmentation de la rapidité des tirages est indispensable au fur et à mesure que les élèves s'intéressent aux paramètres pertinents. Certes le remplacement des sacs par des bouteilles, puis des bouteilles par un ordinateur ou par des tables de hasard pose des problèmes (pourquoi la composition des sacs serait le seul paramètre déterminant, pourquoi deux sacs de même composition, qui ne donnent visiblement pas les mêmes suites de tirages pourraient-ils être remplacés l'un par l'autre…), mais vraiment pas au moment où ces substitutions indispensables s'effectuent…
- Le rôle des questions sur la disposition de la machine de hasard dans la relance de la dialectique est bien mis en évidence dans le déroulement de l'action. La considération des seuls rapports entre le passé (les statistiques) et l'avenir (les probabilités) d'un système, ne suffit pas. Il faut un lien qui justifie ce rapport. Dans la plupart des expériences didactiques statistiques empiriques, ce lien prend la forme d'une idée : ce qui a été continuera d'être… le modèle est fixe et reproduit quelque chose, malgré l'apparente instabilité des réponses. Mais cette croyance ne repose sur rien tant qu'on n'a pas établi les moyens statistiques de l'éprouver et elle constitue un raisonnement circulaire. Dans le processus étudié ci-dessus le lien physique est parfaitement clair pour les élèves : c'est la composition de la machine. Et ce lien permet de relancer les questions lors des divergences entre les prévisions et les résultats des tirages.

  L'expérience montre à l'évidence que la centration des élèves sur la composition mystérieuse de la machine joue un rôle central dans le processus. Ce dispositif renvoie - du moins dans un premier temps – les éléments de statistiques et de probabilités au rôle de moyens, de connaissances-outils et par là, les justifie beaucoup mieux que comme simples objets d'apprentissage. Les statistiques apparaissent dans ce dispositif comme un instrument pour interroger un fait manifestement déterministe : dénombrer des billes d'une certaine couleur, dans des conditions d'information inhabituelles. Les prévisions sont l'instrument de mise à l'épreuve des observations statistiques et les probabilités l'instrument des modélisations et de la rationalisation des conjectures.

  L'expérience montre donc la nécessité, lors de l'apprentissage, de faire jouer aux machines de hasard, un meilleur rôle que celui qui leur assigné dans les enseignements classiques[23].

Ces réflexions conduisent à interroger l'**épistémologie** classique des probabilités. L'axiomatique de Kolmogov a constitué une « révolution didactique » extraordinaire en permettant de proposer dans un ordre devenu classique, d'abord l'étude mathématique de l'algèbre des événements puis celle de la mesure de probabilité sur cette algèbre, celle des probabilités conditionnelles et de l'indépendance avant de considérer les variables aléatoires et les lois de probabilités. Mais cet ordre s'effectue au prix d'une véritable « falsification épistémologique» lorsque l'enseignant illustre son propos d'exemples concrets.
Il est conduit à interpréter les probabilités en termes de fréquences avant d'avoir établi le théorème de convergence de la fréquence vers la probabilité dans l'expérience de Bernouilli.
Et il justifie les valeurs « raisonnables » qu'il choisit par des considérations de symétrie qui sont de pures spéculations : rien ne distingue dans cette approche un dé pipé d'un dé honnête

[23] Introduire les connaissances par leur fonction dans des décisions, avant d'en faire des objets de formulation ou d'étude est une des alternatives didactiques proposée par la théorie des situations didactiques.

si ce n'est leur comportement stochastique, ce qui prouve bien le caractère artificiel de l'introduction.
Par contre, l'ordre didactique proposé par le processus proposé ci-dessus rétablit une filiation acceptable et donne une fondement raisonnable aux études ultérieures de probabilité.

Il faut remarquer que cette expérience tend à contredire sur certains points, certaines des opinions de Piaget, qui a accordé une valeur épistémologique peut-être excessive (et absolue) à l'organisation des mathématiques de son temps (en particulier à la notion de structure).

L'expérience a eu des retombées inattendues sur nos **connaissances de didactique** à propos des connaissances des élèves. Elles sont apparues lorsqu'il s'est agi d'expliquer l'échec des élèves au test spécifique final. L'interprétation habituelle de ce test conduirait à conclure que les élèves n'ont rien appris sous entendu rien d'utilisable, rien de transférable. En fait c'est le test qui ne mesurait pas ce que les élèves avaient appris. En les interrogeant individuellement il apparaissait qu'ils avaient acquis de nombreuses connaissances, mais que ces connaissances étaient assez étroitement liées à l'histoire qu'ils avaient vécu. Ils ne pouvaient guère montrer ce qu'ils avaient appris qu'avec un interlocuteur qui, ayant lui aussi vécu l'expérience, pouvait aussi comprendre leurs réponses en les complétant ou en les replaçant dans leur contexte. Certaines de ces connaissances, pratiques ou théoriques, avaient donc besoin d'être reprises dans de nouvelles activités pour devenir des « savoirs » avec leurs propriétés culturelles habituelles c'est à dire être détachables, formulables, explicables et utilisables et par conséquent « évaluables » par les moyens classiques
Remarquons d'ailleurs qu'après une expérience où à chaque étape les élèves avaient dû apprendre à ne pas étendre inconsidérément des raisonnements identiques dans des situations similaires, il était assez inconséquent d'attendre qu'ils transfèrent instantanément à un court exemple totalement nouveau, les conclusions qu'ils avaient obtenues dans le contexte longuement étudié d'une expérience particulière. D'autant plus que rien dans l'attitude du professeur n'avait jamais montré qu'il avait l'intention d'institutionnaliser les stratégies élaborées par les élèves comme des savoirs scolaires et universels. Les élèves n'avaient donc aucune raison de « transférer » leurs conclusions. Les professeurs utilisent d'ailleurs d'une façon très excessive l'idée qu'une connaissance acquise dans des circonstances scolaires particulières devrait « s'appliquer » presque automatiquement dans tous les cas que la culture a repéré comme relevant de cette même connaissance. Ce fantasme du « transfert » fait bon marché des difficultés liées au passage des pratiques particulières à des concepts plus généraux et inversement des aménagements et des vérifications nécessaires à l'utilisation d'une idée générale dans un cas particulier. Ces processus, qui prennent parfois des siècles d'efforts à l'humanité, devraient-ils soudain devenir évidents et transparents aux enfants ?
Il reste que cette expérience fut la première à faire ressortir de façon évidente comment une utilisation mécanique et naïve de l'évaluation des savoirs pouvait conduire à la sous évaluation des connaissances acquises par les élèves. Ces connaissances sont pourtant indispensables à la compréhension et à l'usage des savoirs.
Dans le processus long que nous avons observé le nombre et la variété des connaissances mathématiques fréquentées et utilisées par les élèves est considérable. Il est clair que le sens de chacune est limité aux conditions où elle a été utilisée, et qu'une reprise dans un contexte plus didactique est indispensable à des acquisitions durables et vérifiables. C'est l'objet de la phase six, que nous ne décrivons pas ici mais qui a eu pour objet de formuler et d'institutionnaliser avec élèves les savoirs du processus et de les articuler de manière classique. (Cette phase six s'est déroulée quelque temps après le test).
Trop souvent d'ailleurs l'intérêt porté aux phases originales et constructivistes[24] a occulté le rôle pourtant aussi essentiel des phases plus « traditionnelles » d'institutionnalisation et

[24] En particulier dans la littérature pour les professeurs

d’enseignement. Le rôle de ces connaissances encore contextualisées ou implicites dans l’apprentissage est encore minimisé par la parcellisation effrénée des enseignements et des objectifs. Il a fallu un processus long et riche comme celui que nous avons observé pour faire ressortir le phénomène et montrer qu’il est essentiel en didactique de traiter différemment les connaissances des élèves et les savoirs scolaires.

2. Quelles conclusions pouvons nous tirer quant aux projets d’enseignement des probabilités et des statistiques dans la scolarité obligatoire ? quelles possibilités d’application, de développement et de généralisation offre l’expérience ?
L’expérience prouve qu’il est possible d’introduire des éléments de statistiques et de modélisation probabiliste avec des élèves de l’âge indiqué dans certaines conditions précises de façon vivante et significative. Mais il ne peut en aucun cas en être déduit que n’importe quelle méthode permettrait à n’importe quel professeur de faire « apprendre » dans le sens actuel, ce que nous entendons ordinairement comme connaissances (i. e. savoirs) mathématiques des probabilités et des statistiques. C’est à dire comme savoirs utilisables tels quels dans des niveaux scolaires supérieurs.

Il est utile d’inventorier les **difficultés de « développement »** qui pourraient être rencontrées dans le cadre d’inférences pédagogiques fort répandues mais hasardeuses.

L’expérience a créé un milieu limité dans lequel les élèves ont très « naturellement » investi leurs savoirs acquis et ont développé des connaissances « pratiques » variées (qu’il s’agisse de créer un graphe ou de calculer un pourcentage de tirages etc.). Mais n’importe quelle « expérience » de statistique comme celles qu’avaient conduites Tamas VARGA ou Maurice GLAYMAN aurait eu les même résultats. Le propre de cette expérience est d’avoir introduit ces pratiques dans le cadre d’un processus qui les justifie rationnellement et qui remet la responsabilité de leur explication en grande partie aux élèves, pour leur montrer que la compréhension des mathématiques n’est pas une pratique rare, révélée à une élite et diffusée vers une population de béotiens mais une capacité partagée par les humains, une exigence légitime, moyennant des conditions favorables. C’est pourquoi nous pensons que le processus n’est pas remplaçable a priori par n’importe quelle organisation didactique. De pus il n’est pas d’usage dans l’enseignement de préciser la méthode en même temps que les savoirs à enseigner.
De plus les vertus du processus ne sont pas uniquement contenues dans son résultat apparent : l’apprentissage de certains savoirs. La façon de les établir et de les apprendre a des vertus épistémologiques et didactiques spécifiques : un savoir justifié est toujours préférable à un savoir isolé, et une justification par la genèse initiale est un soutien précieux des rationalisations ultérieures. Les élèves ne peuvent pas toujours comprendre qu’ils ont les moyens de comprendre, si l’organisation du processus ne leur apparaît pas comme justifiée et justifiable. Ce travail s’effectue généralement après coup et transforme les causes de l’apprentissage en « raisons de savoirs ». Pour les élèves la méthode est suffisamment « constructiviste » pour fournir la compréhension nécessaire. Mais il ne faudrait pas imaginer qu’elle l’est vraiment. La conduite du processus mobilise de la part du professeur des ressources didactiques nombreuses et variées, d’une importance capitale. Il ne faudrait pas croire qu’il suffit de reproduire les conditions décrites dans ce compte rendu assez superficiel pour obtenir une réplication à l’identique du processus. La reproductibilité constructiviste du processus est, malgré les efforts des concepteurs assez faible. De plus nous avons indiqué que le processus exigerait d’être poursuivi par des activités mathématiques nouvelles qui

utiliseraient dans des activités spécifiques aux niveaux supérieurs les connaissances développées ici.
Pour que la reproduction du processus soit utile il faudrait donc en même temps aménager les enseignements ultérieurs et infléchir les conceptions pédagogiques, didactiques et mathématiques des enseignants. Ce qui ne peut se faire qu'avec le temps et le consentement de l'ensemble de la noosphère dont les idéologies règnent sur nos choix socio-pédagogiques

3. Cette expérience a une certain importance dans l'orientation des recherches en didactique qui se sont déroulées par la suite dans les années 70-90.
Entre autres elle a contribué à faire apparaître le champ de la didactique des mathématiques entre des considérations de didactique générale et des dispositifs tout à fait spécifiques de l'enseignement de connaissances très particulières. Des phénomènes similaires apparaissant dans des processus longs portant sur l'apprentissage de connaissances aussi différentes que les nombres naturels et leurs opérations, les rationnels et les décimaux, les probabilités et les statistiques, le raisonnement logique, la géométrie etc. ont attiré l'attention sur des phénomènes didactiques liés spécifiquement à l'enseignement des mathématiques mais assez généraux. Les principaux concepts de la théorie des situations en sont issus.
Pourtant l'absence de retombées immédiates sur l'enseignement de toutes ces études expérimentales (ou plutôt les contre exemples qu'elles offraient à de nombreuses innovations) ont petit à petit tari l'intérêt qu'elles pouvaient présenter aussi bien pour les chercheurs que pour les enseignants. Aujourd'hui, les enseignants enfermés dans des conditions pédagogiques, sociales, politiques et épistémologiques bien plus étroites et sévères regardent avec nostalgie et peut être un peu de scepticisme les relations des expériences qui étaient possibles dans les années 70 …
Ces travaux pourtant ont gardé toute leur actualité et pourraient donner lieu aujourd'hui à des recherches intéressantes et utiles.