GUY BROUSSEAU

ERREURS, DIFFICULTES, OBSTACLES

1. ERREURS ET DIFFICULTES

Définitions

Une *difficulté* est une condition, un caractère d'une situation qui accroît de façon significative la probabilité de non réponse ou de réponse erronée des sujets actants impliqués dans cette situation. Cet actant peut être un élève, mais aussi le professeur qui peut éprouver une difficulté à obtenir les apprentissages qu'il projette.

Ainsi les difficultés peuvent être observées, soit à travers la répétition des actions d'un même individu dans une situation donnée (avec une variation du caractère incriminé), soit à travers un ensemble de réponses simultanées de groupes de sujets considérés comme suffisamment comparables et soumis aux variantes de la situation.
Les difficultés peuvent concerner les différents évolutions naturelles de la situation : la résolution (effectuation d'une tâche avec la production d'une décision, d'un message, d'un jugement), l'apprentissage d'une connaissance, ou la formation d'une conception.
Il faut remarquer qu'une difficulté est une caractéristique d'un système précis : telle situation proposée dans telles conditions à des actants qui disposent de tel « répertoire » de conceptions, de techniques présente *plus de difficultés* que telle autre proposée dans telles autres conditions à des actants qui disposent de tel autre répertoire.

Difficulté minimale

On peut de ce fait essayer d'évaluer la difficulté d'une situation par l'écart de sa probabilité de réussite avec une certaine « norme ». Laquelle ? Il est clair qu'on ne fait pas et qu'on n'apprend pas de mathématiques si on ne résout pas des problèmes, c'est-à-dire des situations où l'actant doit produire de lui-même une réponse non directement apprise. Si la situation est trop complexe, la probabilité de réussite instantanée est trop faible, il faudra donc consacrer plus de temps à son étude ou abandonner une proportion plus grande de la population à l'échec. A la limite le rendement didactique d'une telle stratégie peut être nul : personne n'a finalement rien appris de ce qui était visé. Si au contraire la situation n'est pas assez complexe, la probabilité de réussite est très élevée, voire égale à 1, mais la situation n'enseigne rien à l'actant, et la durée qu'elle prend néanmoins pour son déroulement n'étant pas nulle, le rendement didactique devient nul. En admettant que la fonction « rendement didactique » est continue (?) nous sommes conduits à penser qu'elle présente un maximum correspondant à une probabilité seuil c'est-à-dire à une difficulté minimale. Si cette probabilité n'est pas trop basse (si la difficulté n'était pas trop grande) les conséquences des apprentissages ultérieurs peuvent alors amener la probabilité de réussite à 1 (les difficultés s'amenuisent et disparaissent).

Les « causes » de difficultés

La recherche des causes de difficultés correspond à une démarche positive en didactique. Si les difficultés ont des causes, en agissant sur ces causes les professeurs devraient pouvoir

rendre plus faciles certaines acquisitions. Mais au lieu d'étudier ces difficultés comme des propriétés du système, peut-être pour pouvoir tirer bénéfice des résultats proposés par diverses sciences (la psychologie par exemple, ou l'épistémologie, ou la pédagogie) il est fréquent de voir incriminer directement soit un des sous-systèmes soit un des infra systèmes (quelques caractéristiques des divers sous-systèmes)
C'est une tendance lourde chez les enseignants et chez les chercheurs. Elle consiste à rapporter « la difficulté », du système à l'un de ses sous systèmes les plus évidents : l'élève, le savoir ou le professeur.
Par exemple : a) les résultats s'effondrent parce que les élèves ne « possèdent » pas dans leur répertoire, et de façon familière, telle connaissance technique technologique ou théorique. Or on le leur a enseigné précédemment, ou du moins on a essayé…le professeur a mal enseigné, l'élève a mal appris, le projet était trop ambitieux. Ainsi la même difficulté peut être imputée aussi bien à l'élève, au professeur ou au savoir lui-même.
b) Mais on pourrait dire aussi : les résultats s'effondrent à cause de tel caractère de la situation (ou de telle condition) qui a rendu « trop » complexe l'exécution d'une tâche pourtant familière. Le rôle du milieu, c'est-à-dire celui des situations – des problèmes ou des dispositifs didactiques - est souvent ignoré ou rabattu sur le savoir lui-même ou sur l'habileté du professeur.

Les difficultés, leur diagnostic et les décisions didactiques

Ces décompositions préparent le « diagnostic » des professeurs et les décisions « automatiques » et instantanées qui lui correspondent : il s'agit d'établir une correspondance entre *difficulté* et *solution.* D'ailleurs il a été montré que les professeurs classent les causes des difficultés par les décisions qu'ils peuvent leur appliquer et les expliquent par des caractères des élèves : ex. <remontrance, inattention, étourderie> < exercice, erreur d'exécution, manque de travail> etc.
Si la situation est « légitimement » complexe (elle n'est pas artificiellement rendue plus complexe que nécessaire) l'entraînement par la répétition de l'exécution des tâches nécessaires « résoudra la difficulté », c'est-à-dire ramènera la probabilité d'erreur dans les limites « acceptables » (c'est-à-dire la fera disparaître, suivant la définition que nous avons donné). Mais alors la difficulté de la tâche pourra se *mesurer* en « temps » ou en efforts d'adaptation.

Modèles réducteurs

De la même manière l'analyse des difficultés se fait souvent à l'aide d'un certain nombre de « rabattements » simplificateur qui sont le résultat d'un certain nombre de phénomènes socio-culturels.

a) L'écrasement du temps sur l'instant : l'enseignement est conçu comme la juxtaposition de « moments » didactiquement indépendants. Le professeur « sans mémoire didactique » enseigne un savoir déterminé supposé accessible à partir des savoirs déjà appris par les élèves sans s'occuper de la façon dont ils l'ont appris, sans s'occuper de terminer les apprentissages antérieurs ni de préparer vraiment les postérieurs.

Le découpage en unités d'enseignement successives et « indépendantes » permet d'éviter l'étude des dépendances entre apprentissages eux même écrasés sur des « pré- requis » et des « résultats évalués » à l'aide d'une psychologie et d'une épistémologie simplistes

b) L'écrasement de l'apprentissage sur le comportement.

Dans ces conditions, l'apprentissage est supposé identiquement présent et son rôle est uniforme dans chaque activité scolaire. Ceci aboutit à un écrasement de l'apprentissage sur le comportement de l'élève. Toute erreur peut être taxée d'échec, tout échec peut être interprété comme l'échec d'un apprentissage. Cette fusion entre comportement et apprentissage n'est limitée par aucune conception raisonnable du modèle « dominant »

c) L'écrasement du processus scolaire sur l'élève.

Le facteur principal est sans doute la centration sur l'élève. Cette centration est probablement issue d'un conception où la connaissance est un bien essentiellement personnel, qui s'acquiert par une activité personnelle, à un rythme personnel, suivant des rites et par des voies largement personnelles, dans des conditions qui ne sont collectives que par nécessité économique. Il existe de nombreuses preuves que cette conception est totalement erronée.

Elle s'est développée sous l'effet d'une idéologie individualiste forcenée et d'une dévotion à l'enfance plus symbolique que réelle (car en même temps que la société clame sa volonté de faire des sacrifices pour ses enfants, on peut observer tous les mécanismes par lesquels elle récupère ces sacrifices au bénéfice d'intérêts qui sont étrangers aux enfants). Cette conception est fondée en fait sur l'importation dans la didactique d'un modèle mercantile : le savoir serait une marchandise que les professeurs devraient distribuer en s'assurant de sa bonne réception et que les élèves thésauriseraient soigneusement pour en tirer des avantages personnels dans la société. Certains sont prêts à s'approprier le savoir (tous les savoirs) et à le redistribuer parcimonieusement en fonction de leurs intérêts financiers.

d) La transparence du rôle du professeur.

La centration sur le comportement de l'élève aboutit à ce que le rôle du professeur n'est pas interrogé in se. Le professeur est supposé à priori qualifié et donc « suffisant », en foi de quoi son rôle réel et technique n'est l'objet d'aucune analyse. Il est de bon ton de déclarer que l'expérience suffit, qu'elle s'acquiert sur le terrain, que la formation professionnelle « théorique » est par conséquent inutile quand elle n'est pas néfaste. Cette idée est répandue, non seulement dans le public, dans l'esprit de ceux qui se piquent de gérer l'éducation, mais aussi parmi les professeurs. Implicitement il est capable d'enseigner Par ce fait, finalement sous entendu en permanence comme insuffisant)

Les difficultés rabattues sur l'élève

Ainsi, finalement, c'est surtout l'élève qui est aujourd'hui le premier et principal lieu de rabattement et support des difficultés.

« Puisque certains réussissent et d'autres non, c'est dans la différence entre les élèves qui explique les différences de résultats et seule une intervention élective (adaptée à chaque élève) peut l'aider ». Il suffit qu'un groupe important d'élèves ait réussi un travail pour que ce travail soit jugé « facile » et par conséquent que les élèves qui ne l'ont pas réussi – quelle qu'en soit la cause - soient jugés « en difficulté ». Il suffit qu'un élève se trouve fréquemment dans cette position pour qu'il soit taxé «d'élève en difficulté ».

Toute la psychologie cognitive ou non vole alors au secours du malheureux, soit pour « expliquer » et au fond justifier ses difficultés soit pour prétendre les résoudre par un jeu d'objurgations aussi pressantes qu'inapplicables en direction des professeurs : il faudrait … un « professeur- psychologue- sociologue- épistémologue- psychiatre ingénieur didacticien et conseiller parental» par enfant.

Ainsi s'opère une subtile transition de la difficulté d'un travail, aux difficultés qu'un élève éprouve à le faire, puis aux élèves en difficulté. L'idée d'un traitement didactique approprié à chaque type de difficulté (donc d'élève en difficulté !) a fait un chemin remarquable. Le moindre écart à une sorte de norme « d'élève moyen » conduit les professeurs à demander l'aide des psychologues scolaires pour « orienter » leurs élèves vers des filières appropriées.

La course à l'individualisation se traduit chez les professeurs par la recherche d'une hypothétique « homogénéité » des classes et les conduit à réclamer sans cesse des diminutions d'effectifs en multipliant les filières.
En conclusion la focalisation sur le moindre des comportements de l'élève est une absurdité malfaisante. Elle réduit de façon drastique le champ des variables dans lequel peuvent s'envisager les actions possibles sur la situation et le processus d'apprentissage et d'enseignement.

La didactique naturelle de Comenius[1] apparaît suffisante pour toutes les matières

> « Il n'existe qu'une seule méthode pour enseigner toutes les sciences : c'est la méthode naturelle, valable aussi bien dans les arts que dans les langues. Les variations qui pourraient exister sont si insignifiantes qu'elles ne sauraient exiger de méthode spécialisée ».

La didactique moderne a tiré les leçons de l'épistémologie génétique et de l'histoire des sciences : Puisque chaque nouvelle découverte exige un cheminement spécifique et des conditions historiques favorables, puisqu'il n'existe aucune méta - science capable d'engendrer une science (et a fortiori toutes) sans entrer dans ses débats et ses méthodes spécifiques, il ne peut en être que de même pour l'appropriation d'un savoir par un sujet : elle exige des circonstances et des démarches spécifiques. De même les erreurs et les difficultés doivent être propre à chaque connaissance envisagée.

Evidemment l'idée que les difficultés seraient spécifiques à chaque exercice et qu'elles pourraient réclamer une intervention didactique elle aussi spécifique n'a rien de séduisant pour les professeurs, ni pour ceux qui trouvent déjà trop longue la préparation scientifique et professionnelle des professeurs. Il en est pourtant ainsi.[2]

2. LES OBSTACLES

Origine

Le phénomène d'obstacle épistémologique a été mis en évidence dans le domaine des sciences (surtout des sciences physiques) par Gaston Bachelard[3], qui pensait que les mathématiques étaient à l'abri de ces phénomènes.

> « En fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas de période d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc la connaissance mathématique. » (op. cité p. 22)

En modifiant légèrement le concept de Bachelard il a été montré que des phénomènes d'obstacles affectaient aussi l'histoire des mathématiques et que de plus il s'en présentait *nécessairement* aussi au cours de l'apprentissage et de l'enseignement[4].

---

[1] la grande didactique » (1643) : Chapitre XIX, problème IV)
[2] A titre d'exemple tout a fait basique permettez moi de vous communiquer une étude sur les difficultés du calcul humain des opérations élémentaires, et sur l'ingénierie didactique que cette étude a suscité. J'ai fait les recherches - dont vous ne voyez ici qu'une partie des résultats - entre 1968 et 1972. (Annexe 1)
Si vous le voulez, nous essayerons d'appliquer les mêmes méthodes pour analyser une partie des difficultés du calcul des intégrales multiples.
[3] G. Bachelard « La formation de l'esprit scientifique » Vrin (1932)
[4] G. Brousseau « les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques » in *La problématique et l'enseignement de la mathématique* Actes de la XXVIIe rencontre de la CIEAEM Louvain la neuve (1976)
Texte repris « Recherches en didactique des mathématiques » ; vol 4.2 p 164-197 (1983)

"Un obstacle (en mathématique) se manifeste par un ensemble de difficultés communes à de nombreux actants (sujets ou institutions), qui partagent « une » conception inappropriée d'une notion mathématique.

En première approche

Voici d'abord une présentation un peu « littéraire de cette notion extraite d'un glossaire pour étudiants. « Cette conception a été établie par une activité et par une adaptation correctes, mais dans des conditions particulières, qui l'ont déformée ou qui en ont limité la portée. Les difficultés créées par cette conception sont liées par des « raisonnements » mais aussi par les nombreuses circonstances où cette conception intervient. Ainsi la conception résiste au simple apprentissage d'une connaissance plus correcte. Les difficultés semblent disparaître, mais elles réapparaissent de façon inattendue~~s~~ et causent des erreurs par des relations insoupçonnées. L'identification et l'inclusion explicite du rejet d'un obstacle dans la nouvelle connaissance sont généralement des conditions nécessaires à son usage correct.
Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement: il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge là. Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif. Par exemple, la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix didactique fait par les encyclopédistes puis par la Convention: compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés à tout le monde le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opération dans les entiers. Ainsi, aujourd'hui, les décimaux sont, pour les élèves, "des entiers naturels avec un changement d'unité", donc des "naturels" (avec une virgule) et des mesures. Les obstacles d'origine épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus. »

Propriétés caractéristiques

Il est important de comprendre les éléments suivants

1. un obstacle n'est pas une absence de connaissances mais au contraire résulte de *connaissances*. Souvent en mathématique un obstacle est une connaissance valide dans un certain domaine non vide, mais c'est une connaissance inadéquate, qui empêche la mise en place ou la compréhension d'une autre connaissance, elle, adéquate.

Exemple la conception du zéro dans les mesures (positives) comme « mesure de "rien" », empêche de comprendre qu'un nombre puisse être "plus petit" que zéro (moins que rien, c'est pas grand-chose, dit l'humoriste). Comprendre et connaître les mesures fait obstacle à la conception de Z dans la mesure où on croit que tous les nombres sont des mesures.
Autre exemple d'obstacle, la conception de <Z, + > comme groupe de mesures relatives (par exemple des gains et des dettes) fait obstacle à la compréhension de < Z, x > (je ne comprends pas comment ces mathématiciens trouvent de l'argent en multipliant des dettes, ironisait Stendhal (un écrivain français célèbre).
2. En tant que "connaissance", un obstacle possède en général un *domaine de validité*, ce qui lui donne un certaine valeur et donne confiance à l'utilisateur, mais ce domaine n'a pas été

repéré par l'actant et il utilise la connaissance obstacle, sans le savoir, hors de son domaine de validité. Ici on pense comme des mesures des nombres qui ne sont plus des mesures.
3. Un obstacle est composé d'un ensemble de connaissances qui s'expliquent, s'appuient, s'épaulent mutuellement, de sorte qu'un *obstacle "résiste" à des contradictions ou à des explications partielles*. Même après qu'on ait repéré dénoncé et rejeté une erreur due à un obstacle, celle-ci peut réapparaître inopinément, à la faveur d'une tâche un peu complexe ou d'une baisse de vigilance, part l'action des parties de l'obstacle non éradiquées.
Par exemple les élèves qui ont bien compris les naturels définissent le produit comme une somme répétée, il "savent" que le produit est plus grand que chacun de ses termes etc. ils apprennent les décimaux dans le prolongement des naturels... Implicitement ils comprennent 14,8 et 9,2 en raisonnant dans les naturels avec 14 et 9. S'ils comprennent qu'avec les valeurs 14 et 9 dans l'énoncé, il faudrait multiplier les deux nombres, ils en déduisent qu'il faut effectuer 14,8 x 9,2 et le produit est effectivement plus grand que ses deux termes. Mais lorsqu'il s'agit de comprendre 0,2 x 0,3 toutes leurs connaissances des naturels les trahissent : il n'y a pas de naturel inducteur, on ne sait pas exprimer ce produit par une addition, le résultat est plus petit que chacun des termes. On peut bien sur faire le grand détour par des produits de mesures décimales avec changements d'unités, ou par le prolongement du système décimal, mais si on n'explicite pas les difficultés et si on ne rejette pas explicitement tous les raisonnements dans N qui sont devenus faux dans D les difficultés renaîtront indéfiniment. Ainsi N pourtant si fondamentalement nécessaire fonctionne comme un obstacle à la construction de Z ou de D.
Ainsi un obstacle ne disparaît pas par petits morceaux, il faut traiter ensemble toutes les difficultés qui le composent
4. Un obstacle didactique ou épistémologique ne disparaît pas ni par l'oubli, ni par l'apprentissage "forcé" de la nouvelle connaissance. C'est l'ensemble de la conception-obstacle qui doit être revue, déclarée fausse, limitée, et opposée à la nouvelle conception à qui elle sert de repoussoir et de fondement à la fois. *Le rejet explicite des connaissances- obstacles fait partie de la nouvelle connaissance.* Le rejet de l'ancienne conception ne peut pas être le résultat d'un simple discrédit, il est un acte fondateur de la nouvelle connaissance
Exemple La construction de Z comme ensemble de translations sur N demande une mise en place explicite de Z et de son dual et à dédoubler aussi les deux semi groupes de N
5. La cause de l'obstacle n'est pas extérieure à la connaissance, elle est dans l'acte même de connaître.

Différences entre obstacles et « simples » difficultés.

Les élèves ont des difficultés à se représenter et à dessiner les objets de R^3 : lignes, surfaces, et solides sur lesquels sont définies les diverses sortes d'intégrales qu'ils ont à calculer. S'agit-il d'un obstacle ? Au sens commun de « ce qui empêche ou retarde une action » vraisemblablement, mais pas au sens que nous avons défini plus haut.
L'absence de visualisation (au sens de Zimmermann- Cunningham, c'est-à-dire de formation d'images (mentales ou avec papier et crayon, ou avec une autre technologie) et l'usage de telles images de façon effective pour la découverte ou la compréhension des mathématiques. est une difficulté au sens indiqué ci-dessus : elle est déterminées par un écart entre une réponse correcte et une mauvaise réponse, et on peut penser qu'un enseignement approprié suffirait à corriger cette erreur. Il faudrait cependant le prouver car il y aurait lieu de s'interroger sur le rôle effectif fonctionnel ou non de cette "visualisation". (Est-ce que la capacité de visualisation est une cause de la compréhension ou sa conséquence ? Ne peut on intégrer que les fonctions que l'on « voit » ?)

Le fait de n’avoir pas travaillé la géométrie au niveau du secondaire constitue-t-il un obstacle didactique à la visualisation, et par conséquent à la possibilité de résoudre des intégrales multiples ? par exemple en les empêchant de construire mentalement les intersections de surfaces dans l’espace ? J'ai des doutes. Il faudrait expliquer et montrer expérimentalement le rôle de la géométrie du secondaire (laquelle ?) dans la conception des solides de l'espace et dans l'usage de la géométrie cartésienne. C'est probablement une difficulté mais pas un obstacle au sens que je vous ai donné plus haut.

Le fait que les élèves ne distinguent pas les différents types de représentations sémiotiques d’une même surface est il un obstacle didactique ? C’et une difficulté, certes, car ce n'est pas si facile dans certains cas, mais ce n’est pas non plus un « obstacle ». Il n’y a aucune connaissance parasite à combattre.

Mais cette visualisation est-elle si nécessaire? Lors de l'enseignement, faire explicitement de la visualisation une condition préalable au traitement mathématique des intégrales multiples ne serait-il pas de nature à constituer un obstacle ?

Parmi les « difficultés » dont nous venons d’esquisser l’étude, certaines sont supposées *isolables* dans le système didactique. Nous entendons par ce terme « isolable » le fait que la difficulté peut être entièrement identifiée et décrite dans une de ses manifestations. Dans une situation précise ou dans un état précis d’une situation elle se manifeste par des indices tous immédiatement observables. En général cette difficulté peut être levée par une action didactique unique et ponctuelle.