(2) *LES ENSEMBLES*

****

DESIGNATION

I - E N S E M B L E S

i) Je me donne un moyen de déclarer quels sont les objets que je prends en considération. Je ne m'occupe pas des autres.

ii) Ensuite, je choisis certains de ces objets : ils constituent un ensemble (qui est lui même un objet mathématique).

iii) - Chacun de ces objets est élément de cet ensemble et ces objets en sont les seuls éléments.

iiii) - Tout objet pris en considération, ou bien est élément de cet ensemble : on dit qu'il appartient à l'ensemble, ou bien n'est pas élément de cet ensemble : il ne lui appartient pas.

Quand on voudra considérer une collection comme un ensemble, être mathématique, abstrait par conséquent, cette collection devra :

a) - Etre déterminée, c'est à dire que tous ses éléments devront être distingués des non-éléments, distingués entre eux et identifiables. Dans les situations que nous considérons ici, on montre un ensemble en montrant tous ses éléments.

b) - Pouvoir être désigné par un nom, une expression, un signe, une position dans l'espace...Comme ses éléments, l'ensemble est un objet mathématique, mais d'un type supérieur, c'est-à-dire qu'aucun objet n'est élément de lui-même.

Ces deux conditions doivent être réalisées ou acceptées comme réalisables.

. Remarque de vocabulaire. En mathématique élémentaire, nous considérons qu'il existe, dans toute étude, des objets que nous nous interdisons de considérer comme des ensembles. Ils sont des atomes de la théorie. Nous les désignons désormais par le mot familier "objet". Les atomes, reconnus comme tels, n'ont pas d'éléments. Il ne peut y avoir entre eux de relation d'appartenance. En particulier aucun objet n'appartient à lui-même.

.../...

·14

Dans nos jeux, si un chien, par exemple, est pris comme objet , (atome) on peut parler de sa tête et de ses oreilles comme des objets mais ce ne sont pas éléments du chien, ils n'appartiennent pas au chien au sens mathématique introduit car cela exigerait de considérer le chien comme un ensemble.

Il est important de noter qu'un ensemble est bien distingué de ceux qu'on pourrait considérer comme pareils, analogues, semblables, mais qui sont autres que lui, comme une autre boite de cubes, un autre paquet de cigarettes de même marque.

II - DESIGNATION D'ENSEMBLES

Il s'agit de mettre en relation des signes que l'on manipule à la place des êtres qu'ils représentent. Nous devrons donc nécessairement considérer quatre termes :

Signifiés	Signifiant
objet autre objet	signe de l'objet autre signe ....
ensemble autre ensemble	signe de l'ensemble autre signe ....

Par exemple, à propos d'un élément

Signifiés	Signifiants (au choix)			
Objet (ce garçon)			a	Paul
ensemble (des enfants)		A	{a,b,c}	{Paul,Emile,Victor}

.../...

15

Encore faut-il reconnaître le code de la représentation, c'est-à-dire savoir :

- Quel est l'objet désigné
- Quel est le répertoire de signes utilisé.
- Quelle correspondance on établit entre eux.

La liste ne suffit pas : Paul, Emile, Victor, n'est-ce pas un seul homme ?

Ce qui est nouveau, par rapport à la simple désignation d'objets vue au chapitre précédent, c'est qu'on veut prendre en considération une relation entre les signifiés; on veut indiquer que certains sont éléments d'un même ensemble. Il faut donc inventer une certaine relation entre les signes -position ou signe nouveau- pour représenter l'appartenance, de a à l'ensemble (par ex. $\{a, b, c\}$) ou pour l'exprimer (par ex. "a est élément de E" ou $a \in E$)

Plus précisément au lieu de continuer à coder directement les ensembles par un signe unique et nouveau chaque fois, comme on l'a fait pour des objets, nous allons nous donner un procédé qui permettra de fabriquer une désignation de l'ensemble utilisant un codage direct des seuls éléments.

Nous allons commencer à examiner 3 types de codes suivant que le répertoire comportera les signes ou les lettres d'une écriture formalisée, ou des dessins et des schémas, ou les mots du langage usuel.

1°) - Ecriture formalisée

Pour l'ensemble dont les éléments sont désignés par les lettres a, b, c, d, la désignation $\{a, b, c, d\}$ est très officielle ; c'est une liste dont le début et la fin sont indiqués par des accolades et où les noms d'objets sont séparés par des virgules. (Accolades et virgules sont des signes dénués de signification dans la théorie, ils ne désignent pas des objets, ils jouent un rôle grammatical).

Une lettre désigne toujours un objet unique, toujours le même, mais elle peut être écrite plusieurs fois. Ainsi

$\{a, a, a, b, d, c, d\}$ désigne le même ensemble que $\{a, b, c, d\}$

et la répétition d'un signe n'indique pas qu'il y a plusieurs objets.

.../...

Par contre, il peut arriver que le même objet soit désigné par plusieurs signes différents. On pourra avoir désigné un même objet par "a" et par "b" par exemple ; dans ce cas, {a , b , c} est le même ensemble que {a, c} et que {b, c}

Avec les enfants, nous éviterons au début cette difficulté en utilisant des codes où un objet n'a qu'un seul signe et en ne mélangeant pas ces codes mais cette simplicité ne pourra pas être conservée longtemps.

Remarquons que nous trouvons ces deux sortes d'ambiguïté dans l'expression par le dessin et par le langage (que nous étudions plus bas). Dans le charmant conte de Kipling. Taffy explique son dessin : "Il n'y a pas des tas de harpons. Il n'y en a qu'un. Je l'ai dessiné trois fois pour être plus sûre". De même si je m'exclame "mon chapeau, vite, mon chapeau ! mon chapeau s'il vous plaît !" je ne réclame pas trois chapeaux ; j'ai fait trois appels pour un chapeau.

On emploie plusieurs codes si l'on appelle un même enfant en disant "Suzette, viens ma chérie, m'entends-tu vilaine fille ?"

2°) - <u>Dessins et schémas</u>

Les conventions sont plus variées et la liberté plus grande en apparence, pourvu que le dessin soit expressif et sans ambiguïté.

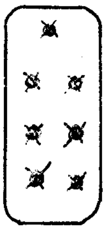
a) - <u>Tracé d'une corde</u>. Il est courant d'employer une ligne (ou corde) qui tracée autour des objets, constitue un contour fermé. Elle détermine sur la feuille un intérieur et un extérieur. Etre élément de l'ensemble est signifié par "être à l'intérieur de la corde".

Cette représentation est assez bien comprise par les enfants dans le cas où la "corde" détermine une région simple : connexe (d'un seul tenant) et grossièrement convexe (sans creux ni trous). Mais elle présente des inconvénients.

Nous verrons d'abord qu'elle ne permet pas la représentation de certaines relations entre ensembles (inclusion voir ch.7) ni de certaines opérations sur les ensembles (intersection voir ch. 7)

Ensuite, même dans les cas simples, elle fait appel à un sens de l'espace et de la topologie du plan que l'enfant ne maîtrise pas apparemment beaucoup mieux et qui n'est pas plus simple que le sens de la relation elle-même.

Si la topologie du plan doit avoir été, auparavant étudiée pour elle-même, son utilisation, pour parler des ensembles, n'éclairera pas grand chose et des confusions sont à craindre.



Par contre, la disposition relative des objets, si elle ne change pas dans le temps, peut alors permettre d'économiser un code pour leur désignation. Ainsi le dessin ci-contre, s'il s'agit d'un groupe d'enfants, peut permettre de reconnaître qui est représenté par chaque point, si les enfants sont disposés de la même façon.

Ce codage suppose que l'enfant reconnaît les positions relatives et leur représentation conventionnelle, qu'il sache que chaque objet n'est représenté qu'une seule fois, et qu'ils y sont tous. Il nous paraît impossible d'utiliser avec les enfants une représentation d'un ensemble par une région sans le dessin des éléments à l'intérieur.

b) - <u>Pointage</u>.

Spontanément, des enfants qui choisissent des objets l'indiquent sur le dessin par un pointage; par exemple ils le colorent en rouge où ils mettent une croix dessus. Cela revient à choisir un signe pour l'ensemble (le rouge, ou la croix) et à indiquer près de chaque signe représentant un objet son appartenance ou non à l'ensemble. Il faut évidemment que les signes d'objets et les signes d'ensembles ne puissent pas être confondus.

c) - <u>Liens</u>.

Pour montrer que les objets qu'ils choisissent forment un ensemble, les enfants, très souvent, les lient par des traits, des liens. De même des objets deviennent inséparables quand ils sont attachés à la même ficelle.

Cette représentation est excellente mais ne suggère pas un signe propre pour désigner l'ensemble.

.../...

3°) - Langue usuelle

Elle permet de désigner les objets, les ensembles d'objets et leurs relations. Nous pouvons utiliser des substantifs (élément, objet, atome - collection, ensemble, classe, groupe, groupement, tas, amas...), des attributs (cet objet est rouge), des substantifs employés comme attributs (Socrate est un homme), des verbes (être, avoir, posséder)..).

La langue, utilisée et comprise par tous par la fréquence de son emploi et son universalité, apparaît à première vue comme l'instrument privilégié.

a) - D'abord, elle est ambiguë, polysémique ; les mots, les expressions ont plusieurs significations : Jean a acheté ce chien, il lui appartient ; il appartient à une certaine espèce de caniche...

Pour utiliser le langage dans une étude scientifique, il faut préciser le sens des termes, les définir, s'imposer des restrictions dans le choix des mots, dans l'usage de synonymes, dans les expressions où ces mots figurent. Ces subtilités échappent à l'enfant. Alors qu'il commence l'apprentissage des phrases courantes, il ne peut éviter les fautes qu'elles suggèrent.

b) - De plus, la langue est soumise à une syntaxe propre qui allonge, complique et résiste même au choix qu'exigerait une expression commode et correcte des relations mathématiques. Nous croyons devoir refuser la construction spéciale d'expressions qui n'appartiennent ni à la langue de la mathématique ni à la langue française. (Je veux un ballon non rouge, fais l'ensemble des non-carrés rouges...)

c) - Enfin, la langue est chargée d'affectivité. Les mots, comme les dessins figuratifs, évoquent si bien les objets qu'il est difficile de les considérer comme de simples signes. (Une enfant ne pouvait faire un exercice au sujet d'autos parce que ce mot évoquait pour elle les malaises dans la voiture !).

La théorie des ensembles est la codification de règles qui ne dépendent ni de la nature des objets ni du mode de désignation ou de représentation. C'est pourquoi c'est l'outil privilégié de toute mathématisation.

.../...

4°) - L'objet, le signe, le signe du signe,...

Il est interdit de traiter, dans une étude déterminée, le signe d'un objet comme un objet

a) - Confondre un objet et son nom serait, par exemple, accepter la phrase : "Voici mon fils Paul, il a quatre lettres".

L'écriture,en français, a un signe spécial, le guillemet, pour différencier le nom de l'objet du signe du nom de l'objet.

Voyez la différence entre les phrases : j'entends mon père. J'entends "mon père" (quelqu'un a parlé).

Etudions de même ces affirmations, toutes exactes : dix est un nombre pair ; "dix" a trois lettres ; "10" a deux chiffres. Le nombre que nous écrivons 10 en numération à base dix s'écrit 1010 en numération à base deux.

b) - Si l'on choisit, non l'expression verbale mais l'expression par un dessin, des risques de confusion sont aussi inévitables : il faut en effet considérer non pas les dessins eux-mêmes mais les objets que ces dessins désignent, qui doivent être exhibés avec le dessin. La théorie des dessins, des schémas ou diagrammes est autre que la théorie des ensembles. Il faudra donc préciser des conventions à respecter pour traduire par des dessins une étude des ensembles.

Dans le cas du dessin, nous n'avons pas l'analogue du guillemet. L'écriture distingue chien et "chien", mais il est plus difficile de distinguer le dessin d'un chien destiné à être signe du chien du même dessin étudié en tant que dessin. Si le dessin est brun, faut-il interpréter que le chien est brun ? Oui, dans un tableau en couleur mais non dans une illustration qui ne présente que des nuances de noir.

II - *DEFINITIONS D'UN ENSEMBLE*

La désignation d'un ensemble consiste en l'attribution d'un signe à cet ensemble, signe figurant dans le répertoire.

.../...

20

La définition d'un ensemble est la construction d'un nouveau signe par assemblage des signes (ou des mots) du répertoire suivant certaines règles.

1°) - Définition en extension.

Les règles qui supposent que l'on exhibe, que l'on montre tous les éléments l'un après l'autre s'appellent définition en extension : une telle définition est donc une liste de signes, mais où l'ordre des signes n'est pas signifiant (il n'importe pas).

2°) - Définition en compréhension

a) - Ce sont les autres procédés : on dispose d'un discours que l'on prétend comprendre et dont on peut déclarer s'il est vrai ou faux. On appelle un tel discours : une proposition (un énoncé clos)

Exemple : "Mon crayon est rouge". Nommons P cette proposition.

b) - Si ce discours est écrit dans la langue usuelle ou dans une langue mathématique, il y figure des substantifs, des noms, c'est-à-dire des signes d'un objet ou d'un ensemble. Enlevant de ce discours un de ces mots (désignation d'un objet déterminé) partout où il figure, la proposition P donne :

"....est rouge", ou x est rouge.

Ce nouveau discours se nomme un prédicat, désignons le par P(x)

Considérons maintenant les noms des objets du référentiel* et substituons-les, l'un après l'autre, au mot enlevé. Nous imposons les deux contraintes :

- Obtenir chaque fois un discours pertinent
- Pouvoir déclarer s'il est vrai ou faux.

Nous conservons les propositions obtenues et celles-la seulement.

Exemples : "Mon stylo est rouge". Je vois que c'est vrai. Je garde cette proposition.

"Mon couteau est rouge". Je vois que c'est faux. Je garde cette proposition.

* Référentiel : Ensemble de tous les objets que je prends en considération au cours d'une étude.

.../...

"L'auto qui va passer est rouge". Je ne sais pas si c'est vrai ou faux : proposition rejetée. "L'auto qui va passer" ne figure pas dans mon référentiel.

"Ma santé est rouge". Non pertinent : proposition rejetée : ma santé est exclue du référentiel.

c) - Tous les objets qui rendent le discours vrai constituent un ensemble : l'ensemble des x tels que "x est rouge" est vrai. Cet ensemble est dit défini en compréhension. On l'écrit

$\{x : P(x)\}$ ou $\{x / P(x)\}$ se lit "ensemble des x tels que P de x

De même évidemment, l'ensemble des x pour lesquels la réponse est non, P est faux est aussi défini par là-même.

3°) - Conclusion.

Un ensemble étant défini, dans les cas élémentaires que nous considérons où les ensembles n'ont qu'un petit nombre d'éléments, nous pouvons conclure en donnant la liste complète des phrases.

$x \in E$ (x est élément de E), $y \in E$, $z \in E$, $t \in E$,

et écrire le signe de l'ensemble $\{x, y, z, t\}$

- PROCEDE PEDAGOGIQUE

Exemples d'introduction de la notion d'ensembles.

Nous présentons des expériences poursuivies principalement au cours préparatoire. Sous une forme allégée elles permettent une première initiation à l'école maternelle.

1°) - Désignation d'un ensemble à l'aide de différents codes.

Il s'agit d'introduire des ensembles en tant qu'objets mathématiques en leur attribuant un signe, comme à tout autre objet.

Nous allons utiliser le procédé, maintenant familier aux enfants, de la désignation pour présenter sans phrases ce que nous appelons ensemble : c'est la chose désignée par ces signes, (lorsque ces signes obéissent aux règles de manipulation que nous allons définir plus loin et qui constituent la théorie des ensembles chapitre 7)

.../...

a) - Désignation par un signe unique et par un dessin.

Nous jouons au jeu de la marchande mais chaque boîte contient un ensemble d'objets (distingables).

Le code -ou catalogue- affiché au tableau comporte le dessin de chaque ensemble d'objets associé à un signe unique ; ce signe est reproduit bien sûr sur l'étiquette de la boîte.

Comme dans le jeu de la marchande, les acheteurs choisissent un ensemble qu'ils désirent et ils le demandent à l'aide de son signe à la vendeuse qui ne voit pas le catalogue.

Bien sûr il faut ici que le dessin de l'ensemble soit directement interprété par l'enfant de même que le dessin de l'objet devait l'être précédemment.

b) - Constitution d'ensembles et dessins d'après un code

Les enfants doivent maintenant examiner divers objets et déclarer pour chacun s'il figure ou non dans l'ensemble décrit par un dessin, ou encore ils doivent dessiner un ensemble d'objets présentés, par exemple en vue de fabriquer un code.

Les enfants, par groupes, jouent le rôle de la marchande. Ils doivent choisir des objets qu'ils veulent vendre, les placer dans les boîtes et dessiner le catalogue, attribuant un signe à chaque boîte.

La représentation d'un ensemble par un trait entourant les dessins d'objets s'introduit et n'a pas à être expliquée.

La vérification se fait par les enfants eux-mêmes : chaque groupe devient à son tour acheteur d'un autre goupe et contrôle, par l'usage, l'exactitude du code.

Variante : le code est donné, former les boîtes.

Remarque : l'étude des raisons que l'on peut avoir de grouper certains objets dans les boîtes : usage, convenance, nature, couleur... ne constituent pas l'objet de la leçon.

.../...

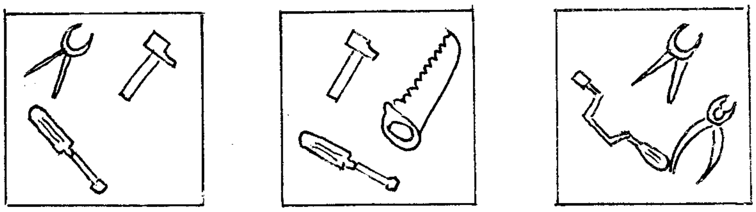
23

c) - <u>Considération d'ensembles non disjoints</u>

Jusque là les ensembles considérés étaient nécessairement disjoints puisqu'ils étaient constitués d'objets placés dans des boîtes. (C'est-à-dire qu'aucun élément figurant dans l'ensemble désigné par A ne pouvait figurer dans celui, différent, désigné par B).

V-

Nous allons jouer au magasinier : chaque enfant peut venir, comme au jeu de la marchande, demander un ensemble d'outils ou de pièces pour jouer, puis il les rapporte. Mais ces outils sont disposés en vrac sur une table. Le code comporte des dessins d'ensembles non disjoints. Par exemple :



Si deux enfants se présentent en même temps pour emprunter A et B, ils se disputent un ensemble d'objets que nous pouvons dès maintenant noter $A \cap B$ et que nous nommerons plus tard intersection de A et B (chapitre 7)

2°) - <u>Définition (en extension) d'un ensemble.</u>

Recommençons le jeu de la marchande.

a) - Les boîtes contiennent à nouveau des objets seuls et le code proposé associe un signe à chaque objet seul. L'ensemble qu'il faut se procurer est dessiné sur un papier qui est remis au groupe acheteur.

Le seul message qui puisse indiquer au vendeur ce qu'il doit livrer est donc <u>une liste</u> écrite en utilisant le code.

b) - Les enfants ont tôt fait d'inventer le message ad-hoc. Le vendeur rassemble des objets en un paquet. La liste définit la constitution du paquet.

.../...

c) - Le maître propose alors d'indiquer qu'il s'agit d'une liste à l'aide de l'écriture en ligne choisie par les mathématiciens entre 2 accolades.

Exemple : { a , b , c , d }

V- *POINT DE VUE PEDAGOGIQUE*

Reprenons sous une forme plus familière la plupart des idées importantes qui précèdent, en pensant à la vie de nos classes.

1°) - L'accès à l'étude ensembliste

Les thèmes de vie introduisent en général des collections mal définies : ainsi l'ensemble des verres que je possède comprend-il le grand verre de cristal où je mets des fleurs ? Au sujet d'une situation imprécise, aucune logique n'est applicable ; évitons alors de prononcer des mots techniques pour donner l'illusion que nous utilisons la théorie des ensembles. Ce serait un pédantisme ridicule et dangereux. Pour mathématiser une situation, il faut la délimiter et la préciser.

La détermintation, la création d'ensembles au moyen des phrases de la langue habituelle est fort difficile et souvent ambiguë. Le langage, et surtout la langage enfantin, est plus apte à désigner qu'à définir, aussi la démarche préconisée est-elle : montrer, puis désigner, observer, étudier et finalement, dans certains cas favorables, quand la conception est suffisamment claire et le langage maîtrisé, définir si l'on peut.

L'accès direct au symbolisme et au langage des ensembles permet de représenter d'abord la situation mathématique, puis d'acquérir progressivement la langage logique nécessaire à un exposé précis et coordonné. Procéder suivant la marche inverse à partir du langage, compromet l'emploi de l'outil de précision qu'est la théorie des ensembles par un élargissement vague et arbitraire du sens des mots et symboles, ce qui mène à l'acceptation d'ambiguïtés regrettables.

.../...

Notons aussi qu'utiliser une langue artificielle, faussement enfantine, d'inspiration logique (opposer "un bon" à "un non bon" par exemple), ne peut être bénéfique. On a même écrit : l'ensemble orangeade !

Bien au contraire, on est frappé de voir comme les jeunes enfants manient aisément des symboles qu'ils ont choisis et acceptés. L'acte de désigner est simple, spontané dans la vie en société, les signes sont faciles à reproduire et à reconnaître.

Naturellement, au fur et à mesure que la langue est maîtrisée et devient un outil utilisable, les situations peuvent être introduites verbalement. Tant que l'expression verbale fait défaut, le test de bonne compréhension et de validité du langage est la possibilité de traduction en schémas et représentations ensemblistes, voire en réactions motrices par exemple.

2°) - <u>Le départ</u>

Nous n'avons pas à expliquer aux enfants ce qu'est un ensemble en général et, encore moins, à le définir. La notion d'ensemble ne se définit pas, nous la prenons comme terme primitif.

Du point de vue matériel,il n'y a pas de différence entre l'ensemble et tous ses éléments. C'est nous qui changeons de langage parce que nous changeons de pensée. La forêt est-elle l'ensemble des arbres ? Oui, dans la phrase : la forêt ne comprend que des chênes ; non, dans la phrase : la forêt est sombre. En créant un ensemble, le mathématicien et le logicien créent un être abstrait, d'un type nouveau. Nous avons vu qu'il est bon de le représenter par un signe de type différent de ceux qu'on adopte pour les éléments.

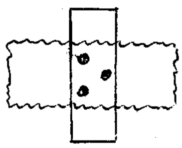
Au niveau des dessins, pour montrer (sans explications verbales) que nous pensons à l'ensemble, nous entourons les dessins des objets par un trait, ligne fermée qui rappelle la corde ou la boîte qui entoure les objets. Ainsi, ce trait caractérise, au niveau des dessins, la relation d'appartenance sans qu'il soit nécessaire d'introduire un autre symbole.

C'est faire un appel implicite aux notions de topologie du plan; ce qui introduit "régions" et leurs "frontières", intérieur et extérieur. Ceci est souvent commode, parfois dangereux.

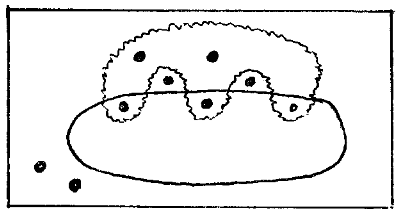
.../...

En tout cas, une faute (trop souvent faite par les maîtres) consisterait à confondre la région réservée aux dessins des objets et l'ensemble de ces objets, à confondre le trait, symbole de l'ensemble, avec la frontière de la région, être géométrique aux propriétés topologiques étrangères à la question : c'est toujours confondre le signe et l'objet choisi comme signe.

Exemples :



Un ou deux ensembles ?



La représentation de $A \cap B$ est-elle une région comme celle que nous avons introduites ?

3°) - Introduction d'une étude ensembliste

Une équipe d'élèves organise un jeu : des animaux, des objets nous intéressent... des ensembles vont donc apparaître.

Pour une initiation aux notions ensemblistes, il ne faut pas choisir une situation où l'ensemble à étudier puisse être facilement défini verbalement, soit par des noms, soit par une caractéristique évidente. Une situation trop simple et claire ne donne lieu à aucune activité mentale, à aucun problème. Elle ne permet pas un apprentissage.

Pour la désignation, on choisira les mots les plus commodes, les signes simples et variés, pourvu qu'il y ait accord sur les êtres désignés (par exemple "nos quatre amis" peut être une désignation satisfaisante dans une certaine situation connue). Un exemple de désignation difficile et demandant un effort fructueux est celui où l'on choisit arbitrairement l'ensemble dans un ensemble plus riche (c'est-à-dire un ensemble inclus dans un référentiel donné), sans aucune justification, la détermination résultant seulement de mon geste (j'ai montré des objets, j'ai dessiné un trait autour des dessins choisis).

.../...

Comment l'équipe qui a vu ou fait le geste, peut-elle transmettre l'indication à l'équipe qui n'a pas vu ? De même, il est souvent utile, pour faire sentir la nécessité de préciser, d'introduire simultanément plusieurs ensembles à bien distinguer. On fabriquera des messages oraux ou écrits.

Nous pourrons ainsi travailler avec une bonne motivation à la désignation d'un ensemble, exhiber cet ensemble, contrôler la liste de ses éléments. Le procédé intéresse les enfants de façon évidente et les conteurs l'ont très souvent utilisé.

Les cas où les situations favorables se présentent sont innombrables : contes bien choisis, nimes , gymnastique, jeux divers du genre scout, jeu de Kim (du nom du jeune héros de Kipling, entraîné à reconstituer un ensemble d'objets vus un court instant) (cf ch. 10).

4°) - <u>La mise en oeuvre des notions</u>

a) - Un premier sujet d'intérêt est la <u>possibilité de représenter ou désigner un même ensemble plusieurs fois</u>, en divers lieux, en divers instants (ce qui distingue bien la collection de ses représentations ensemblistes), de même que l'on peut désigner plusieurs fois et de plusieurs façons un objet-élément. Si plusieurs ensembles interviennent, des comparaisons s'imposent.

b) - <u>Pour identifier les signes correspondant à un même élément</u> d'un même ensemble, il faut se souvenir des conventions faites. On s'aperçoit, en particulier, qu'un même objet peut-être élément de plusieurs ensembles (ce qui ne peut, en général, pas se matérialiser dans des collections, sans destruction de ces collections). Ainsi deux ensembles peuvent avoir ou non des éléments communs.

Les travaux proposés sont les suivants : reconstituer un ensemble d'après son dessin, constituer l'ensemble des signes associés aux objets d'un ensemble, reconnaître que plusieurs dessins représentent ou non le même ensemble etc...

.../...

Les leçons relatives à l'égalité de représentations d'ensembles mettent en jeu une suite de techniques : soient "A" et "B" deux représentations à comparer ; il faut, pour un signe dessiné dans "A", se référer à la liste des éléments, puis revenir à son signe dans "B". Il se peut que le même signe soit dans "A" et dans "B", mais aussi que le signe de l'élément ne soit pas le même dans "A" et dans "B". Il se peut aussi que l'élément en question ne soit pas figuré dans "B"; dans ce dernier cas, les ensembles désignés par A et B ne sont pas égaux: "A" et "B" ne désignent pas le même ensemble.

Mais cette vérification doit être poursuivie pour tous les éléments de A ; puis il faut encore savoir si l'on a ainsi atteint tous les éléments de B. On voit donc comme il est commode de marquer d'un signe (pointer, souligner...) les éléments de B au fur et à mesure qu'on les obtient. Il est intéressant de matérialiser l'égalité des signes par des liens joignant chaque signe de A à son associé dans B. (Ceci introduit déjà une conception, ch. 9 soit de A sur B, soit d'une partie de A sur une partie de B dans le cas où A n'est pas égal à B).