

Université de Montréal

Guy Brousseau

La théorie des situations didactiques

Préambule

J'éprouve une grande émotion et une grande joie à présenter devant vous, aujourd'hui, une synthèse des travaux que j'ai menés depuis plus de trente ans, avec de nombreux collègues, pour l'avancement d'une science du didactique.

Je suis reconnaissant tout d'abord à Gisèle Lemoyne et à Jean Portugais, qui ont déployé une énergie considérable pour organiser ces journées, d'avoir compris à quel point *tous* les acteurs de l'aventure étaient importants. Ils ont fait l'impossible pour permettre à une partie représentative d'entre eux de participer à ce colloque.

En effet, mieux qu'une simple communication de résultats, nous allons essayer de réussir un échange de "culture". Car, les théories, les méthodes, les expériences et les pratiques de la recherche sont des produits "décontextualisés" d'une activité humaine, ou plutôt d'une activités d'humains, et elles n'en montrent pas complètement la richesse. Je suppose que la théorie des situations a contribué à vous convaincre, chers amis, que la participation aux mêmes situations

est un moyen nécessaire à la diffusion des connaissances.

C'est pourquoi je suis très heureux de retrouver ici la présence amicale et chaleureuse des amis, ceux du Québec comme ceux de France, de Suisse et d'ailleurs, qui pour certains depuis si longtemps, ont accompagné et enrichi mes réflexions de leurs travaux. Ils ont délaissé un peu des tâches souvent lourdes pour venir aujourd'hui m'aider à vous rencontrer.

Ma pensée va vers ceux qui n'ont pas pu venir et particulièrement à tous les enseignants qui depuis vingt cinq ans ont travaillé avec nous à l'école pour l'observation Jules Michelet de Talence. Leur indispensable collaboration, leur travail, leur dévouement à la tâche commune ont joué un rôle très important qui apparaîtra ici un peu grâce à la présence de Nadine Labesque et de Marie Hélène Salin.

Mon émotion vient aussi de ce que le Québec a joué un rôle des plus importants dans l'émergence de la didactique.

En me bornant à mon rapport personnel, je suis venu au Québec pour la première fois en 1971. C'était ma première invitation dans une université "étrangère", elle émanait de Lilianne Bulota.

J'ai vu que le terme, alors fort péjoratif en Europe, de "didactique" était remis ici en usage et en honneur. Il était utilisé pour désigner l'activité des "ingénieurs" qui produisent les matériels spécifiques (fiches, jeux, logiciels, manuels, objectifs, curriculum...) nécessaires aux enseignants et à leurs laboratoires de mathématiques.

A cette occasion, que j'ai pu enfin rencontrer Zoltan Diénès, le précurseur "sur" et "contre" lequel j'avais construit mes recherches depuis dix ans, ainsi que Dieter Lunkenbeim qui commença sa conversion quelque temps après. La confrontation me donna beaucoup de courage pour persévérer.

Trois ans plus tard, en France, nous avons repris ce terme pour l'étendre à des travaux plus théoriques d'"épistémologie expérimentale". Aujourd'hui, la didactique des mathématiques désigne l'étude scientifique des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques entre les hommes ou les institutions humaines.

Par la suite, les didacticiens français et québécois n'ont pas cessé d'échanger leurs résultats et de coopérer, malgré quelques divergences dues aux différences, entre les deux pays, des structures universitaires dans la formation des professeurs. Je me garderai bien d'en nommer quelques uns, même très proches, de peur d'en oublier.

C'est pourquoi j'ai finalement l'impression, aujourd'hui, de renvoyer une balle, par dessus l'Atlantique, dans la direction d'où je l'ai reçue.

Le présent colloque est le couronnement de l'action opiniâtre d'une petite équipe qui oeuvre ici depuis plusieurs années. Je tiens à les saluer et à les remercier ainsi que tous ceux qui les ont aidés. Je sais que nous trouverons ensemble beaucoup d'occasions d'apprendre et de réfléchir. Je suis sûr que les échanges seront aussi riches que l'espèrent les

organisateur, et que nous y prendrons les raisons de continuer une coopération fructueuse et agréable.

A- La modélisation des situations à usage didactique

1. Les situations

Définitions

a) Une situation est l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu. Prendre comme objet d'études les circonstances qui président à la diffusion et à l'acquisition des connaissances conduit donc à s'intéresser aux situations. Les situations didactiques sont, dans la langue française, des situations qui servent à enseigner.

Deux points de vue s'opposent alors :

Selon le premier, la situation est l'environnement de l'élève mis en oeuvre et manipulé par l'enseignant ou l'éducateur qui la considère comme un outil.

Selon le second, qui sera étudié dans la partie B de ce texte, la situation didactique est l'environnement tout entier de l'élève, l'enseignant et le système éducatif lui-même y compris.

b) Dans un premier temps, conformément à l'usage de l'époque, j'ai adopté le premier point de vue. Une personne qui veut enseigner une connaissance déterminée fait généralement appel à des "moyens",

la didactique étudie et produit ces moyens.

Considérons un dispositif mis en oeuvre par une personne qui veut enseigner une connaissance ou contrôler son acquisition. Ce dispositif comprend un *milieu* matériel : les pièces d'un jeu, une épreuve, un problème, voire un exercice, une fiche etc. et les règles d'interactions de l'apprenant avec ce dispositif : le jeu proprement dit. Mais seuls le fonctionnement et le déroulement effectif du dispositif, les parties effectivement jouées, la résolution du problème etc., peuvent produire un effet d'enseignement. Certains piagetiens montraient une grande ingéniosité dans l'invention de tels dispositifs, mais ils ne les étudiaient pas. Quelles relations à quels objets sont-elles caractéristiques des diverses connaissances mathématiques ? Quelles propriétés doivent présenter les situations qui provoquent et permettent les adaptations spécifiques à chacune ?

c) Pour répondre à des questions de ce type il faut inclure dans l'analyse, l'étude de l'évolution de la situation car l'apprentissage est supposé s'accomplir par une adaptation "spontanée" de l'apprenant au milieu créé par cette situation, qu'il y ait eu ou non intervention d'un enseignant au cours du processus.

idées fondatrices

a) La première idée fondatrice est très répandue : les connaissances se manifestent essentiellement comme des instruments de contrôle (des dispositifs donc) des situations. De là au projet de modéliser ces

situations et de les inventorier il n'y a qu'un pas ... dont il vaut mieux toutefois ignorer provisoirement l'ambition car modéliser les situations qui font utiliser ou découvrir les connaissances aux hommes, revient à vouloir modéliser non seulement le monde - le monde réel et le monde des idées - mais aussi son histoire (vaste programme !).

b) Les modèles doivent alors être envisagés sous deux formes qu'il s'agit de faire "coïncider":

- comme nécessité théorique, déduite du savoir lui-même, et d'un fonctionnement minimal supposé de l'élève,

- comme représentation des situations réelles, didactiques ou non, où la connaissance devrait "se déduire" des décisions et des comportements du sujet.

c) Ces modèles doivent présenter des variantes et des variables. On peut alors chercher par des moyens mathématiques et expérimentaux, quelles valeurs de ces variables peuvent déterminer les conditions optimales de diffusion de connaissances déterminées, ou expliquer celles qui apparaissent comme réponse (théoriquement) optimale aux conditions proposées à l'élève. Pour des valeurs données de ces variables il existe au moins une stratégie optimale (du point de vue de son coût de mise en oeuvre, de sa fiabilité, de son coût d'apprentissage...) et une ou des connaissances qui lui correspondent. Nous appelons *variable cognitive*, une variable de la situation telle que par le choix de valeurs différentes on peut provoquer des changements de la connaissance optimale. Les *variables didactiques* seront parmi les

variables cognitives celles qui peuvent être fixées par l'enseignant.

Dans cette perspective les élèves deviennent simplement les révélateurs des caractéristiques des situations auxquelles ils réagissent. (Il est important de signaler ce renversement de position par rapport aux approches de la psychologie).

d) Une deuxième idée, ou plutôt un autre renversement de point de vue a rendu ce projet concevable : Alors que les Skinner, Roseblatt, Chomski, Suppes, Arbib, Estes, Papert... s'employaient à modéliser le comportement humain - et ses connaissances - par des stimulus-response models, des perceptrons, des automates ou des modèles stochastiques divers, il m'a semblé que l'on pourrait aussi modéliser les situations de la même façon, et particulièrement le milieu antagoniste du sujet. Ne peut-on pas étudier le jeu d'échec indépendamment du joueur ?

En conjuguant l'approche d'Alan Turing et celle de Paul Lorenzen qui semblaient pourtant irréductiblement opposées il a paru possible de représenter les situations à usage didactique par des "automates mathématiques". Un exemple montrera mieux ici ce dont il s'agit.

Un exemple : Qui dira 20?

a) C'est un jeu à deux joueurs A et B qui choisissent alternativement des nombres. Chaque joueur n'a le droit d'ajouter que 1 ou 2 au nombre précédemment dit par son adversaire. Le premier dit 1 ou 2. Celui qui dit 20 a gagné la partie.

b) Le système est composé d'un ensemble d'états de la forme (θ, n) où θ représente l'un ou l'autre des

joueurs et n le nombre naturel qu'il annonce. Quand le jeu se trouve dans un certain état (θ, n) l'ensemble des états permis suivants sont

$$\Gamma((\theta; n)) = \{(\theta'; n+1); (\theta'; n+2)\}$$

$$\text{où } n \in [0, 20]; \Theta = \{A; B\};$$

$$\theta \text{ et } \theta' \in \Theta; \text{ et où } \theta' \neq \theta$$

L'état initial est $(\theta; 0)$ et l'état final $(\theta''; 20)$

c) Du côté de la théorie, l'ignorance d'un joueur est représentée par le choix au hasard de l'un des deux états permis. Une tactique se manifeste par une certaine distribution de probabilité sur les choix ouverts dans certaines conditions. Une stratégie détermine tous les choix dans toutes les conditions. Le couple des stratégies choisies par chaque joueur détermine l'issue de la partie. Une connaissance pertinente modifie une tactique ou une stratégie.

d) Du côté de la contingence, une tactique se manifeste soit chez un sujet unique par des décisions stables, ce qui suppose des répétitions de parties, soit chez un ensemble de sujets par des décisions significativement fréquentes.

e) Voici l'évolution des fréquences des choix manifestés par une centaine de paires de joueurs de 9 à 10 ans au cours de 30 parties. Les ronds blancs correspondent à l'addition significative de 1, les noirs à l'addition significative de 2, l'absence de signe indique des choix équilibrés.

Numéro de la partie jouée

Choix significatif de 1 ou de

2

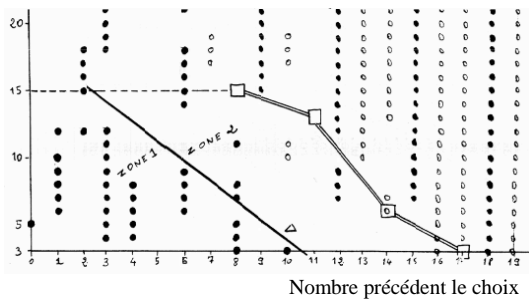


figure 1. L'apparition des théorèmes

On y voit apparaître l'axiome "il faut jouer 20" dès la première partie, la tactique "jouer 17 si l'autre a dit 16" à la deuxième et le théorème "Il faut jouer 17" (à partir de 15 ou de 16) dès la quatrième partie. Impossible de dire ici si chaque élève développe une meilleure probabilité de choix ou si une certaine partie des élèves est déterminée et l'autre joue de façon équiprobable.

f) La connaissance qui détermine la stratégie gagnante est celle qui consiste à prendre dès qu'on le peut la suite gagnante 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. Le savoir qui correspond à cette connaissance est celui du calcul du reste de la division par 3 du but. En fait, cette situation peut être utilisée pour introduire l'étude de l'algorithme de la division.

g) Nous remarquons que les "théorèmes" qui apparaissent au cours des suites de parties de ce jeu disparaissent dans l'ordre inverse de leur apparition. Ceci montre certaines limites des situations comme celle-ci où le sujet agit sans avoir l'occasion de prendre ses décisions comme objet de formulation ou d'étude

2. Typologie de situations à usage didactique.

Problématique

a) Lorsqu'un sujet tente de contrôler son environnement, toutes ses actions ne manifestent pas ses connaissances de la même manière. Existe-t-il une correspondance entre l'organisation du milieu, les formes d'interactions adéquates à son contrôle et les répertoires de connaissances mobilisés ?

Si oui, nous obtiendrons des types différents de situations. Est-ce qu'ils détermineront des modes d'apprentissages différents ?

b) Nous avons admis implicitement au chapitre précédent qu'à chaque connaissance doit correspondre une classe de situations caractéristiques. Maintenant, si nous considérons un savoir particulier, se distinguera-t-il des autres savoirs par des caractères spécifiques dans chaque type de situation? La pratique ou l'acquisition d'un savoir particulier exige-t-elle la rencontre de chacun de ces types de situation ? Existe-t-il des relations "dialectiques" entre les différentes formes de savoir et les différents types de situations?

c) Les situations sont bien plus nombreuses et complexes que les connaissances et les savoirs à l'aide desquels on les contrôle, alors que le nombre des savoirs paraît toujours plus excessif pour le temps dont on dispose pour les transmettre. Peut-on espérer réduire suffisamment le champ des situations, par exemple autour de quelques situations ou processus "fondamentaux" nécessaires à l'acquisition de savoirs

principaux. Quelle économie locale ou globale peut-on espérer?

Schéma général de situation d'action

Ainsi nous considérons de façon très classique un “modèle” très simplifié où un sujet manifeste ses connaissances dans ses interactions avec un milieu selon les “règles” ou dans le cadre d’une situation

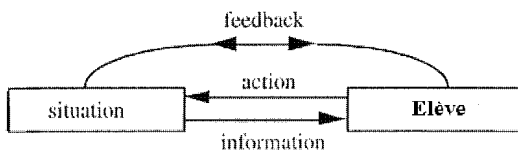


Figure 2

Plus généralement nous pouvons considérer de la même manière les interactions d’une institution avec d’autres institutions.

“ Agir ” consiste pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si le milieu réagit avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ces réactions et à en tenir compte dans ses propres actions. Les connaissances sont ce qui permet de produire et de changer ces “ anticipations ”. L’apprentissage est le processus par lequel les connaissances se modifient. Nous pouvons représenter ces connaissances par des descriptions de tactiques (ou procédures) que le sujet semble suivre ou par des déclarations dont le sujet semble tenir compte, mais il ne s’agit que de projections. La manifestation observable est un patron de réponse expliqué par un “ *modèle implicite d’action* ”.

b) Dans l’exemple de “ qui dira 20 ? ” à la troisième partie, si l’adversaire dit 16, les élèves

choisissent 17 (de préférence à 18), mais s’il dit 15, les choix se répartissent également entre 16 et 17. Il faut attendre la sixième partie pour que les enfants choisissent 17 de préférence à 16 dans ce cas. A partir de ce moment tout se passe comme s’ils savaient le “ théorème en acte “ “ il faut dire 17 ”, ou comme s’ils avaient une tactique “ complète ” (les deux sont alors indiscernables). Mais en fait au moyen d’entretiens nous avons pu observer que plusieurs étapes sont nécessaires avant qu’ils soient capables de formuler cette tactique, puis de la justifier, et enfin d’en tirer des conséquences.

On observe aussi que les élèves, lorsqu’ils ont acquis un théorème, ont tendance à ajouter 2 en début de partie et qu’ils ne commencent à “ essayer ” 1 ou 2 que sur les quelques nombres qui précèdent ce théorème (6 ou 7). Il s’agit d’une tactique de recherche, elle n’a jamais été explicitée par aucun élève.

Certains “ modèles implicites d’action ” sont formulables par le sujet ou le deviennent, d’autres non.

c) L’ingénierie didactique s’attache à identifier ou à produire les situations dont le contrôle exige la mise en œuvre des connaissances visées et parmi ces situations, à distinguer celles qui permettent la création de cette connaissance par une adaptation spontanée du sujet, de celles auxquelles l’adaptation est immédiate ou impossible.

Schéma de situation de la formulation

a) Le répertoire des “ modèles implicites d’action ” est très complexe et leurs modes d’établissement aussi. On peut

souçonner avec Bateson (cf *) que la possibilité de formuler une connaissance implicite change à la fois ses possibilités de traitement, d'apprentissage et d'acquisition. La formulation d'une connaissance correspondrait à une capacité du sujet à la reprendre (la reconnaître, l'identifier, la décomposer et la reconstruire dans un système linguistique). Le milieu qui doit rendre nécessaire l'usage par le sujet d'une formulation doit donc comporter (effectivement ou fictivement) un autre sujet à qui le premier devra adresser une information. La situation devra donc réaliser le schéma d'Osgood. Mais si nous voulons déterminer le contenu de la communication, il est nécessaire aussi que les deux interlocuteurs coopèrent dans le contrôle d'un milieu externe, de telle sorte que ni l'un ni l'autre ne puisse le faire seul et que le seul moyen d'y réussir soit d'obtenir de l'autre la formulation des connaissances visées.

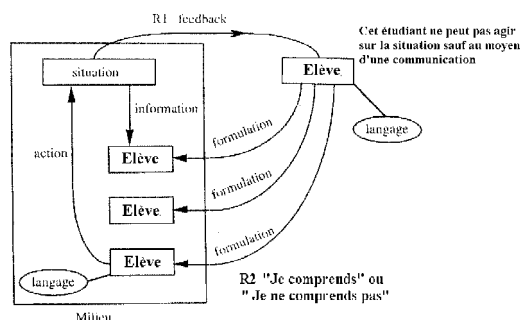


figure 3

b) La formulation des connaissances met en œuvre des répertoires linguistiques divers (syntaxe et vocabulaire). L'acquisition de ces répertoires accompagne celle des connaissances qu'ils expriment, mais les processus sont distincts.

En conséquence, l'acquisition des connaissances peut se faire directement, comme dans le schéma de l'action, ou par conversion en "modèles implicites" d'acquisitions obtenues par les formulations et les communications.

c) Dans l'exemple de "qui dira 20 ?", l'occasion de formuler des tactiques va être donnée aux élèves en les groupant en équipes qui doivent se concerter entre les parties. Les parties vont s'affronter des "champions" de chaque équipe, mais ces champions ne sont pas connus à l'avance de sorte que tous les membres de l'équipe doivent s'informer de ce qui est convenu. On a observé que la simple formulation n'avait aucune action sur les connaissances et les convictions des élèves mais qu'elle empêchait l'évanouissement des théorèmes en actes.

d) Comme précédemment, l'ingénierie didactique doit produire diverses sortes de situations : celles qui rendent nécessaire, pour le contrôle d'un milieu, la communication de telle connaissance choisie à l'avance alors que les répertoires auxquels il est fait appel sont connus, et celles qui exigent l'adaptation du répertoire ou la création d'un nouveau.

Schéma de situation de preuve

a) Les schémas de l'action et de la formulation comportent des processus de correction empirique ou culturelle propres à assurer la pertinence, l'adéquation, l'adaptation ou la conformité des connaissances mobilisées. Mais la modélisation en termes de situation permet de

distinguer un nouveau type de formulation.

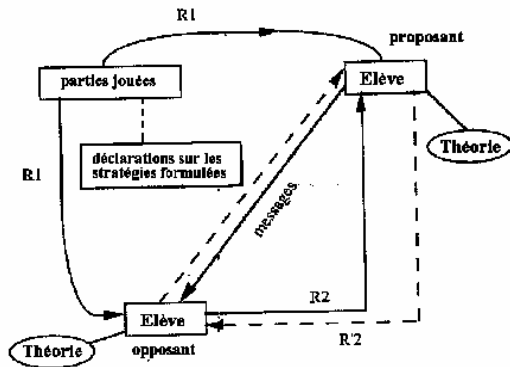


figure 4

L'émetteur n'y est plus un informateur mais un proposant et le récepteur un opposant. Ils sont supposés posséder les mêmes informations nécessaires. Ils coopèrent dans la recherche de la vérité, c'est-à-dire du moyen de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoirs déjà établis, mais s'opposent à chaque instant dès qu'il y a doute. Ils s'occupent ensemble des relations formulées entre un milieu et une connaissance relative à ce milieu. Chacun peut prendre position par rapport à un énoncé, et s'il y a désaccord, demander une démonstration ou exiger que l'autre applique ses déclarations dans la situation d'action avec le milieu.

b) Dans "qui dira 20 ?" le concours de théorème réalise ces conditions. Chaque équipe élabore puis propose à tour de rôle un énoncé "utile pour gagner au qui dira 20" ou essaye d'établir que l'énoncé des autres est en défaut.

c) Dans ce nouveau type de situation, les élèves organisent des énoncés en démonstrations, construisent des théories - des ensembles d'énoncés de référence -,

et apprennent comment convaincre les autres ou se laisser convaincre sans céder aux arguments rhétoriques comme l'autorité, la séduction, l'amour propre, l'intimidation etc.

Les dialectiques

a) Chaque situation peut faire évoluer le sujet mais peut aussi, de ce fait, évoluer à son tour, de sorte que la genèse d'une connaissance peut être le fruit d'une succession (spontanée ou non) de questions nouvelles et de réponses dans un processus que j'avais qualifié à l'époque de dialectique. Dans de tels processus les successions de situations d'action, de formulation et de preuve peuvent se conjuguer pour accélérer les apprentissages (qu'elles se présentent spontanément ou qu'elles soient provoquées volontairement)

b) Dans l'exemple de la course à 20, la situation d'action dure environ 10 minutes, le jeu de la formulation encore 10 minutes. Ensuite en moins de 40 minutes du concours de problèmes, une classe d'enfants de 10 ans parvient à établir la stratégie gagnante et à savoir prouver sa valeur par un raisonnement par exhaustivité.

c) L'action, puis la formulation puis la validation culturelle et l'institutionnalisation semblent constituer un ordre raisonnable pour la construction des savoirs. Cet ordre est souvent observé dans la genèse historique des notions où nous voyons des formes proto-mathématiques, puis para-mathématiques se succéder et précéder leurs formes mathématiques proprement dites. Il semble s'opposer à l'ordre inverse où les savoirs sont

d'abord réorganisés en discours communicables selon le destinataire puis seulement "appliqués" à des situations personnelles et "convertis" en décisions. En fait, il n'y a pas de loi générale qui qualifierait ou disqualifierait l'un ou l'autre de ces processus. Il faut examiner les propriétés de chacun dans chaque cas.

d) La séance "qui dira 20 ?" est la première d'une série qui se poursuit par "qui dira 25 ?", puis "qui dira 37 ?"... Ensuite "qui dira 354, en ajoutant des nombres compris entre 1 et 13" ? etc. Les élèves sont ainsi conduits à construire une méthode pour trouver le reste de soustractions successives avant de s'apercevoir qu'ils ont réinventé la division qu'ils connaissaient déjà.

*L'institutionnalisation :
connaissances et savoirs*

a) Peut être parce que les travaux de Piaget montraient qu'il existe des processus naturels de développement des connaissances et laissaient espérer que chaque notion mathématique posséderait une sorte d'épistémologie naturelle ou spontanée, peut être aussi parce que j'ai pu imaginer de nombreuses situations "autodidactiques" et provoquer des apprentissages constructivistes, j'ai commis l'erreur de croire en la possibilité d'une didactique "constructiviste" (avant la lettre).

b) Les faits d'abord, puis bientôt des raisonnements sur lesquels nous reviendrons, ont montré la vanité de cet espoir et la nécessité de phases d'institutionnalisation qui donnent à certaines connaissances le statut culturel indispensable de "savoirs".

De même que les théorèmes en actes s'évanouissent bientôt en l'absence de formulation et de preuve, les connaissances privées et même publiques restent contextualisées et vont disparaître dans le flot des souvenirs quotidiens si elles ne sont pas replacées dans un répertoire spécial dont la culture et la société affirment l'importance et l'usage.

Le fonctionnement des *connaissances* est différent de celui des savoirs, aussi bien dans les rapports entre les institutions que dans l'activité isolée des sujets. Les "savoirs" sont les moyens sociaux et culturels d'identification, d'organisation, de validation et d'emploi des connaissances. La même notion comme connaissance et comme savoir n'a pas les mêmes propriétés, ni comme moyen de recherche, ni comme possibilité d'expressions, ni comme instrument de conviction ou comme argument et elle n'est pas apprise de la même manière.

*Conséquences théoriques de la
nécessité de l'institutionnalisation*

a) Le fait de montrer par des raisonnements de consistance, la nécessité de l'institutionnalisation des savoirs ne relève plus de la simple modélisation. Il s'agit d'assurer la consistance de l'ensemble des modélisations en éliminant celles qui sont contradictoires, et donc il s'agit d'un travail théorique.

Les premiers énoncés de cette théorie seraient donc :

"Les humains peuvent élaborer des connaissances dans des situations autonomes *internes* (telles qu'aucun des participants ne dispose d'un

savoir supérieur au sujet apprenant) ”.

“ Les connaissances élaborées dans des types de situations internes différents ne sont pas équivalentes, ni automatiquement convertibles ”.

“ Les pratiques sociales habituelles exigent la référence à des formes de connaissances (les savoirs) qui ne peuvent pas être établies dans les situations internes ”.

b) Cependant, la conception des situations capables de faire développer obligatoirement et sans intervention didactique les connaissances les plus importantes, reste l'élément essentiel de l'analyse des situations réelles, didactiques ou non. Savoir si ces situations sont elles aussi indispensables est une autre question théorique que nous aborderons plus loin.

3. Les situations "fondamentales".

Problématique

a) La modélisation didactique des situations consiste d'abord à faire correspondre à tout savoir déterminé, une classe minimale de situations qui font apparaître cette connaissance comme le moyen optimal et autonome de solution de ces situations. Cette classe de situations comprend l'ensemble des problèmes caractéristiques d'un savoir. Peut-elle être engendrée par le jeu des variables cognitives et des variables didactiques d'une situation fondamentale unique ?

b) Il existe aujourd'hui de nombreux exemples de situations relativement fondamentales pour tous les secteurs des mathématiques élémentaires, pour la connaissance de

l'espace, pour la géométrie, pour la construction des structures numériques fondamentales, pour les probabilités, la notion de fonction, celle de limite etc.

c) Mes collègues ont choisi d'étudier en atelier la notion de mesure. Pour illustrer le concept de situation fondamentale je vais donc prendre comme exemple celle qui demande la mesure d'ensembles finis et qui engendre par conséquent le nombre naturel. Nous écartons pour l'instant l'étude générale des milieux nécessaires pour mettre en situations le concept de mesure.

La connaissance des premiers nombres naturels se manifeste par le comptage.

d) Principe : La situation “ fondamentale ” d'apprentissage du comptage doit pouvoir être communiquée à un enfant qui ne sait pas compter mais il doit pouvoir apprendre à la résoudre sans intervention didactique de son professeur (c'est à dire portant sur la connaissance). Les situations réelles réclameront des interventions didactiques plus ou moins importantes.

Bébé compte, scène familiale

Maman : - Vous savez, grand père, le petit sait compter!

Grand père : - c'est vrai? voyons ça mon mignon...

Maman : - "Montre à grand père que tu sais bien compter"

L'enfant, quatre ans : - Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, dix, quinze, heu...

Grand père, admiratif : - Aaah! très bien! Il ne te reste plus qu'à continuer!

Mais "compter" ne compte pas : dénombrer, projet scolaire

La famille comprend la tante Mimi qui est une institutrice à la retraite.

Tante Mimi : - Mais non, grand père, pour savoir si cet enfant sait compter il faut lui montrer des doigts et lui demander combien il y en a, et puis lui demander à son tour de montrer tant de doigts! il ne suffit pas de réciter la suite des nombres! Et s'il n'y parvient pas bien, il ne faut pas que maman soit déçue. A quatre ans la plupart des enfants ne peuvent guère vraiment comprendre les nombres au delà de 5, les psychologues vous le diront.

Maman : - mais notre petite voisine Odile, qui a cinq ans, compte bien jusqu'à soixante et dix!

Tante Mimi : - Oui, elle peut aussi réciter "Le chat la belette et le petit lapin" qui comporte bien plus de 70 mots, mais elle croit que les pénates sont des espèces de pantoufles! Ce n'est pas bien grave, mais une jeune collègue m'a raconté que les parents exercent actuellement une forte pression pour "faire compter" précocement les enfants. Elle constate que sous l'influence de ce matraquage, certains de ses élèves se mettent à compter, dès lors qu'ils entendent le mot "nombre" sans même vouloir réfléchir à la question qu'on leur pose. Elle a dans sa classe des élèves "petits et moyens" d'école maternelle, des enfants qui comptent mécaniquement jusqu'au delà de cinquante, et de ce fait, elle ne peut plus, ni avec eux, ni avec ceux qui ne dépassent pas cinq, organiser en commun aucune activité mathématique de leur âge.

Dénombrer : situation spécifique

a) Considérons maintenant la situation suivante qui peut être traduite en instructions adaptées aux enfants de 5 à 6 ans :

"Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un et un seul dans chaque pot. Tu dois porter tous les pinceaux en un coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les ramènes là-bas et tu essaies à nouveau. *Tu*

sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots".

Plus précisément, l'enfant saura dénombrer lorsqu'il pourra jouer les deux rôles : *demander* (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement *fournir* à la demande la quantité voulue.

b) Une telle situation présente un caractère fondamental parce que "toutes" les situations de comptage peuvent être décrites en faisant varier ses variables cognitives et que toutes les pratiques de comptage et d'apprentissage du comptage peuvent ainsi être classées et comparées du point de vue didactique.

c) Les pratiques habituelles du comptage, celles que nous avons présentées ci-dessus, s'obtiennent à partir de la situation fondamentale par suppression ou par transfert à l'adulte de certaines tâches. Dans la première, que nous pourrions appeler par exemple "***le comptage populaire***", l'enfant reproduit une suite de mots sous le contrôle de l'adulte. La seconde, "***le comptage scolaire classique***", est plus évoluée, il reste à l'enfant à faire correspondre un nombre à un ensemble de pots (travail d'émetteur), ou à constituer un ensemble d'un nombre donné de pinceaux.

Apprendre à compter

a) Apprendre séparément ces pratiques partielles implique que l'adulte les enseigne, les exige, les corrige, les fasse imiter et répéter. A aucun moment, l'enfant n'est en mesure d'établir lui-même la finalité de l'action et de corriger ses erreurs. Cependant, parents et enseignants utilisent avec un certains succès

toutes ces formes “ dégénérées ” de la situation fondamentale, même le cas extrême de l'apprentissage formel de la suite des nombres. Aussi s'agit-il moins de rejeter certaines d'entre elles que de les utiliser au mieux suivant leurs caractéristiques particulières. Les désavantages principaux des apprentissages partiels sont les suivants :

- ils ne permettent pas de déférer à l'enfant la responsabilité du jugement sur la valeur de ses réponses, ni de lui décrire à l'avance un projet d'apprentissage dont il peut évaluer les progrès

- il faut qu'il ait déjà appris la réponse d'une manière ou d'une autre pour comprendre ce qu'on lui demande de faire.

b) La "définition" didactique est différente : elle replace les techniques dans une action globale intelligible. Elle n'exige pas que l'enfant sache déjà compter pour la comprendre. Il est seulement nécessaire qu'il puisse réussir le jeu avec deux ou trois pots. Il faut aussi qu'il sache vérifier la correspondance un à un. L'apprentissage alors peut commencer, non pas par l'imitation ou la reproduction mais par l'invention de solutions stables quel qu'en soit le moyen.

Apprendre les nombres

a) Finalement, il faudra bien, pour cela, qu'il **énumère**¹ les

¹ Pour plus d'informations, les curieux peuvent consulter (entre autres): sur l'énumération, la thèse de J. BRIAND " L'énumération dans le mesurage des collections" (1993) (LADIST, Université Bordeaux 1, 40 rue Lamartine 33 400 Talence) sur la numération, celle de M. BAHRA "Problèmes de didactique de la numération, échecs et succès de la remathématisation (1995) (même adresse), sur les dénombrements celle de B. VILLEGAS (1986)

collections (qu'il appelle l'un après l'autre, tous les objets sans appeler deux fois le même), en même temps qu'il les **dénombr**e (qu'il évalue leur cardinal par correspondance avec une autre collection), en particulier quand il les **compte** (qu'il met en correspondance leurs éléments avec les mots) puis, si le comptage a été décomposé, en "**nombrant**" (en exprimant oralement le nombre à l'aide d'un système de numération) le résultat de son comptage, et ensuite en **écriv**ant ce nombre. Il faudra aussi qu'il s'approprie les usages **ordinaux** de la suite des nombres etc.

b) Mais ces apprentissages pourront se produire par une conjonction de méthodes, par exemple

- dans un processus constructiviste, en complétant les réponses spontanées, ou provoquées avec les institutionnalisations indispensables,

- ou dans des enseignements plus classiques, maïeutique ou même axiomatique, avec des leçons suivies d'exercices, en réponse au problème désormais bien identifié par l'élève.

De même la situation fondamentale ne discrédite aucune des formes d'apprentissages. Elle les permet toutes et permet de les conjuguer : elle complète les apprentissages partiels qui restent utiles et sans doute nécessaires, et surtout elle leur donne leur sens.

c) L'usage purement **numéral** des nombres (pour seulement identifier ou désigner un objet : numéro de chaîne TV, de téléphone, ou d'automobile) ne semble présenter,

(idem), sur le nombrement celle de A. CAUTY (IFE même adresse).

lui, aucun problème. Sans doute parce que la difficulté principale réside moins dans l'apprentissage des automatismes que dans la connaissance des **propriétés** des collections, des nombres et de leurs opérations. Celles-ci doivent être obligatoirement "connues" de l'élève pour qu'il puisse contrôler leurs usages complexes.

Il faudra de plus, tôt ou tard, ne pas se contenter de leur usage, mais aussi élucider, formuler, discuter les propriétés et les structures numériques. Ces élucidations sont nécessaires à l'apprentissage lui-même et doivent l'accompagner. Comment et quand?

comprendre le dénombrement : Une expérience

a) Ce sens, dans les cas classiques, ne vient qu'après. Pour s'en convaincre, il faut interroger des enfants en cours d'apprentissage (classique), qui "savent" déjà compter en ce sens qu'ils savent résoudre le problème de l'émetteur et celui du récepteur (disons jusqu'à trente), mais qui n'ont pas encore la maîtrise du dénombrement. B. VILLEGAS a pu observer le comportement suivant :

L'élève va chercher une poignée de pinceaux et les distribue dans les pots.

- "Ah, il en reste trois !"

- Tu as réussi ?

- Non parce qu'il m'en reste trois !

- Bon, reprends-les tous et essaie une autre fois.

Les autres élèves de la classe lui suggèrent :

"compte !, compte !"

L'élève compte les pots, repart, saisit une poignée de pinceaux et revient. Le fait de compter ne lui a servi à rien. Les autres élèves continuent à l'aider :

- Non ! non ! tu dois compter les pinceaux.

L'enfant part, compte tous les pinceaux et revient...

b) Cet exemple met en évidence une différence entre le comptage comme **savoir** culturel habituel et le comptage comme **connaissance** d'un moyen de résoudre la situation fondamentale.

Une condition de plus : la confiance en ses méthodes:

a) Pouvons-nous affirmer que l'élève sait compter lorsqu'il est capable de constituer des collections adéquates de quelque importance dans les conditions ci-dessus?

Pas tout à fait : Il doit aussi être capable d'être suffisamment sûr de son comptage pour identifier les sources d'erreurs et au besoin les discuter.

Par exemple, si au moment où il va chercher les pinceaux, quelqu'un lui dérobe un pot, il doit être capable de dire au retour:

- "tu m'as fait une farce!".

b) Cette confiance dans ses méthodes exige à son tour une position réflexive par rapport à elles, une "métaconnaissance", des mots pour exprimer les connaissances acquises, un métalangage, et finalement tout ce qui constitue la conversion en savoirs de certaines des connaissances.

Ainsi notre situation de dénombrement n'était pas tout à fait fondamentale. L'est-elle maintenant?

c) Par rapport aux méthodes classiques, elle peut se révéler utile, à divers moments de l'apprentissage et surtout pour indiquer aux professeurs ce que veut dire "compter" en termes "concrets". Ceci ne veut pas dire que

l'apprentissage par l'usage exclusif de la situation fondamentale serait plus rapide ou plus efficace, elle peut se révéler inutilement lourde quand l'élève a compris le but de l'apprentissage.

4. L'adaptation des situations aux élèves : l'optimisation

Calculs ergonomiques

Trop souvent les mathématiciens didacticiens répugnent à utiliser des calculs mathématiques pour étudier les propriétés des situations qu'ils envisagent. La recherche des valeurs optimales pour l'emploi d'une connaissance dans une situation déterminée mériterait un meilleur sort.

La multiplication et la division

a) L'utilisation d'un milieu (abaque, boulier, plume et papier,...) est inévitable pour effectuer certains calculs. Dans un souci de transparence démocratique, la convention, qui avait établi le système décimal, rejeta l'usage des appareils "mystérieux" au profit d'un enseignement obligatoire du calcul à la plume. Le choix des "algorithmes" retenus était un compromis entre la fiabilité et la rapidité d'exécution exigées par les activités calculatoires intenses nécessaires à la société industrielle et commerciale émergente, et les capacités d'apprentissage de la partie de la population concernée (et ...l'héritage de pratiques anciennes). Il est facile de concevoir d'autres dispositions des calculs et par des calculs d'ergonomie de comparer leurs avantages (cf annexe1).

J'ai montré d'abord par des calculs mathématiques sur des modèles puis par l'expérience que l'exécution à la française de la multiplication et surtout celle de la division étaient très sensibles à des variables sur lesquelles on pouvait agir facilement, qu'elles provoquaient inutilement des échecs souvent coûteux, parfois irrémédiables et toujours discriminatoires. J'ai proposé des dispositions mieux adaptées ; j'ai prévu (c'est-à-dire calculé) et montré (c'est à dire vérifié) le gain (en résultats et en temps) que l'on pouvait obtenir par ces modifications faciles à enseigner. C'était en 1970.

b) Plus récemment, il m'a semblé que l'enseignement, en France, avait oublié les techniques de l'enseignement du calcul et des résultats fondamentaux des tables et qu'il empruntait ses "méthodes" aux fantômes populaires les plus éculés.

c) Ces deux exemples m'ont appris que le savoir ne se diffuse pas naturellement, même lorsque une recherche en didactique fournit une solution pratique à un problème effectif par une méthode scientifique et assez universellement convaincante.

Les grilles d'observation et de contrôle de l'ingénierie

L'étude, a priori et a posteriori, de l'adaptation d'une situation à son objet et aux élèves peut être facilitée par l'usage de grilles dont les questions sont articulées en fonction de la typologie des modèles que nous venons d'évoquer. Cependant aucune grille ne contient la totalité des questions qu'il convient de se poser. Si une telle grille existait elle serait

sans aucun doute totalement inapplicable. En général il convient d'utiliser des grilles "guide" assez générales et de les spécifier en fonction de chaque connaissance et de chaque situation. Enfin l'usage d'une grille est subordonné à des questions que l'on se pose. Soit des questions sur l'adéquation de telle condition à la réussite de l'enseignement visé, soit plus souvent à l'étude d'une question précise pour comprendre le déroulement de l'apprentissage ou ses lois.

La grille présentée en annexe 2 pourra être utilisée dans les ateliers qui accompagnent cette conférence.

5. L'adaptation des élèves aux situations : les sauts et les obstacles

Variables et coûts

a) Les sujets (et les institutions) s'adaptent aux situations qu'ils rencontrent et fabriquent pour cela des connaissances et des savoirs. Comme nous venons de le voir, les variantes d'une situation relative à un même savoir mathématique peuvent présenter de grandes différences de complexité et par conséquent conduire à des stratégies optimales différentes et donc aussi à des manières différentes de connaître ce même savoir.

Plus précisément, pour déterminer une situation il faut fixer les valeurs de chacune de ses variables (V_i). A chaque détermination il est possible d'associer un certain nombre de valeurs, de coûts ou de complexité. Ainsi à chaque point s de l'espace $\Pi(V_i)$ des situations ($s \in \Pi(V_i)$), correspond un point $v = f(s)$ de

l'espace $\Pi(G_j)$ des valeurs de ces situations ($v \in \Pi(G_j)$). En supposant que la fonction f possède de bonnes propriétés, on peut imaginer que les valeurs de v forment des nappes (des variétés) présentant des maxima, des minima et diverses autres sortes de singularités. Il est important de connaître la forme de ces nappes aussi bien pour choisir et organiser les curricula que pour déterminer les situations les plus favorables.

b) Une métaphore simple permettra d'illustrer cette déclaration.

Nous ne reconnaissons pas et nous ne traitons pas tous les naturels de la même manière par exemple les naturels jusqu'à 3, ceux compris entre 4 et 7, ceux compris entre 15 et 40, ceux compris entre 100 et 1000, et $((1847)^{1847}) \dots$ (élevé 1847 fois à la puissance 1847). Nous ne résolvons pas un système linéaire de dimension n par les mêmes méthodes selon que $n = 2, 5, 10$, ou 100. etc.

Le coût de la reconnaissance directe (à l'œil) du nombre d'éléments d'un ensemble croît très vite. Au delà de 5 il faut structurer et énumérer la collection. La structure additive trouve ensuite assez vite ses limites si l'on doit fréquemment utiliser de très grandes quantités. il faut alors adapter le système de numération.

L'enseignement doit suivre cette loi. Nous commençons par apprendre à utiliser de petits nombres et nous nous en servons pour en construire de plus grands. La fonction de Peano (ajouter chaque fois un) paraît la plus simple. Mais en fait cette création récursive est trop coûteuse pour être effective, les enfants développent des modes de reconnaissance (des conceptions) appropriés. Peuvent-ils

passer d'un mode à l'autre en suivant l'ordre naturel où vont-ils rencontrer des difficultés ? Ne serait-il pas préférable de favoriser la création de ces stratégies, au besoin en choisissant de faire dénombrer des quantités tout d'un coup beaucoup plus grandes pour décourager le prolongement désespéré d'une méthode de reconnaissance de plus en plus inadaptée ?

c) La réponse dépend de la forme des nappes des coûts attachés à chaque conception des nombres naturels. Pour simplifier, nous supposons que nous avons combiné tous les coûts (usage, fiabilité, apprentissage... rapportés à des fréquences d'emplois usuelles), en une seule variable f_i qui représente le prix moyen du traitement d'un nombre n ; f_i est une fonction de la variable naturelle n , nombre d'objets à dénombrer : f_1 représente le coût du dénombrement visuel, f_2 celui du coût de la structuration additive, f_3 celui du coût de la structuration multiplicative, f_4 celui de la numération décimale.

Chaque fonction présente un minimum. Pour des abscisses inférieures le rendement baisse : la méthode de dénombrement est trop complexe pour traiter un trop petit nombre de données, la conception est trop sophistiquée, l'apprentissage trop long etc. Pour des valeurs plus grandes la méthode s'essouffle, le coût de l'exécution de la reconnaissance du nombre devient prééminent, le rendement de la conception s'effondre. L'apprentissage par adaptation suppose que l'on choisisse les variables de façon à ce que la connaissance que l'on veut "faire

découvrir" soit significativement plus avantageuse que toute autre.

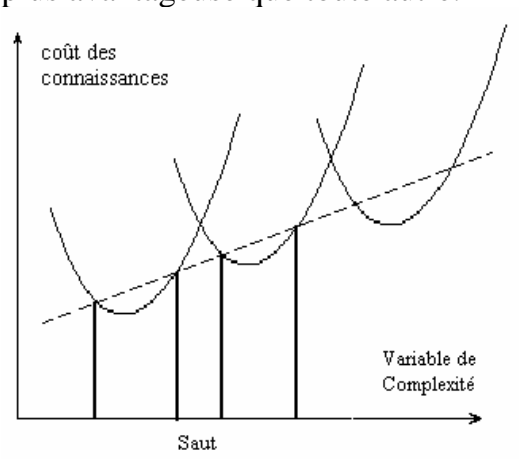
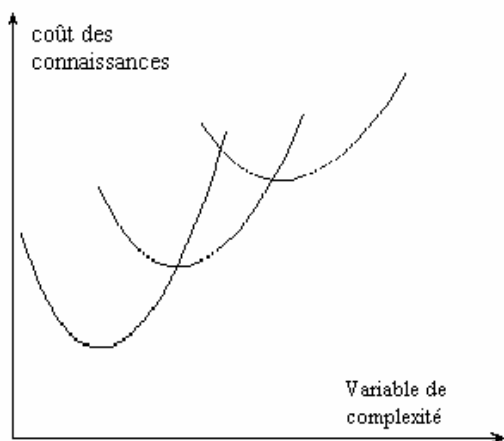


figure 5

d) La figure 5 représente le cas où la fonction de moindre coût présente des maxima importants entre les minima. Chaque méthode devient très vite complexe et incertaine lorsque la taille des nombres augmente, alors que la méthode suivante ne présente pas encore une efficacité évidente. Ces seuils sont au centre de zones intermédiaires où la connaissance s'emploie avec moins d'efficacité. Les domaines d'utilisation justifiée et facile (en dessous du pointillé) sont disjoints. Si la "découverte" d'une nouvelle méthode par les élèves est possible, cette découverte est d'autant plus motivée que les conditions de la situation correspondent à un avantage plus grand de la nouvelle méthode par rapport à l'ancienne. Celle-ci apparaît tout de suite comme inefficace.

Ce cas suggère d'éviter les difficultés en effectuant une progression "par sauts informationnels".



La figure 6 représente l'hypothèse favorable à une progression régulière de l'enseignement. Le passage progressif d'une conception à une autre ne présente pas de difficultés dues à des sauts de complexité informationnelle.

Conceptions et adaptations

a) Chaque manière organisée mais particulière de traiter une notion mathématique constitue ce que nous avons appelé une *conception*. Par exemple nous avons repéré une douzaine de conceptions différentes de la division. Le passage d'une connaissance à une autre à l'intérieur d'une même conception n'est pas coûteux, l'apprentissage non plus car il correspond à ce que Piaget identifie comme une assimilation. Le passage d'une conception à une autre est plus difficile car il correspond à un changement de répertoire important. Son apprentissage demande une certaine réorganisation des connaissances anciennes (une accommodation). Ces conceptions sont donc déterminées par leur structure logique interne mais aussi par la fréquence et l'efficacité avec laquelle elles entrent en service. Les conceptions peuvent se déterminer

théoriquement comme des ensembles de connaissances et de savoir fréquemment sollicités ensemble pour résoudre des situations, empiriquement comme des patrons de réponses cohérents donnés par une partie importante des sujets sur une classe de situation.

b) Il est intéressant de noter que l'adaptation optimale d'un sujet (ou d'une institution) à un ensemble de conditions conduit ce sujet à des conceptions différentes pour une même notion mathématique. Ce sera la base de la théorie de la transposition didactique. Inversement les conceptions déterminent des domaines d'efficacité didactique qui sont la plupart du temps disjoints.

c) L'apprentissage présente par conséquent de fréquentes ruptures qui peuvent avoir des formes et des origines variées: saut informationnel, changement dans la forme de contrôle (proto, para, ou mathématique), origine ontogénique, choix didactique ou contingence épistémologique... Certaines des conceptions acquises ne disparaissent pas immédiatement au profit d'une conception meilleure. Elles résistent, provoquent des erreurs et se constituent ainsi en "obstacles".

Obstacles

b) Le concept d'obstacle épistémologique est dû à Bachelard, qui ne croyait pas que l'on puisse en observer en mathématiques. La modélisation des situations m'a conduit à penser le contraire et à aménager une définition appropriée :

■ Un obstacle est une "connaissance", au sens que nous lui avons donné de "manière régulière de traiter un ensemble de situations".


■ Cette connaissance donne des résultats corrects ou des avantages appréciables dans un certain domaine mais se révèle fautive ou tout à fait inadaptée dans un domaine nouveau ou plus vaste.

■ La connaissance nouvelle, vraie, ou valide sur un domaine plus vaste, ne s'établit pas "à partir" de l'ancienne connaissance mais contre elle. Elle utilise d'autres points de vues, d'autres méthodes etc. Elles n'ont pas entre elles de relations "logiques" évidentes qui permettraient de discréditer facilement l'erreur ancienne avec la nouvelle connaissance. Par contre elles sont concurrentes sur le domaine ancien.

■ Ces connaissances ne sont pas des constructions personnelles variables. Elles sont des réponses "universelles" à des domaines précis. Elles apparaissent donc presque nécessairement dans la genèse d'un savoir. Qu'il s'agisse d'une genèse historique ou didactique.

On peut déduire de cette "définition quelques caractères observables des obstacles :

Un obstacle se manifeste bien par des erreurs, mais ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une "connaissance" ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. "Il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité ou la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain ; c'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent

par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles... On connaît contre une connaissance antérieure" 

L'obstacle ne disparaît donc pas avec l'apprentissage d'une nouvelle connaissance. Au contraire il oppose une résistance à son acquisition, à sa compréhension ; il freine son application ; il subsiste à l'état latent et réapparaît de façon inopinée, en particulier sur son ancien domaine, lorsque les circonstances le lui permettent.

Par conséquent il est vain d'ignorer un obstacle. Il faut le rejeter explicitement, intégrer sa négation dans l'apprentissage de la nouvelle connaissance, notamment sous forme de contre-exemples. En ce sens, il est constitutif du savoir.

Exemples

Les obstacles ne sont pas toujours des connaissances "fausses" comme le traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale des nombres décimaux ou indûment étendues comme la linéarité. L'enfant qui a dû comprendre que le produit est une répétition de sommes, et par conséquent est plus grand que chaque terme, arrive mal à interpréter et à utiliser $0,2 \times 0,3 = 0,06$, et il ne distingue pas le 4 naturel qui avait un prédécesseur, du "même" 4 mais décimal qui, lui, n'en a pas. L'obstacle est alors une connaissance parfaitement légitime et inévitable.

Dans le Ph.D. qu'elle a soutenu à l'Université Laval, Habiba El Bouazzaoui, a été une des premières à l'utiliser pour montrer l'existence d'obstacles dans la continuité des fonctions. Par la suite la question des

obstacles et des conflits cognitifs à été étudiée au cours d'un colloque ici à Montréal.

6. Résultats et premières conclusions.

La mise en évidence de la nécessité de l'institutionnalisation puis celle des obstacles épistémologiques ou didactiques a eu des conséquences importantes sur le statut scientifique de la modélisation des situations à usage didactique.

1. *La modélisation des situations à usage didactique* - celles où le travail du professeur se borne à créer et maintenir ces conditions sans intervenir sur le processus cognitif. - permet d'identifier, de concevoir et d'améliorer des conditions spécifiques de la construction "autonome" des connaissances mathématiques. Ceci semble justifier les thèses constructivistes.

2. *Mais le fonctionnement naturel des situations "constructivistes" conduit l'élève à des connaissances localement adaptées mais qui la plupart du temps se révéleront insuffisantes ou même fausses par la suite et certaines se constitueront en obstacles.*

3. *De plus cette construction autonome ne peut pas donner aux connaissances développées le statut d'un savoir..* Les connaissances canoniquement constituées sont celles qui sont intelligibles pour les autres, partagées, conformes à la volonté didactique de la société, celles dont l'intérêt est garanti pas l'histoire et par la culture et qui seront réutilisées

par la suite. Seule l'intervention didactique du professeur permet de repérer ces connaissances canoniques dans ce qui a été conçu par l'élève ou par les élèves dans les situations autonomes. Ce statut de connaissance institutionnalisée ne peut surgir des situations où l'intention didactique est dissimulée à l'élève.

4. *Mais les déclarations 2 et 3 ne contredisent pas l'hypothèse que seuls les fonctionnements autonomes de l'élève sont l'indice qu'il a acquis des connaissances utilisables. Elles n'enlèvent rien aux critiques des pédagogies qui ne permettent pas le fonctionnement localement justifié des connaissances de l'élève.*

5. *Par contre elles font apparaître comme indispensable le plongement des modèles de situations à usage didactique dans des modèles plus vastes, incluant les actions du professeur.*

6. *Enfin, malgré un parti pris évident de réalisme et de positivisme rationaliste, (une sorte de retournement des exigences du behaviorisme) la part grandissante des spéculations théoriques et l'extension des études à l'ensemble du processus pose le problème de la consistance générale de cette approche. Une théorie des situations s'impose-t-elle ?*

B. La théorie des situations didactiques

1. Modélisation de l'enseignement.

Nouveau sens du terme "situation didactique"

a) Si nous considérons l'enseignement comme "le projet et l'action sociale de faire approprier par un élève un savoir constitué ou en voie de constitution", la didactique des mathématiques devient "la science des conditions de diffusion et d'appropriation des connaissances mathématiques utiles aux hommes et à leurs institutions" et la modélisation de cette diffusion conduit à utiliser le terme de "situation didactique" non plus dans le sens de moyen utilisé dans la partie A, mais dans celui, signalé plus haut "d'environnement de l'élève, englobant tout ce qui concourt spécifiquement à la composante mathématique de sa formation".

b) Une interaction ne devient didactique que si, et seulement si, un des systèmes affiche l'intention de modifier le système des connaissances (moyens de décision, vocabulaire, système d'argumentation, références culturelles) d'un autre.

c) Beaucoup d'ouvrages schématisent la situation d'enseignement par le "triangle" représenté dans le schéma ci-dessous qui ne prend en compte que les relations du système "professeur" avec le système "élève" qui ne prend en compte que les relations du système "professeur" avec le système "élève".

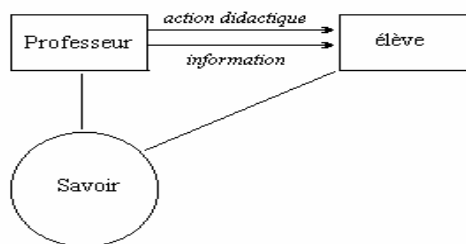


figure 7

Ce schéma a l'inconvénient de réduire l'environnement didactique à l'action du professeur et d'occulter complètement les rapports du sujet avec tout milieu a-didactique

Or l'intervention du professeur évoque nécessairement, pour les connaissances qu'il enseigne, un fonctionnement possible dans d'autres circonstances, ne serait ce que celui des "situations à usage didactique" (exercices ou problèmes) qu'il met en oeuvre. Il crée donc, effectivement ou fictivement, un autre "milieu" où l'élève agit de façon autonome. Ce qui donne plutôt le schéma de la figure 8.

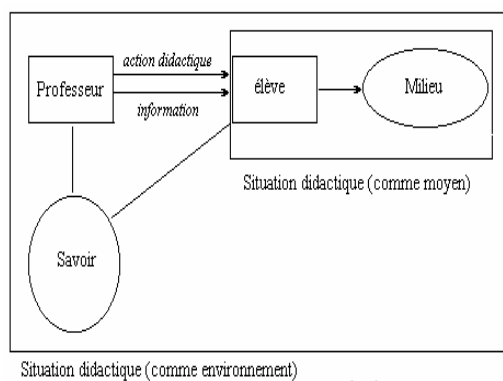


figure 8

d) La première question théorique qui se pose alors est celle-ci : peut-il être fait abstraction de ce milieu ou non ? La deuxième est : quelle structure faut-il lui attribuer ?

Structures du "milieu didactique"

a) L'étude des situations comme moyen didactique conduit à accepter les propositions suivantes :

La communication "didactique" a pour objet de donner à son destinataire un moyen de contrôle ou de régulation sur un certain *milieu*. Nous avons appelé *modèle implicite d'action* la capacité minimale de contrôle. La conscience que le sujet apprenant peut avoir de sa capacité de contrôle sur une situation ou un milieu donné, est repéré comme "sa" connaissance. Prendre conscience de ses connaissances suppose de la part de l'apprenant, d'une part la pratique (effective ou fictive) de certains types d'interactions sociales (formulation, preuve) et l'usage d'un certain répertoire culturel. Ce bagage de connaissances culturelles (formulables ou communicables au moins par des procédés non verbaux) est lui-même l'objet d'une reconnaissance par un système de savoirs et de 'syntaxes' plus ou moins spécifiques.

b) Les instruments culturels de reconnaissance et d'organisation des connaissances sont des *savoirs*, objets d'une activité spécifique des institutions, ou d'une activité d'institutions spécifiques. La *compréhension* est la mobilisation concomitante de savoirs, de connaissances et l'évocation de situations non directement nécessaires à la décision dans l'action en cours mais supposées utiles au contrôle des connaissances qui régulent cette décision. L'équilibre général des différents répertoires par lesquels un sujet régule ses rapports à un milieu obéit à des principes d'ergonomie.

c) Le "sens" d'une connaissance est une image culturelle de la compréhension, un moyen de la reconnaître et de la gérer, comme le savoir est un moyen de reconnaissance et de gestion des connaissances, moyen personnel ou institutionnel, et donc variable suivant les institutions. Le sens peut donc se décomposer suivant les "types didactiques" de connaissances en une composante *sémantique*, par laquelle la connaissance à l'oeuvre est reliée à un champ de situations, en une composante *syntactique* qui la relie aux différents répertoires (en particuliers logiques et scientifiques) qui en régissent la manipulation, et en une *composante pragmatique* qui en décrit les caractères d'utilisation.

d) L'action du professeur comprend une forte composante de régulation des processus d'acquisition de l'élève. L'élève lui-même apprend par des régulations de ses rapports avec son "milieu". Les régulations cognitives concernent un milieu a-didactique dont une partie de la structure est déterminée par la même méthode que celle employée dans la partie A.

* Milieu "objectif" : L'élève considère comme milieu objectif l'ensemble des objets et relations qui ne dépendent ni de ses actions et connaissances, ni de celles du professeur. Ce milieu peut être lui-même structuré comme une situation non didactique avec des actants objectifs et des milieux en interactions.

* Le milieu objectif est mobilisé dans une situation d'action dont il constitue soit le milieu effectif sur lequel l'élève est appelé à agir

(les figures planes par exemple) soit un milieu fictif dont il doit imaginer le fonctionnement ou les transformations pour répondre à une question. Dans les deux cas il est un actant qui opère en fonction de ses modèles implicites d'action. Dans cette classification les situations de formulation ou de preuves sont des situations d'actions de ce niveau.

* Le sujet apprend en corrigeant ses actions et en anticipant leurs effets. Les situations d'action où il s'est engagé sont donc pour lui des milieux (de référence) sur lesquels il exerce ses capacités de construction de connaissances et d'apprentissage. Ces situations d'apprentissage, dont le milieu est une situation d'action, sont au cœur du dispositif de construction des connaissances et de leur signification. Elles s'effacent habituellement spontanément de la mémoire de l'apprenant.

* Etre élève, c'est gérer des situations d'apprentissage - avec l'aide du professeur -. Le milieu que l'élève doit traiter est donc celui de ses situations d'apprentissage. Ces interactions constituent des situations d'enseignement. Le professeur y est un actant comme l'élève.

* Le professeur doit d'autre part considérer les situations d'enseignement comme des milieux qu'il doit réguler - y compris sa propre action au sein des situations d'enseignement - par des actions, des connaissances et des savoirs spécifiques.

* Chaque relation avec un milieu de niveau différent fait appel à des connaissances, à des concepts, à un vocabulaire, et à des savoirs différents. Le professeur traite l'ensemble de ces assujettissements.

Il est possible d'observer des contradictions flagrantes entre ce qui est dit par le professeur, ce qui est donné à voir et à comprendre aux élèves, et la règle effective des interactions avec le milieu. (cf. plus loin l'abus de l'analogie)

Cette structure exposée dans un article publié au Québec a été étudiée et approfondie par Claire Margolinas

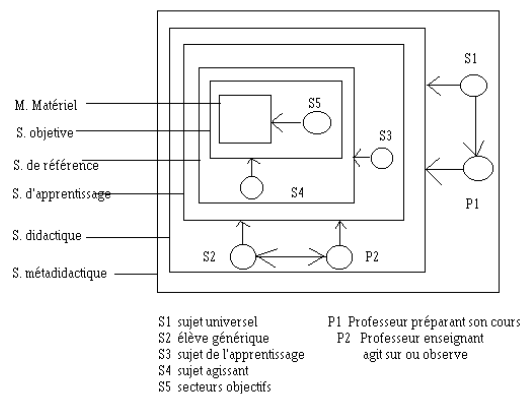



figure 9

La transposition didactique

a) Yves Chevallard a considéré les interactions didactiques comme des cas particuliers d'interactions entre des institutions (qui peuvent être réduites à une personne). Leur activité propre leur fait construire des connaissances par nature différentes, même si un regard extérieur pourrait les reconnaître comme procédant d'une même notion. Lorsque des interactions demandent de la part de ces institutions des connaissances "communes" ces différences se révèlent et créent une sorte de "tension" didactique, qui peut aboutir à un projet didactique. L'action didactique devient alors le moyen général de réduction de cette tension. Mais toute action didactique

créé aussi de la transposition didactique de sorte qu'il faut la comprendre plutôt comme un moyen de régulation que comme un moyen d'action isolé.

b) Cette approche "anthropologique" s'articule parfaitement avec la théorie des situations et la complète. Elle permet un accès plus direct à un certain nombre de problèmes notamment ceux concernant la macro-didactique et le rapport au savoir. La théorie des situations peut étendre avec profit ses méthodes de modélisation à ce champ. Par exemple, qu'est-ce qu'une population "homogène" relativement à une connaissance ? dans quelles conditions cette homogénéité s'accroît ou décroît ? Le choix d'une bonne définition de l'homogénéité joue un rôle important, aussi bien pour comprendre comment les résultats de l'action scolaire peuvent ou non s'adapter à la demande sociale, que pour concevoir l'action didactique à mener dans une classe "hétérogène". L'étude des conditions générales qui permettent à un savoir de percoler dans l'ensemble des institutions d'une société ou qui le condamnent à rester confiné dans des isolats est de première importance pour la détermination des savoirs de la scolarité obligatoire. 

Méthode d'étude

Fidèles à notre méthode, nous allons d'abord faire abstraction des points de vue précédents. Le schéma de base ne se complexifiera que si cela se révèle indispensable.

Pour définir les systèmes par leur fonction, nous commencerons comme dans la partie A par modéliser

les obligations réciproques des systèmes et les interactions minimales qui en découlent, et envisager ensuite leurs possibilités et leurs limites en confrontant les possibilités à la contingence.

Nous appelons provisoirement "contrats" ces engagements réciproques, (qu'ils soient explicites ou non) mais nous réservons l'étude de ce concept et de ce terme pour un chapitre suivant.

2. Les diffusions de connaissance sans intention didactique.

Une première répartition des responsabilités consiste donc à ce que l'émetteur d'un texte n'ait aucune responsabilité didactique à l'égard du récepteur : il n'est pas chargé de lui enseigner quoi que ce soit, et s'il modifie les croyances ou les actes du récepteur, c'est en quelque sorte indépendamment de sa volonté, et non pas conformément à un projet quelconque de sa part.

En partant du minimum de contraintes pour l'enseignant - qui ne sera alors qu'un émetteur de signaux - et en allant vers des responsabilités toujours plus grandes nous trouvons successivement l'émission, la communication, l'expertise, et la production.

Le contrat d'émission

Le contrat d'émission ne lie pas directement l'émetteur et un éventuel récepteur. L'émetteur délivre un message sans se préoccuper des conditions *effectives* de réception. Nous supposerons toutefois dans la suite de ce texte, que ce message est intelligible (au moins pour une certaine institution) et même qu'il

n'est composé que d'énoncés, justes ou faux, mais bien formés.

Dans une situation minimale, l'émetteur pourrait n'être tenu à rien du tout (rien d'autre que ce qui régit la liberté d'expression) et émettre un message inintelligible, même pour lui (l'émission d'un simple brouillage par exemple). Ce contrat limite peut être parfois réellement observé dans des classes : le professeur monologue sans tenir aucun compte de la présence des élèves qui émettent en même temps que lui... du bruit. Ce contrat peut aussi modéliser certaines émissions de télévision ou de radiodiffusion.

Le contrat de communication

Le contrat de communication est plus exigeant. L'émetteur (par exemple le professeur), prend à sa charge de faire 'parvenir' à un récepteur un certain message. Il doit s'assurer de la bonne réception du message (mais non du sens que lui donne le récepteur), et pour cela du bon fonctionnement du canal. Il doit utiliser les répertoires du récepteur (répertoires calligraphiques, phonologiques, orthographiques, grammaticaux, logiques etc.) et au besoin collationner (confronter avec la répétition par le destinataire) ou répéter le message (en particulier à la demande du récepteur). L'interprétation du message est entièrement à la charge du récepteur. Les dysfonctionnements conduisent exclusivement à des mises au point de répertoires.

Les contrats d'émission et de communication sont essentiellement soumis à des contraintes relatives à la forme du message.

Le contrat d'expertise

Le contrat d'expertise est plus exigeant, l'émetteur garantit la *validité* de ce qu'il émet. Il peut être tenu par le destinataire d'établir, à la demande, une certaine validité (la vérité, l'authenticité, l'origine etc.) de ce qu'il énonce (par d'autres voies que l'émission elle-même : en justice par exemple pour certains types d'informations). Le travail d'un "professeur" qui utiliserait ce "contrat" pour diffuser une théorie mathématique, consisterait à énoncer l'un après l'autre les "théorèmes" qui la composent, dans un ordre quelconque. Les énoncés, parce qu'ils seraient déclarés implicitement comme "vrais", deviendraient alors des assertions.

Le contrat de production

L'émetteur garantit la *nouveauté* de son message, la nouveauté ou l'originalité formelle (propriété littéraire ou industrielle) ou la nouveauté du contenu intellectuel et scientifique. Il peut garantir une nouveauté 'absolue' (un nouveau théorème) ou seulement une nouveauté pour une institution particulière (pour les élèves d'une classe par exemple).

Il peut n'être pas tenu d'apporter lui-même la preuve formelle de la validité de son énoncé, mais seulement des preuves indirectes. Par exemple, l'émetteur trouve toujours les racines de certaines équations, mais il ne publie pas la méthode qu'il utilise. Cette situation s'observe dans la tradition des mathématiques ésotériques.

Les contrats faiblement didactiques portant sur un savoir 'nouveau'

Dans ces contrats, l'émetteur accepte d'*organiser* son message en fonction de certaines caractéristiques "théoriques" de son interlocuteur. Il assume certaines responsabilités quant au contenu de ce message, mais aucune quant à ses effets sur le récepteur, même s'il est conscient de modifier son système de décision. Il est important de remarquer que toute activité didactique impliquera une réorganisation du corps des connaissances à transmettre. Toute présentation d'une théorie mathématique possède de ce fait des propriétés didactiques "intrinsèques". La réorganisation des résultats mathématiques aux fins de leur communication entre, de ce fait, dans le champ de la didactique.

Le contrat d'information

L'émetteur garantit à la fois la nouveauté et la validité de son message. Il accepte d'en rendre compte auprès du récepteur qui devient l'informé, celui qui "achète" l'énoncé parce qu'il est vrai et nouveau.

Dans ce cas, l'émetteur doit rechercher l'assentiment de l'informé et, en réponse à sa demande éventuelle, lui fournir certaines "preuves", ses sources, ses références etc. Il peut même être conduit à justifier systématiquement chaque énoncé.

a) **L'information dialectique** et la réorganisation locale des savoirs

Ce "contrat d'information" n'exige pas que les interlocuteurs aient les mêmes références (la même culture, le même système

informatique...), mais seulement qu'ils puissent en trouver de suffisantes pour étayer leur propos du moment. Ainsi ce contrat conduit à une construction dialectique de la conviction du récepteur sous le contrôle de ce dernier. Il est l'instrument essentiel de gestion collective de la vérité conformément à la tradition inaugurée en Grèce cinq siècles av. J.C.

Si l'émetteur (par exemple un professeur), veut pouvoir établir à tout moment devant son interlocuteur (ses élèves), la validité de ses énoncés et en garantir la nouveauté, il a intérêt à se référer à une organisation appropriée des savoirs à transmettre : une construction axiomatique par exemple. Il n'a aucune raison de l'exhiber devant son interlocuteur. Les preuves dépendent des connaissances (réelles ou supposées) du destinataire, elles ne peuvent donc pas être fixées a priori en démonstrations standard.

b) **L'information dogmatique** et l'organisation globale du savoir

Suivre les méandres des questionnements de l'informé peut apparaître aux deux protagonistes comme une perte de temps. Ils ont alors parfois intérêt à se soustraire au contrat dialectique et à proposer pour l'un et/ou demander pour l'autre de "normaliser" les preuves et de les fournir systématiquement. Le contrat devient un contrat 'dogmatique'. Dans ce système le professeur se réfère à un système conventionnel réputé notoire, composé d'énoncés acceptés par tous, et utilise des moyens de dérivation réputés sans mystère pour proposer des "démonstrations" pour tous ses énoncés (contestés ou non).

Ce contrat conduit l'informateur à établir dans la théorie à diffuser, un des ordres axiomatiques auquel elle se prête et à s'en servir comme guide d'ordonnement de ses propos pour économiser des demandes d'explications.

L'axiomatisation de l'information et ses conséquences.

a) L'axiomatique répond ainsi aussi à des contraintes ergonomiques. L'informateur doit ici aussi utiliser les répertoires de l'informé (logiques mathématiques et techniques), mais les preuves (personnelles) prennent la forme de démonstrations (culturelles) qui dépendent moins du destinataire et davantage de l'idée que s'en fait l'émetteur. Si ce dernier, à la limite, ne donnait aucune preuve et n'acceptait pas qu'on lui en demande, ce contrat reviendrait au contrat d'expertise.

Dans le cas du contrat dogmatique, l'informateur doit reformuler les énoncés pour permettre leur démonstration dans le système qu'il prête à l'informé et à les répartir en deux classes :

- ceux qui appartiennent au répertoire de l'informé (répertoire effectif ou supposé), qu'ils soient évidents comme des postulats, acceptés formellement comme des axiomes ou des hypothèses, ou déjà construits et convoqués au cours de la démonstration comme des lemmes ou des définitions

- et ceux qui n'y figurent pas et qui sont donc " nouveaux "

b) Corollaires : toute communication et à fortiori tout enseignement repose sur un répertoire explicite en partie irréductible au savoir communiqué. Aucun langage

ne saurait être totalement autogénétique. Nous rencontrerons plus loin un autre répertoire, celui des connaissances implicites et métamathématiques nécessaires à la compréhension.

Le contrat d'information est celui qui, théoriquement, a cours dans la communauté mathématique pour la diffusion des résultats.

Les motifs de l'émission n'interviennent pas explicitement dans la régulation du contrat d'information en quelque sorte minimal. L'émetteur répond à une demande du récepteur pour une utilisation qu'il ignore. Il y a contrôle constant de la compétence de l'émetteur mais pas de celle du récepteur. L'émetteur ne sait pas s'il est vraiment compris, ni même reçu, si le récepteur ne manifeste aucune réaction. L'émetteur écrit ou dit le savoir de son domaine, dans les termes qui lui permettent de l'exprimer. Ces termes lui sont fournis par son institution d'origine. L'informé garde la responsabilité de l'interprétation et de l'usage de ces informations.

c) Si nous poussons un peu plus loin l'analyse du contrat d'information, il apparaît une autre conséquence importante. Le destinataire devrait avoir intérêt à ne demander à l'émetteur que le minimum d'informations qui lui sont nécessaires pour dériver par lui-même les résultats qu'il désire. C'est à lui de limiter " l'achat " de nouveaux énoncés. Cette clause instaure une nouvelle partition dans le corpus des théorèmes à communiquer, partition entre ceux qui sont dérivables par le destinataire et selon son opinion et ceux qui ne le

sont pas. Bien sûr la dérivabilité dépend des capacités de l'informé et, effectivement, de l'idée qu'il s'en fait, puisque c'est lui qui doit l'apprécier. De même que plus haut, on va donc voir s'installer, soit une dérivabilité dialectique, soit une dérivabilité culturelle imposée.

d) Les contrats didactiques que nous étudierons plus loin intègrent les contrats non didactiques avec des clauses supplémentaires, ils ne sont que des palliatifs provisoires de celui-ci. Il est clair qu'un enseignement doit tendre à mettre l'élève dans la situation de pouvoir s'*informer* lui-même.

Le contrat d'utilisation des connaissances

Ce contrat reprend le précédent et lui ajoute une clause supplémentaire : le transfert vers l'informateur de la responsabilité de montrer à l'informé l'emploi et l'utilité des connaissances qu'il propose. L'informateur doit *par conséquent* accompagner le texte du savoir d'un champ *d'applications* dans lequel ce savoir est supposé jouer un rôle. Ce rôle est variable. Parfois chaque application se déduit du savoir initial qui constitue alors un ensemble de connaissances 'suffisantes'. Parfois il y est seulement nécessaire, autrement dit l'application ne peut être dérivée, démontrée ou calculée sans qu'il soit fait appel explicitement à ce savoir initial, mais d'autres connaissances sont nécessaires. Parfois encore, il n'est ni nécessaire ni suffisant mais il donne une alternative plus économique à des raisonnements, à des langages ou à des calculs déjà connus.

Il est très important de remarquer que ces relations entre un certain savoir et ses applications sont une fiction, une métaphore. Elles résultent dans les cas les plus légitimes, à la fois de l'histoire, de la tradition, et de spéculations diverses. Rattacher entre elles des connaissances, les appliquer et les adapter à de nouveaux problèmes est le fait de l'activité 'historique' aussi bien des hommes que des institutions. Personne ne sait à l'avance quelles seront les applications, les modifications ou le statut d'un savoir dans l'avenir car ces caractères évoluent fortement avec l'histoire. Seules les parties les plus anciennes et les plus stables du savoir peuvent subir ce traitement 'didactique' sans recevoir trop d'objections et de contradictions. Pour enseigner un savoir nouveau, il est nécessaire de lui inventer des applications à la portée de l'apprenant. Ces constructions relèvent de l'ingénierie didactique et bien souvent de la fantaisie

Dans le contrat d'information introduit plus haut, l'émetteur de mathématiques doit organiser une théorie qu'il connaît, de façon à pouvoir l'engendrer avec une certaine partie d'elle-même, mais il garde 'secret' ce rapport et l'élève ignore où vont le mener les énoncés qu'il reçoit. Dans ce contrat-ci le rapport entre la partie générative et le tout engendré devient explicite. Les énoncés donnés comme savoir, restent des théorèmes, mais ceux qui doivent s'en dériver (logiquement ou autrement) changent de forme et de nom. Ils deviennent des questions, des situations ou des problèmes.

Le contrat d'initiation ou de contrôle

a) L'initiateur détermine un champ de connaissances auquel le récepteur veut s'initier et il lui propose les savoirs nécessaires et suffisants, ou au contraire, il lui propose une collection de savoirs et lui donne un ensemble d'applications 'équivalentes' qui le justifient.

Dans les contrats précédents, le récepteur devait décider s'il s'estimait suffisamment informé ou si au contraire il voulait davantage d'informations, ou des précisions supplémentaires sur celles qu'il avait déjà reçues. Dans ce nouveau contrat, l'informateur prend en charge une partie de cette responsabilité : il donne à l'informé un critère pour déterminer s'il a bien 'compris' (et pas seulement reçu) le savoir communiqué. Ce moyen consiste à établir une relation d'équivalence entre deux ensembles d'énoncés, le premier est un ensemble de savoirs communiqués comme tels (par exemples des énoncés d'une théorie), le second est proposé sous forme de questions, d'applications ou de problèmes à résoudre.

b) En postulant l'équivalence informative des savoirs et des applications l'informateur dit à son informé :

- d'une part que la connaissance des théorèmes sera 'prouvée' si le destinataire sait faire la totalité des problèmes proposés,

- d'autre part que pour savoir résoudre tous ces problèmes, il suffit de savoir, et de bien utiliser tel ensemble de théorèmes.

Ainsi l'initiateur montre quels savoirs "se convertissent" en connaissances pour agir dans des

situations déterminées, et quelles connaissances peuvent se convertir en quels savoirs. Les deux ensembles d'énoncés se justifient mutuellement : les applications légitiment la communication des savoirs, les savoirs prouvent la validité des énoncés obtenus en application.

c) Mais cette nouvelle clause repose sur une hypothèse dont la validité effective reste à établir. Cette équivalence annoncée est-elle effective ? Prenons le cas limite : la donnée du système d'axiomes d'une théorie mathématique suffit à en déterminer tous les énoncés. Il est plus difficile d'affirmer que la démonstration de tous les énoncés d'une théorie implique la connaissance explicite de tel ou tel de ses systèmes d'axiomes. Personne n'osera affirmer que tout mathématicien est capable d'obtenir effectivement l'un à partir de l'autre. L'association de savoirs et d'un champ restreint d'applications 'équivalent' est le plus souvent totalement empirique. Elle résulte de pratiques, de conventions et d'habitudes que les travaux actuels de didactique sont loin de pouvoir objectiver.

Théorèmes et problèmes sont des énoncés d'une même théorie, il n'y a pas de différence mathématique entre eux, seulement une différence de forme dictée par une différence de position dans le contrat non didactique d'initiation. Nous verrons plus loin d'autres différences.

Le contrat d'instruction ou de direction d'études

Il s'agit maintenant pour le directeur d'études, en plus de toutes les responsabilités précédentes,

d'indiquer *comment* un savoir peut être appris. Il y a là un nouveau pari, une nouvelle fiction, et un nouveau transfert de responsabilité de celui qui devient un étudiant vers son directeur. Ce dernier propose des séries 'd'exercices' qui sont supposés permettre d'acquérir les connaissances visées sans passer par la conversion des savoirs. Ces exercices sont des problèmes gradués, si semblables entre eux et si proches du savoir communiqué que la solution de l'un peut être transportée *formellement* dans un autre. La démonstration prend alors les caractères d'un calcul ou d'un algorithme. (Toutes les théories mathématiques ne se prêtent pas à ce traitement). L'apprenant peut vérifier qu'il a bien exécuté ou reproduit l'algorithme. Les différences entre les exercices ont pour objet d'illustrer les différents cas possibles et les différentes variantes correspondantes.

Comme plus haut la question de savoir si ces exercices sont effectivement nécessaires et suffisants pour provoquer la 'connaissance' visée, cette connaissance se manifestant par la capacité d'établir la preuve de tout théorème du champ présenté comme problème. De plus l'incertitude précédente demeure et même s'accroît, il n'est pas sûr que les connaissances acquises dans ces conditions soit équivalente aux savoirs culturellement correspondants.

Ces exercices permettent toutefois aux élèves d'évaluer leur apprentissage, et à l'occasion de corriger leurs erreurs de compréhension.

Conclusions sur les contrats faiblement didactiques

a) Remarquons que jusqu'à présent l'élève a gardé la responsabilité principale, celle de la réalisation effective de la communication qui s'effectue selon un processus dans lequel le diffuseur des connaissances à pris une responsabilité croissante. C'est l'apprenant en effet qui décide de l'usage des moyens mis à sa disposition. Son 'instructeur' lui procure les énoncés principaux de la théorie, entourés de lemmes et de corollaires, des problèmes d'application de divers types, des exercices d'exposition ou d'entraînement et des moyens d'évaluation. L'ensemble constitue un moyen fictif mais formel d'instruction mis à la disposition de l'apprenant par l'enseignant. Cette fiction épistémologique fait d'ailleurs partie du savoir communiqué.

b) Le contrôle exercé par l'apprenant sur son instructeur tend à établir une certaine règle d'économie sur la stratégie d'ensemble. Si les messages paraissent à l'apprenant insuffisamment 'nouveaux', trop déductibles ou trop évidents, il pousse l'émetteur à augmenter le débit de son message, à le rendre plus informatif, de façon à mieux occuper le temps de la communication. Il exerce une contrainte opposée dans le cas contraire. Ce contrôle limite l'émetteur qui peut avoir intérêt à alourdir son message, à le rendre redondant ou plus complexe etc. ou au contraire à le laisser très allusif voire ésotérique. C'est seulement si un contrat échoue que le moniteur peut être conduit à lui en substituer un autre, plus fortement didactique,

dans lequel il accepte plus de responsabilité.

c) Les contrats faiblement didactiques prennent en compte le projet de faire approprier un savoir par un interlocuteur, celui-ci étant pris en tant que sujet épistémique, mais non en tant que sujet effectif.

Dans les relations didactiques effectives se glissent fréquemment des phases où les responsabilités du professeur et de l'élève se répartissent selon les variantes du contrat faiblement didactique : contrat d'émission ou de communication, pour la forme, contrats d'expertise, de production ou d'information, pour le contenu, contrat d'application, d'initiation ou d'instruction pour l'usage du message émis.

3. Etude théorique du contrat didactique.

Généralités sur les contrats d'enseignement

a) Dans le paragraphe précédent nous avons considéré les contrats qui ne mettent en présence, effectivement ou potentiellement, que deux institutions : celle qui est enseignée (E-é) et celle qui enseigne (E-a). Nous avons supposé de plus que la demande venait de l'institution enseignée qui prenait à son compte l'apprentissage et l'usage du savoir transmis.

Or cette demande ne peut pas s'exercer de façon éclairée. L'enseigné ne peut pas savoir ce qui est spécifique du savoir avant de l'avoir appris. Il se fie donc à une représentation du savoir qui lui est extérieure et à des connaissances métadidactiques. Concrètement les seuls enseignés à qui peuvent

s'adresser les contrats pas ou faiblement didactiques sont ceux qui se placent en position d'autodidactes.

b) Nous allons maintenant considérer les cas où l'enseigné n'a pas cette position et où quelqu'un prend la décision, ou une partie des décisions pour lui et en conséquence assume en contrepartie une partie de la responsabilité du résultat de l'action didactique entreprise. (Dans le sens restreint et un peu dérisoire de certains anciens dictionnaires, une action didactique est une action où quelqu'un tente d'enseigner quelque chose à quelqu'autre qui ne veut pas l'apprendre).

Il faut alors prendre en considération dans l'étude des contrats, les demandes et les interventions de deux institutions supplémentaires

- l'institution cible (M) à laquelle l'enseigné devra s'assujettir à la fin de l'enseignement, alors qu'il ne le pourrait pas avant ; l'assujettissement futur détermine de fait la matière de l'enseignement (connaissances et savoirs)

- l'institution (D), qui décide que l'enseignant doit préparer l'enseigné à entrer dans les pratiques de l'institution M ; elle délègue sa mission à l'enseignant et lui confère une certaine légitimité à modifier l'enseigné ou à "décider" de son avenir.

En fait ces quatre fonctions, modélisées par quatre institutions potentielles peuvent être assumées par des institutions effectives distinctes ou confondues. Par exemple l'autodidacte en assume au moins trois (D, E-é, E-a), pour s'adapter à la quatrième M.

Au 19^{ième} siècle, Le contrat d'enseignement était un contrat d'instruction. Aujourd'hui il est devenu un contrat d'éducation. Il tend à stipuler essentiellement que l'institution enseignante prend la responsabilité du résultat effectif de son action sur son élève. Est-ce possible ?

Le contrat didactique

La modification intentionnelle du 'récepteur' n'est pas une communication ni même une argumentation, mais une action. L'enseignant tente de fixer directement les états du système enseigné, au besoin sans passer par son jugement et son agrément. La légitimité de cette action tient à diverses conditions :

* Le savoir communiqué n'est pas une production ou un invention personnelle du professeur. Celui-ci au contraire garantit sa conformité avec le savoir qui a cours dans une institution de référence. Il n'est pas arbitraire. Il a été repéré et déterminé, soit avec l'enseigné, soit avec un tiers responsable.

* Ce savoir n'est pas un simple enregistrement d'informations. Il lui correspond un champ dans lequel les capacités de réponses de l'élève ont été modifiées. L'existence de ces situations dans lesquelles le savoir appris révèle son efficacité permet à l'élève d'objectiver après coup l'assujettissement qu'il a accepté ou subi et de s'en libérer. C'est à dire d'oublier en fait les circonstances de l'apprentissage pour ne plus retenir que le savoir et les conditions de son usage (le milieu)

* L'action s'achève lorsque l'enseigné est supposé capable de prendre ses décisions par lui-même (en connaissance de cause). L'assujettissement n'est que momentané.

Le professeur qui veut provoquer un apprentissage doit modifier les systèmes de décisions de l'enseigné, *face à un certain ensemble de situations typiques de M*, (dans un sens qu'il pense favorable à l'adaptation visée et/ou conformément à un savoir constitué). Nous retrouvons le schéma général de la figure 2.

Quelques paradoxes du Contrat didactique

a) Aucun contrat *didactique* entre l'enseignant et l'enseigné n'est possible. Comme nous le faisons remarquer plus haut, les clauses, où la spécificité du savoir à enseigner interviendrait, ne peuvent être l'objet d'un accord entre les deux protagonistes car seule l'aventure de l'acquisition du savoir permet d'en connaître le sens et les conditions. Elles ne sont même pas explicitables. Il n'y a pas non plus de clauses de rupture ni de sanctions.

L'élève ignore donc nécessairement où et comment on veut le conduire. Et il doit accepter de l'ignorer. Prétendre passer de véritables contrats est une illusion. L'apprenant qui l'exigerait se mettrait en danger... de ne rien apprendre. Cette position "adultiste" est pourtant encouragée par nombre de thèses pédagogiques.

Pourtant lorsque l'enseignement échoue ou rencontre des difficultés, chaque parti tend à se comporter comme si un contrat les avait lié et

avait été rompu. Chacun suppose chez l'autre des engagements, l'un à expliquer et l'autre à comprendre, et cherche des clauses et des sanctions de rupture.

b) En supposant qu'un contrat puisse porter sur la nature des connaissances à acquérir ce contrat ne pourrait être que rompu car les connaissances acquises le sont par le remplacement ou la destruction des connaissances anciennes. L'acquisition est en elle même le plus souvent une déciliation, une rupture avec des croyances.

c) Si on admet que les connaissances de l'élève ne se manifestent de façon effective que par des décisions, qu'il prend personnellement dans des situations appropriées, alors le professeur ne peut pas dire ce qu'il veut que l'élève fasse, ni lui dicter ses décisions sans renoncer par ce fait même à les lui laisser produire, donc sans renoncer par la même à les lui "enseigner". Apprendre ne consiste pas à exécuter des ordres, ni à recopier des solutions de problèmes.

d) Si on admet de plus que les connaissances de l'élève doivent être produites elles aussi dans un processus autonome, alors les connaissances formulées par le professeur ne peuvent plus être objet d'une véritable "connaissance" de la part du sujet. La formulation des connaissances tend à faire de leur usage des citations et non des expressions.

Dans la relation didactique, les connaissances s'avancent masquées. Par contre les savoirs peuvent se montrer dans la mesure où ils sont à une distance suffisante des situations que l'élève aura à affronter. Nous

détaillerons ce processus dans le paragraphe suivant. Les stratégies didactiques ont pour objet de contourner les paradoxes fondamentaux et nous allons montrer qu'aucune ne peut y parvenir. Le contrat didactique reste un faux contrat frontalement 'intenable'.

e) Le contrat didactique est nécessairement incertain. Si le professeur était assuré que tous les élèves vont directement résoudre sans erreur les situations et les exercices qu'il leur présente, cette activité se viderait de son contenu didactique et il renoncerait à le proposer. Ni les élèves ni le professeur n'acceptent une telle "perte de temps".

f) Le taux d'erreurs, et même celui des échecs, n'est pas une variable libre du système. Il est fixé et régulé par le fonctionnement. Le professeur gère l'incertitude des élèves. La question est de savoir si cette gestion de l'incertitude produit des connaissances de façon efficace. L'important n'est pas de savoir si l'élève écrit ou non la solution du problème mais dans quelles conditions il l'a écrite.

g) Le contrat est aussi tributaire de l'épistémologie du professeur, et aussi du contrat social général mais nous arrêtons ici l'inventaire des paradoxes, largement suffisants pour justifier une réflexion théorique.

Ces paradoxes ne sont pas des contradictions formelles. Ils marquent seulement le fait que l'enseignement et l'apprentissage se réalisent par des processus qui ne sont jamais en équilibre stable. Ils doivent être compris comme une succession de "corrections" locales dont aucune ne peut être justifiée isolément.

Cette conclusion est assez importante pour que l'on cherche dans la contingence des arguments de validité. Ce dernier point en observant les phénomènes qui marquent la gestion de l'incertitude des élèves et parfois ses dérapages.

4. Quelques effets de contrat didactique

L'âge du capitaine.

La notion de contrat didactique a été exposée pour la première fois dans le compte rendu de mes recherches sur l'échec électif en mathématiques. Il provenait de l'observation d'élèves et notamment celui de Gaël. En même temps que je développais l'étude de ses effets, des chercheurs grenoblois ont mis en évidence un phénomène qui en démontre l'existence.

Les élèves (de CE1) donnent des réponses "absurdes" à des pseudo problèmes (incomplets, sans solution, etc.). Par exemple, "sur un navire on embarque 26 moutons et 18 chèvres, quel est l'âge du capitaine ?" "44 ans" disent les enfants, "dans une classe il y a 4 rangées de 7 élèves, quel est l'âge de la maîtresse ?" "28 ans !" répondent plus de 60 % d'entre eux. Au grand scandale de certains auteurs qui accusent aussitôt l'enseignement. Or les expérimentateurs demandent aux élèves si le problème ne leur a pas paru bizarre. "Si, disent certains des élèves, la question était bête !" "Pourquoi ?" "Parce que les moutons n'ont rien à voir avec l'âge du capitaine !" "Mais alors, pourquoi avez vous répondu ?"

"Parce que la maîtresse le demandait".

Dans une autre recherche à Lyon, avec des professeurs comme cobayes cette fois ci, le phénomène s'est reproduit. Les professeurs ont eux aussi extrapolé et interprété les énoncés pour pouvoir y répondre. Le contrat didactique s'impose à tous et ne s'explique pas par des insuffisances des professeurs ou des élèves. Y. Chevallard a analysé cette expérience et B. Sarrazy a montré les différences de sensibilité des élèves au contrat didactique, leur effet sur leurs performances scolaires.

Nous évoquerons ci-après deux des effets signalés sur la figure 10.

L'effet Topaze et le contrôle de l'incertitude

La première scène du célèbre "Topaze" de Marcel Pagnol illustre un des processus fondamentaux : Topaze fait une dictée à un mauvais élève.

Ne pouvant accepter trop d'erreurs trop grossières et ne pouvant pas non plus donner directement l'orthographe demandée il "suggère" la réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents : "... des moutons étaient réunis dans un parc..." il s'agit d'abord pour l'élève d'un problème d'orthographe et de grammaire... "des moutons étai-hunt... le problème est complètement changé ! Devant les échecs répétés, Topaze mendie une marque d'adhésion et négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre ce "s". On devine qu'il pourrait continuer en exigeant la récitation de la règle, puis en la faisant copier un certain nombre de fois. L'effondrement complet de

l'acte d'enseignement est représenté par un simple ordre : mettez un "s" à "moutons" : le professeur a fini par prendre à sa charge l'essentiel du travail.

La réponse que doit donner l'élève est déterminée à l'avance, le maître choisit les questions auxquelles cette réponse peut être donnée. Evidemment les connaissances nécessaires pour produire ces réponses changent leur signification aussi. En prenant des questions de plus en plus faciles, ils essaie d'obtenir la signification maximum pour le maximum d'élèves. Si les connaissances visées disparaissent complètement : c'est "l'effet Topaze". Le maintien du sens à travers les changements de questions est sous le contrôle des connaissances des maîtres dans la discipline enseignée mais le choix des situations d'apprentissage et leur gestion, habituellement laissés au "bon sens" des professeurs, sont actuellement l'objet d'actives recherches tant théoriques que d'ingénierie didactique.

L'effet "Jourdain" ou le malentendu fondamental

L'effet "Jourdain" — ainsi nommé par référence à la scène du "Bourgeois Gentilhomme" où le maître de philosophie révèle à Jourdain ce que sont la prose ou les voyelles — est une forme d'effet Topaze.

Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait

motivées par des causes et des significations banales.

Exemple : L'élève à qui l'on faisait faire des manipulations un peu étranges avec des pots de yaourt ou des images coloriées se voyait déclarer : "tu viens de découvrir un groupe de Klein".

D'une façon moins grossière, le désir d'insérer la connaissance dans des activités familières peut conduire le professeur à substituer à la problématique véritable et spécifique, une autre, par exemple métaphorique ou métonymique et qui ne donne pas un sens correct à la situation. Souvent les deux problématiques sont présentes, juxtaposées et le professeur essaie d'obtenir "le meilleur" compromis.

Certaines méthodes pédagogiques axées sur les préoccupations de l'enfant provoquent souvent cet effet, mais la réforme des années soixante et l'usage des structures mathématiques qu'elles ont proposé ont été évidemment aussi une puissante incitation à ce jeu.

En même temps, l'idéologie structuraliste lui offrait une justification épistémologique. Il s'agit alors d'un double effet "Jourdain" : le premier au niveau des relations de l'élève avec le professeur : l'élève traite un exemple et le maître y voit la structure. Le second au niveau des relations des didacticiens ou des mathématiciens avec le professeur. Les premiers plaquent une justification philosophique et scientifique sur la pratique du second et la sacralisent, la reconnaissance de la structure est devenue l'activité scientifique.

Les glissements “méta cognitif” et “méta didactique”, la perméabilité didactique

Lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique. Ce remplacement d'un objet d'enseignement par un autre est fréquent. Le professeur qui se lance dans un cours de logique pour “expliquer” une erreur de raisonnement commence ce processus.

Ce n'est pas une erreur didactique en soi, à la condition que la substitution soit provisoire et qu'elle ne se réitère pas. Car l'échec de la tentative d'explication peut conduire à un nouveau glissement : pour expliquer la logique par exemple, on va recourir à un petit dessin, qui va lui même demander des explications et un vocabulaire spécifique etc. Le phénomène peut ainsi se composer plusieurs fois, concerner toute une communauté et constituer un véritable processus échappant au contrôle de ses acteurs. L'exemple le plus frappant est probablement celui qui concerne l'usage des graphes dans les années soixante pour enseigner les structures, méthode à laquelle s'est attaché le nom de G. Papy.

A la fin des années trente, la théorie des ensembles quitte sa fonction scientifique initiale (en analyse fonctionnelle et en topologie) pour devenir un moyen d'enseignement, Les professeurs de mathématiques ont besoin d'un

formalisme fondamental et d'une métamathématique commode que la logique en révolution ne leur offre pas à bas prix. En l'absence d'une introduction par une théorie axiomatique des ensembles ou par une autre théorie (celle des catégories par exemple), qui d'ailleurs aurait seulement repoussé le problème, ils sont obligés d'inviter leurs étudiants à un contrôle sémantique de cette théorie (dite alors "naïve"). Les petits dessins de Bourbaki, pour représenter un voisinage d'un point ne jouent pas de rôle dans l'exposé de la théorie.

Pour éviter les erreurs, il ne suffit plus alors d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle... et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus "syntaxique". Ensuite, pour les autres théories, cet usage de la théorie des ensembles, rendra possible un exposé axiomatique dont la présentation sera plus classique.

Par la suite, la théorie naïve des ensembles, de *moyen* d'enseignement, devient un *objet* d'enseignement pour des enfants de plus en plus jeunes. Le contrôle sémantique est alors confié à un "modèle" qui remonte à Euler² et qui fait appel à des graphes divers³. Or ce "modèle" n'est pas correct (il fait apparaître des frontières, il ne conserve pas la connexité des parties d'un même ensemble dans les intersections, etc.). Il ne permet pas le contrôle attendu et provoque des difficultés d'enseignement. A cause de ces difficultés, ce "moyen" devient lui-même objet d'enseignement et se

²Lettres à une princesse d'Allemagne

³Cercles d'Euler, diagrammes de Venn, Papygrammes (ou patates) de Papy

surcharge de conventions (frontières de couleur), de langages spécifiques (patate) à leur tour enseignés et expliqués à chaque étape de diffusion. Dans ce processus, plus l'activité d'enseignement produit de commentaires et de conventions, moins les étudiants peuvent contrôler les situations qui leur sont proposées. C'est l'effet de "glissement métacognitif".

Il serait naïf de croire que le bon sens aurait permis d'échapper aux conséquences assez extravagantes auxquelles ce processus a conduit (dans certains ouvrages, le septième niveau de régression a été atteint dans des phrases comme "une relation réflexive est une relation bouclée partout"). La force des effets didactiques est incoercible dès lors que les professeurs ne peuvent se soustraire à l'obligation d'enseigner coûte que coûte. Plus le public engagé dans la négociation est vaste et plus le processus échappe au contrôle "naïf".

D'ailleurs le bon sens, comme n'importe quel autre facteur correcteur, ne peut jouer un rôle dans les processus sociaux sans la médiation d'une structure sociale adéquate. Il existe des preuves que ce type d'erreur" n'est pas l'effet de la bêtise ni dans la plupart des cas celui de l'ignorance de la discipline mathématique ; il l'est à peu près dans la mesure "où la maladie est imputable à des erreurs de comportement" — s'il est permis d'utiliser une métaphore hardie.

L'usage abusif de l'analogie

L'analogie est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est utilisée sous la responsabilité de celui

qui en fait usage. Mais son utilisation dans la relation didactique en fait un redoutable moyen de produire des effets "Topaze". C'est pourtant une pratique naturelle ; si des élèves ont échoué dans leur apprentissage, il leur faut donner une nouvelle chance sur le même sujet. Ils le savent. Même si le professeur dissimule le fait que le nouveau problème ressemble à l'ancien, les élèves vont chercher — c'est légitime — la solution qu'on leur a déjà donnée. Cette réponse ne signifie pas qu'ils la trouvent idoine pour la question posée mais seulement qu'ils ont reconnu à des indices, peut-être tout à fait exogènes et non contrôlés, que le professeur voulait qu'ils la produisent.

Ils obtiennent la solution par une lecture des indications didactiques et non pas un investissement du problème. Et ils y ont intérêt car après plusieurs échecs sur des problèmes semblables mais non justifiés, non reconnus, le professeur s'appuiera sur ces analogies soudain renouvelées, pour reprocher à l'élève sa résistance opiniâtre (cet effet est utilisé par R. Devos dans son sketch des deux bouts d'un bois). "Ca fait un bout de temps que je vous le dis !"

Le vieillissement des situations d'enseignement

Le professeur rencontre des difficultés à reproduire la même leçon, bien qu'il s'agisse de nouveaux élèves : la reproduction exacte de ce qu'il a dit ou fait précédemment n'a pas le même effet et le plus souvent les résultats sont moins bons, mais il éprouve aussi et peut-être par conséquent, une certaine réticence à

cette reproduction. Il éprouve un besoin assez fort de changer au moins la formulation de son exposé ou de ses instructions, les exemples, les exercices, et si possible la structure même de la leçon. Ces effets augmentent avec le nombre des reproductions et sont d'autant plus forts que la leçon comprend plus d'interactions entre le maître et l'élève : les leçons comprenant un exposé suivi d'exercices ou une simple instruction suivie d'une situation d'apprentissage ne demandant pas d'intervention du professeur vieillissent moins vite. Cet effet a été observé directement à l'école Jules Michelet de Talence dans de nombreux cas où les maîtres étaient engagés à reproduire une leçon déterminée. Mais les efforts de renouvellement tentés par les enseignants dans le cas où ils sont libres dans leur travail sont un indice aussi sûr et aisément observable.

Ce phénomène, comme les précédents, peut être observé au niveau d'une classe mais aussi dans l'ensemble du système éducatif et entre d'autres partenaires :

les programmes et les instructions ministérielles (ou les curriculums dans d'autres pays) sont le moyen à peu près unique d'explicitation des exigences didactiques du corps social envers les professeurs et le moyen de convenir de la répartition des tâches entre eux. En regard de la complexité des mécanismes à contrôler, ces textes généralement assez courts et qui doivent laisser ouvert l'essentiel des questions pertinentes apparaissent comme tout à fait inadéquats. Leurs modifications périodiques apparaissent, elles, complètement

dérisoires, qu'on les compare entre elles ou qu'on les compare à l'importance que semblent leur accorder les professeurs et l'administration. Les textes pour l'école primaire, depuis les années 1980, n'offrent que des différences minimales sur l'essentiel et ne diffèrent que sur des nuances.

Les modifications de programmes sont l'objet de projections des désirs des professeurs pour le renouvellement de leurs situations didactiques en réponse au vieillissement de leur cours.

La disproportion énorme entre cet investissement de la nouveauté et la stabilité étonnante des pratiques d'enseignement est aussi un indice des contraintes qui interviennent dans la régulation du vieillissement : le temps de réponse à toute modification du système éducatif est très élevé et les rétroactions très faibles et aléatoires. La meilleure garantie contre la dérive est donc une inertie importante. Mais l'activité d'enseignement elle-même réclame un investissement personnel intense de la part du professeur et cet investissement ne peut se maintenir que s'il est renouvelé. La reproduction exige donc un certain renouvellement qui risque de compromettre les reproductions futures. Les moyens de l'équilibre n'étant pas connus, le système tend à faire porter le renouvellement sur des facteurs qui n'ont pas beaucoup d'influence sur l'objet principal de l'enseignement : les modifications de programme obéissent à des processus semblables à ceux de la mode par rapport à l'habillement.

Cette question du vieillissement et de l'effet du temps didactique (3)

soulève une question essentielle pour la didactique : Qu'est-ce qui est réellement reproduit au cours d'une leçon ?

Un professeur qui reproduit la même histoire, la même succession des mêmes activités et des mêmes déclarations de sa part et de la part des élèves, a-t-il reproduit le même fait didactique qui a produit les mêmes effets du point de vue du sens ?

Il n'existe pas de moyen naïf de différencier une bonne reproduction d'une leçon — qui donne dans les mêmes conditions un déroulement identique et aussi un même sens aux connaissances acquises par l'élève — d'une mauvaise reproduction de cette leçon — qui dans les mêmes conditions, donne un "déroulement"

identique mais un sens différent aux connaissances acquises. Dans le deuxième cas, la similitude du déroulement est obtenue par des interventions discrètes mais répétées du professeur qui transforme toute la situation sans affecter apparemment son "histoire".

Savoir ce qui est reproduit dans une situation d'enseignement est justement l'objet de la didactique, ce n'est pas un résultat d'observation, mais celui d'une analyse s'appuyant sur la connaissance des phénomènes qui définissent ce qu'ils laissent invariant. (La reproductibilité des

situations didactiques a été étudiée par Michèle Artigue et le temps didactique par Alain Mercier).

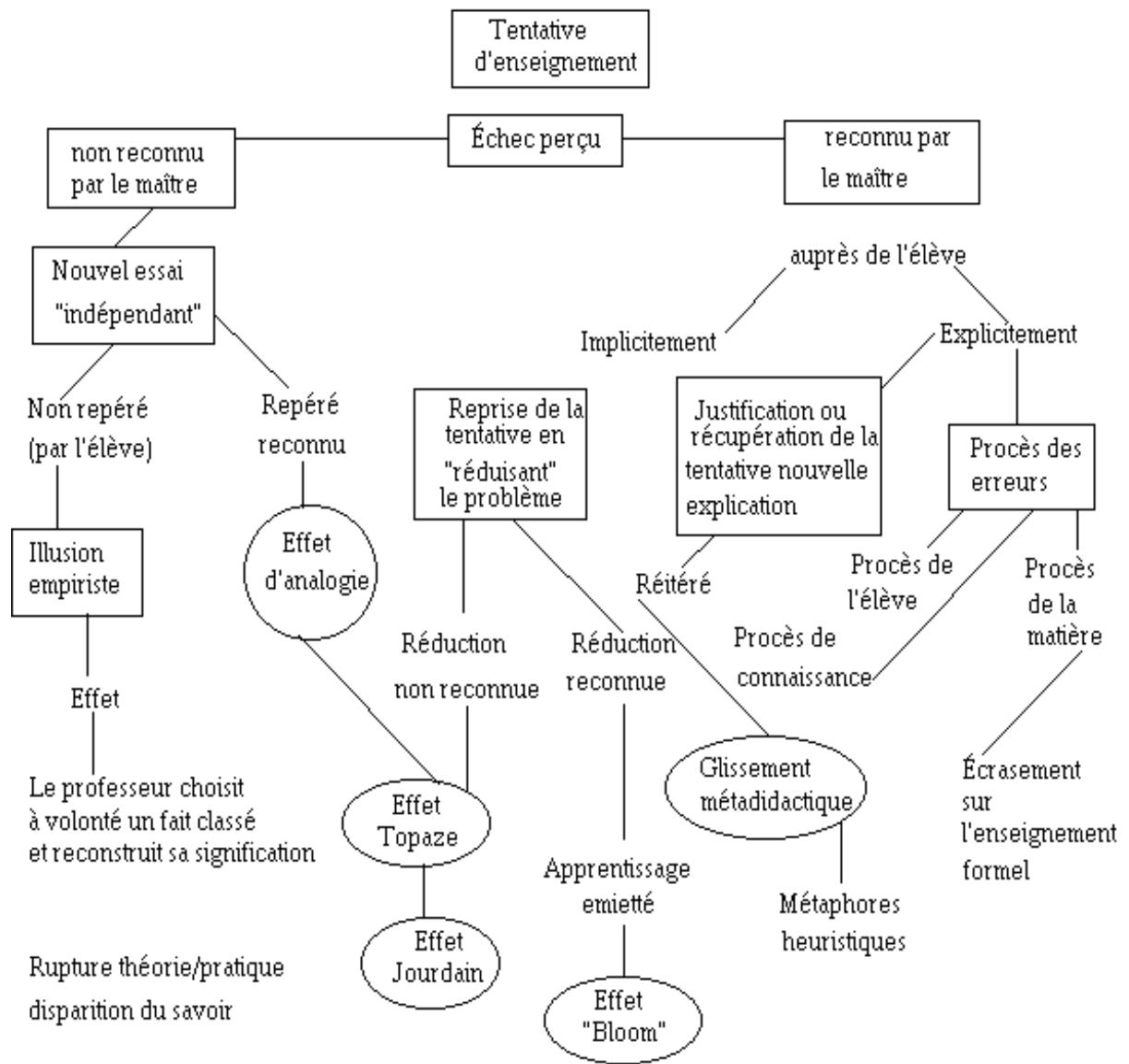


figure 10

C. Les situations didactiques : composantes et stratégies

1. Composante essentielle du contrat didactique : la dévolution.

Nous avons montré que la réalisation effective d'un projet didactique implique la mise en œuvre de situations qui tendent à modéliser le fonctionnement du savoir et des connaissances afférentes (et non transformables ou non transformées en savoirs).

Le concept de dévolution

a) Déclaration 1.

L'enseignement a pour objectif principal le fonctionnement de la connaissance comme production libre de l'élève dans ses rapports avec un milieu a-didactique.

b) Définitions. Production libre : réponse au milieu gérée par le sens, c'est-à-dire par ce que l'élève est capable d'interposer entre ses conditionnements, externes ou internes, et ses décisions; cela implique pour lui la possibilité actuelle, et non pas seulement potentielle, de choisir entre plusieurs voies, pour des raisons "intellectuelles" ; cela implique aussi une production personnelle.

Milieu a-didactique : image dans la relation didactique du milieu "extérieur" à l'enseignement lui-même, c'est-à-dire dénué d'intentions

et de présupposés didactiques ⁴. Un milieu a-didactique possède un modèle non didactique.

c) Déclaration 2.

L'élève acquiert ces connaissances par diverses formes d'adaptation aux contraintes de son environnement. En situation scolaire, l'enseignant organise et constitue un milieu, par exemple un problème, qui révèle plus ou moins clairement son intention d'enseigner un certain savoir à l'élève mais qui dissimule suffisamment ce savoir et la réponse attendue pour que l'élève ne puisse les obtenir que par une adaptation personnelle au problème proposé. La valeur des connaissances acquises ainsi dépend de la qualité du milieu comme instigateur d'un fonctionnement "réel", culturel du savoir, donc du degré de refoulement a-didactique obtenu.

Spontanément l'enfant n'envisage pas le monde comme un système dénué d'intention à son égard, et l'élève a intérêt à débusquer et à utiliser à son profit la machinerie didactique à cause des facilités que cela peut lui procurer. Il est donc indispensable que l'enseignant prépare l'élève à ce fonctionnement a-didactique en l'intégrant dans les phases didactiques: l'élève ne peut apprendre qu'en produisant, en faisant fonctionner et en faisant évoluer les (ses) connaissances - sinon à chaque

⁴ Ce fonctionnement est appelé "a-didactique" puisqu'il envisage le fonctionnement normal des connaissances, en dehors des conditions didactiques (celles où quelqu'un a décidé pour l'élève quel savoir il allait apprendre), que ce fonctionnement soit l'objet d'une description a posteriori, celui d'une étude théorique a priori ou d'une modélisation ou qu'il soit considéré comme l'objectif d'une dédidactification.

instant, du moins assez fréquemment -, dans des conditions "semblables" ou asymptotiquement semblables à celles qu'il rencontrera dans l'avenir.

d) Corollaire 1.

Pour permettre ce fonctionnement, l'enseignant ne peut pas dire à l'avance à l'élève exactement quelle réponse il attend de lui; il doit donc faire en sorte que ce dernier accepte la responsabilité de chercher à résoudre des problèmes ou des exercices dont il ignore la réponse.

e) Définition.

La *dévolution* est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert.

f) Premier paradoxe de la dévolution : Le maître veut que l'élève veuille ne tenir la réponse que de lui-même mais en même temps il veut, il a le devoir social de vouloir, que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler, ce qui incompatible avec une relation contractuelle.⁵

g) Hypothèses : La dévolution présente de grandes difficultés que l'on analyse traditionnellement en termes de motivation de l'élève; les solutions préconisées sont alors de nature psychologique, psychoaffective ou pédagogique. Or la signification de la connaissance et celle de la situation jouent un rôle

important et la didactique propose par conséquent des moyens spécifiques.

h) Méthode d'étude : modéliser sous forme de "jeux" formels les conditions du fonctionnement, de la production et de la genèse de telle connaissance désignée à l'avance ou dont la manifestation est observée. Le but de cette modélisation peut être de fournir une ingénierie ou encore d'expliquer ou de prévoir les comportements des protagonistes de la relation didactique.

Ingénierie de dévolution pour la recherche du terme inconnu d'une somme.

L'enseignement d'une opération arithmétique est souvent essentiellement fondé sur la communication d'une procédure⁶ de calcul associée à un petit univers de problèmes qui est supposé en présenter le sens. Les problèmes de dévolution se posent de façon plus impérieuse et plus évidente pour un enseignement fondé sur l'étude d'une relation.⁷

Il s'agit d'introduire de cette manière, la soustraction avec des

⁵ Telle que "la violence symbolique, imposition par un pouvoir arbitraire culturel" dont parlent Bourdieu et Passeron pour toutes les actions pédagogiques.

⁶R. Kemp oppose ces deux aspects de la pensée mathématique : le procédural et le déclaratif. En fait la théorie des situations permet d'échapper à cette espèce de dichotomie sommaire en montrant les rôles que tiennent ces deux aspects dans les rapports "mathématiques" d'un sujet avec son milieu.

⁷ Un programme de recherches à long terme conduit dans le COREM de Bordeaux a permis dans un premier temps de produire et d'étudier de nombreuses situations didactiques efficaces reposant sur la recherche d'un objet satisfaisant une condition exprimée par l'élève. L'exemple le plus connu est celui des rationnels, introduits par la commensuration (" $\frac{3}{4}$ est la grandeur qui, multipliée par 4, est égale à 3 unités") à la place de la conception habituelle du partage de l'unité ("c'est la grandeur obtenue en partageant l'unité en 4 et en prenant 3 de ces parts").

enfants de 7-8 ans (CE1). Habituellement les enseignants présentent les savoirs qu'ils veulent enseigner comme des réponses à des questions, peut être pour éviter le dogmatisme. Mais ils se focalisent habituellement sur l'enseignement des réponses, les questions n'étant là que pour les introduire et les justifier. De plus ces réponses sont rarement des relations ou des assertions, qui pourraient garder un sens même en étant isolées, ce sont essentiellement des procédures dont les questions introductives sont étroitement assujetties à accompagner l'acquisition progressive. Détachés de leur contexte, les algorithmes deviennent des réponses acquises pour des questions à venir sur lesquelles on ne sait pas grand chose.

L'enseignement décrit ci-après a pour ambition de faire passer les questions du domaine de l'enseignant à celui de l'élève, d'enseigner les questions autant que les réponses, et autant que possible d'enseigner les connaissances avec leur sens.

Tout l'apprentissage s'organisera autour d'une même situation de base, qui se répétera en évoluant : «le jeu de la boîte ». L'enseignant a sur son bureau une boîte cubique en plastique opaque, assez grande. Elle contient des pièces de type "blocs DIENES" (entre une dizaine et une centaine, il peut y avoir plusieurs pièces identiques). Il s'agit toujours de dire combien cette boîte contient de pièces d'un type donné mais par moments ce nombre ne peut être connu sans un comptage effectif, alors qu'à d'autres moments il est possible de le prévoir par un calcul

sur les renseignements connus. Bien sûr, la plupart du temps, les élèves ne savent pas dans quel cas ils se trouvent. Le signe d'une certaine connaissance de la soustraction sera justement de savoir finalement quand et comment «on » peut déterminer ces nombres, et de repérer des situations que "le jeu de la boîte" peut modéliser.

Première étape : LA DÉVOLUTION DE LA DEVINETTE

L'enseignant présente la boîte pour la première fois. Il demande aux élèves "combien pensez-vous qu'il y a de pièces dans cette boîte ?" puis "combien de pièces rondes ?" "combien de pièces qui ne sont pas rondes ?". Le jeu va se répéter: "je remets tout dans la boîte, combien y en a-t-il maintenant ?" "J'en enlève une poignée, combien en reste-t-il ? combien dans la poignée ?" "Combien de pièces rouges?, combien de pièces qui ne sont pas rouges ?" etc. A chaque question les élèves produisent une réponse sur leur cahier de brouillon, puis l'un d'eux vient compter les pièces dans la boîte pour connaître la solution de la devinette posée. "Ceux qui ont deviné juste ont gagné les autres ont perdu.

Tant que l'élève n'envisage pas une possibilité de prévoir la solution, et donc imagine un moyen pour cette prévision, le professeur ne peut pas lui faire comprendre qu'il lui pose un problème où il y a quelque chose à comprendre et à apprendre.

La situation se présente donc comme une situation d'action dont la stratégie de base est la réponse au hasard.

Mais la situation se "reproduit", les enfants apprennent ce qu'ils ont à faire, comment ils savent qu'ils ont gagné et qui le décide... Tous les élèves doivent et peuvent produire une réponse. Tous ou presque à ce moment là pensent qu'il faut toujours compter, sinon "on ne peut pas savoir". Un des plaisirs de la devinette réside dans le fait qu'on ne sait pas très bien si on va réussir ou non. La répétition du jeu permet aux élèves d'en comprendre la consigne et le vocabulaire technique minimal.

Mais pour passer à un vrai problème faudra-t-il donc enseigner une méthode de solution ? ou plutôt plusieurs puisqu'il se présente plusieurs cas ?

Les enseignants ont des difficultés à accepter le jeu de la devinette : "nous avons tant de mal à obtenir que les élèves ne répondent pas n'importe quoi !". Certains élèves aussi : ils sont gênés et refusent de répondre, voyant bien qu'ils ont les plus grandes chances de "perdre" ils craignent d'être mal jugés pour cela. Ceux qui "gagnent" pensent que "c'est triché". Cette situation rompt complètement avec le contrat didactique habituel où il faut obtenir la réponse par l'exercice, le truchement d'un savoir repérable. Or, ce premier contrat de base est ici nécessaire, justement pour permettre à la prévision rationnelle d'émerger d'elle-même et de se définir contre la réponse au hasard.

Deuxième étape :
L'ANTICIPATION DE LA SOLUTION

Certaines questions sont si simples que les élèves n'envisagent

qu'une réponse. Par exemple, on vient de compter toutes les pièces en les mettant dans la boîte : 52 puis on a sorti, pour les compter, toutes les pièces qui ne sont pas grandes rondes, rouges et épaisses : 50. L'enseignant : " combien y a-t-il de pièces maintenant dans la boîte ?" Beaucoup d'élèves pensent que la solution sera 2. Leur réponse est une anticipation de la solution, mais elle s'impose à eux sur le mode de la contingence (de l'évidence).

En proposant ainsi des petits nombres ou des nombres présentant une petite (ou une très grande) différence, l'enseignant rencontre des cas intermédiaires où la conviction n'est pas aussi grande, mais où toutes les réponses n'apparaissent pas aux enfants également plausibles. Ils entrent ainsi dans une nouvelle position (celle d'un sujet cognitif), plus réflexive par rapport à la situation d'action précédente, puisque leur réponse peut être l'objet, de leur part, d'une appréciation sinon d'un calcul ou d'un raisonnement.

La formulation des questions varie mais garde toujours les caractères d'une conversation courante : "ce qui est dans la boîte", "tels objets", "ce qui manque", "ce qui reste", "les autres" etc. Par contre le " jeu", son organisation et ses termes sont maintenant bien identifiés et institutionnalisés. Un élève peut faire jouer ses camarades et exiger le bon déroulement.

Troisième étape :
LA DÉCLARATION ET SA MISE À L'ÉPREUVE

Cependant l'enseignant s'enquiert de plus en plus souvent

avant d'accepter le comptage "tu penses que tu vas gagner ?" "Pourquoi ?" "Êtes-vous sûrs ?".

Dans certains cas assez simples, certains élèves expliquent une méthode: Il y avait 37 cubes, il en reste 31, combien le maître en a-t-il caché dans sa main ? "J'ai compté sur mes doigts les cubes cachés 32, 33...jusqu'à 37". Plus rare : "Il y avait 21 cubes il en reste 2, le 21ème et le 20ème, alors on a enlevé jusqu'au dix-neuvième."

Ainsi la réponse peut changer subtilement de statut, le couple : « terme "33" / résultat : "gagné" » va devenir « l'assertion : "je dis qu'il y a 33 cubes dans la boîte" / épreuve : c'est vrai ».

Bien sûr, l'enseignant reste très neutre et accepte aussi bien : "j'ai bien regardé de ma place et j'ai pu compter qu'il y en avait 5." Il n'anticipe pas sur la signification des réussites : le fait de faire un raisonnement et de trouver la solution ne prouve pas que le raisonnement est bon, même s'il est effectivement correct ! Le comptage est alors le moyen institutionnel de la mise à l'épreuve de la réponse et pour certains déjà un moyen — mental et privé — d'anticipation de l'épreuve et d'obtention de la réponse.

Quatrième étape :

DÉVOLUTION ET

INSTITUTIONNALISATION D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE A-DIDACTIQUE

À ce moment, l'enseignant peut déclarer qu'il s'agit :

- pour chacun, d'apprendre à répondre en étant sûr de sa réponse

ou de savoir qu'on ne peut pas être sûr ;

- pour la classe, de trouver sans que ce soit le maître qui l'enseigne et de dire quelles méthodes on peut employer ;

- pour chacun, d'apprendre en réitérant des essais, en profitant des idées des autres si on les croit bonnes.

"Peut-on améliorer ses prévisions ?" En favorisant les descriptions de stratégies et les mini-débats sur des réponses ou des tactiques, qu'il évite d'institutionnaliser prématurément, le maître s'attache à entretenir l'espoir qu'on peut apprendre à gagner, et le plaisir d'y parvenir avec un peu de difficulté — (juste ce qu'il faut de difficulté pour optimiser le plaisir) — afin d'obtenir le maximum de transferts vers le niveau de contrôle par la connaissance privée, celle qui sollicite le plus une activité intellectuelle assez noble. La conduite didactique d'une telle situation a pour objet d'assurer des équilibres fondamentaux :

- Equilibre (oscillations autour d'une position) entre incertitude et certitude, désordre et ordre, difficulté et facilité...

- Equilibre entre les niveaux de contrôles : l'esprit ne peut pas manier en même temps trop de conditions trop incertaines. La maîtrise de l'incertitude passe par une bonne répartition des charges entre les différents niveaux d'adaptation. Suffisamment de savoir bien connu, un peu de savoir en voie d'acquisition, une activité cognitive publique et privée juste suffisante

pour justifier mais permettre aussi les interactions etc.

- Equilibre temporel et rythme : Si les savoirs et les algorithmes ne viennent pas assez vite soulager les modèles implicites et les connaissances, par conversion, par information ou par enseignement, la recherche personnelle s'essouffle (se complexifie, se sclérose et échoue), le contrat didactique se vide de son objet. Si, au contraire, ils viennent trop vite, la compréhension peut n'avoir pas eu le temps de donner du sens à ces savoirs etc.

- Equilibre entre le plaisir de se définir par son activité intellectuelle et celui d'obtenir une sécurité reconnue de façon rapide et efficace, sans activité intellectuelle excessive par l'usage d'un savoir reçu.

- Equilibre entre le désir consommé (par des tâches difficiles ou peu gratifiantes ou simplement par l'accomplissement d'un projet...) et le désir produit (par des succès, des épreuves surmontées...).

- Equilibrés sociaux et culturels dans la classe entre le nombre de producteurs et de consommateurs d'idées, de réussites et d'échecs...

La gestion de ces équilibres exige de nombreuses qualités pédagogiques et psychologiques mais elle repose d'abord sur des choix didactiques. Dans l'exemple que nous donnons le choix de la suite des valeurs numériques liées à des stratégies probables à proposer aux élèves au moment opportun est décisif.

"La découverte et l'emploi du savoir" est une pièce de théâtre mise en scène par l'enseignant, où

chaque élève va se hasarder dans un rôle assez délimité mais c'est aussi un milieu qui doit lui laisser de la liberté à l'endroit où il doit s'exprimer. La juxtaposition de ces saynettes constitue son histoire.

Cinquième étape : LE CALCUL COMME ANTICIPATION DE LA PREUVE

Cette étape est racontée dans "le cas de Gaël" ⁸. Il y avait 52 objets dans la boîte. On en a retiré dix huit qui sont visibles, un élève a répondu qu'il en reste 30 dans la boîte. Au moment où cet élève va contrôler le résultat par comptage, l'enseignant l'arrête. Tu es sûr ? Tu veux parier ? Bon, avant de conclure le pari, tu peux compter et tester ta réponse. L'enseignant fait compter l'élève : 30 dans la boîte, montrant un des 18 objets hors de la boîte, 31, un autre 32... l'enfant finit de compter : 48.

M : Tu trouves qu'il y a 48 objets en tout ?

E : Oui.

M : Et c'est vrai ?

E : Non, il y en a 52 !

M : Alors tu tiens le pari ?

E : Non.

M : Ouf, tu n'as pas perdu. Alors tu peux essayer encore, avec un autre nombre.

Le maître enseigne donc une méthode pour améliorer les chances de deviner juste. Elle n'est pas très performante mais elle va permettre de nombreuses découvertes et par des perfectionnements variés elle aboutira à la méthode standard encadrée de nombreuses autres méthodes.

⁸ Voir G. Brousseau : "La théorisation de l'enseignement des mathématiques." Thèse d'état (1986).

Cette étape marque le début du passage, pour l'élève, de l'emploi d'une vérité contingente à celui d'une vérité nécessaire. L'élève est conduit à prévoir la valeur de sa réponse en simulant la vérification par comptage. Ce raisonnement apagogique n'est pas spontané mais l'usage le rend familier et il permet des recherches tout en donnant une sécurité à ceux qui commençaient à s'essouffler.

Cette phase transforme les "réponses" écrites par les élèves sur leur cahier en "essais". Après avoir choisi un nombre les élèves peuvent l'examiner - en fait ils doivent le faire, car cela est présenté à l'intérieur du rite — chercher s'il convient, c'est-à-dire s'il satisfait la relation connue— et le rejeter au besoin. Une distance temporelle et réflexive très importante s'introduit ainsi afin de permettre le passage de l'exécution d'algorithmes à l'examen d'une situation, à la considération d'hypothèses etc.

La situation simule un milieu qui détient des secrets que l'on peut lui arracher en les déduisant d'informations adéquates que l'on tire de lui. Ils ne peuvent pas encore obtenir la réponse correcte mais ils peuvent éprouver celle qu'ils donnent. C'est à partir de ce moment là qu'il est légitime de les voir donner une réponse s'ils sont sûrs et s'abstenir sinon. Et ce n'est plus seulement sur la base d'un contrat moral imposé. Cette phase permet que s'établisse enfin une négociation sur ce que l'élève fait lorsqu'il cherche: il n'a peut être pas trouvé la bonne réponse mais il peut au moins indiquer ce qu'il a essayé et pourquoi, comment il a corrigé, ou formé un nouvel essai etc.

Bientôt il faudra rejeter les recherches par exhaustivité et même les tâtonnements suivant une morale explicite d'adaptation au milieu : "Pour répondre à la question posée l'élève répond en agissant sur le système, en s'adaptant pour améliorer son efficacité "etc. Le processus comporte vingt deux étapes au cours desquelles les relations des élèves au savoir évoluent. L'addition remplacera le comptage comme méthode d'anticipation du résultat, puis elle deviendra si communément admise et si sûre qu'elle se substituera au comptage comme preuve cette fois, rendant ainsi inutile le recours au matériel. En même temps que les méthodes de calcul de la soustraction se multiplieront et se perfectionneront, l'exploration explicite des problèmes susceptibles d'être modélisés par le "Jeu de la boîte" permettra une classification de ces problèmes par les élèves suivant (implicitement pour eux mais explicitement pour le maître) les conceptions qu'ils mobilisent.

2. L'autre composante : l'institutionnalisation.

Les connaissances

Rappelons d'abord notre projet initial :

Le choix des conditions d'enseignement que nous venons d'évoquer se justifie essentiellement par la nécessité de donner un sens aux connaissances.

Le sens d'une connaissance est formé :

- du "tissu" des raisonnements et des preuves dans lesquels elle est impliquée avec, évidemment, les

traces des situations de preuves, qui ont motivé ces raisonnements ;

- du "tissu" des reformulations et des formalisations à l'aide desquels l'élève peut la manipuler, accompagné d'une certaine idée des contraintes de communication qui les accompagnent ;

- des modèles implicites qui lui sont associés - soit qu'elle les produise, soit qu'elle en résulte - et des traces des situations d'action qui les fonctionnalisent, ou qui, simplement, les contextualisent ;

- et des rapports plus ou moins assumés entre ces différentes composantes, rapports essentiellement dialectiques. L'enchaînement "question/réponse" par exemple : les questions tendent à s'articuler entre elles - indépendamment des réponses reçues - et les réponses font de même de leur côté. Articuler de "bonnes" réponses avec de "bonnes" questions conduit à reformuler alternativement et pertinemment (nous dirons dialectiquement) les unes et les autres.

Les différents types de situations dont nous avons évoqué la dévolution ont pour objet de faire que l'élève donne lui-même un sens aux connaissances qu'il manipule en conjuguant ces différentes composantes.

Nous avons cru un instant avoir envisagé toutes les classes possibles de situations. Mais au cours de nos expériences à Jules Michelet, nous avons vu que les maîtres, au bout d'un moment, avaient besoin de ménager un espace ; ils ne voulaient pas passer d'une leçon à la leçon suivante et souhaitaient s'arrêter, pour "revoir ce

qu'ils avaient fait", avant de continuer : "quelques élèves sont perdus, ça ne va plus, il faut faire quelque chose." Il a fallu un certain temps pour nous apercevoir qu'ils étaient vraiment obligés de faire quelque chose pour des raisons qu'il fallait s'expliquer.

Les situations "a-didactiques" sont les situations d'apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances. Nous avons fabriqué des situations a-didactiques de toutes sortes. Le maître était là pour faire fonctionner la machine, mais, sur la connaissance elle-même, ses interventions étaient pratiquement annulées. Nous avons là des situations d'apprentissage - au sens des psychologues - et on pouvait penser que nous avions réduit l'enseignement à des successions d'apprentissage. Or, nous avons été obligés de nous demander ce qui justifiait cette résistance des maîtres à la réduction complète de l'apprentissage aux processus que nous avons conçus. Il ne s'agissait pas de faire leur procès ou celui des méthodes mais de comprendre ce qu'ils avaient légitimement besoin de faire et pourquoi ils avaient besoin d'une certaine opacité pour le faire, face aux chercheurs.

C'est ainsi que nous avons "découvert" (!) ce que font tous les enseignants à longueur de cours mais que notre effort de systématisation avait rendu inavouable : ils doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et ce qui

a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe, comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles, ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir.

L'enseignant devait constater ce que les élèves devaient faire (et refaire) ou non, avaient appris ou avaient à apprendre.

Cette activité est incontournable : on ne peut pas réduire l'enseignement à l'organisation d'apprentissages.

La prise en compte "officielle" par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique :

cette double reconnaissance est l'objet de l'INSTITUTIONNALISATION.

Le rôle du maître c'est aussi d'institutionnaliser ! L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action - on reconnaît la valeur d'une procédure qui va devenir un moyen de référence - que sur la formulation. Il y a des formulations qu'on va conserver ("ça se dit comme ça", "celles-là valent la peine d'être retenues"). Et pour les preuves de la même façon, il faut identifier ce qu'on retient des propriétés des objets qu'on a rencontrés. Il est clair qu'on peut tout réduire à de l'institutionnalisation. Les situations classiques sont des situations d'institutionnalisation sans

prise en charge par le maître de la création du sens : on dit ce que l'on veut que l'enfant sache, on lui explique et on vérifie qu'il l'a appris. Au départ, les chercheurs ont été un peu obnubilés par les situations didactiques parce que c'était ce qui manquait le plus à l'enseignement classique.

3. Les stratégies fortement didactiques portant sur un savoir 'nouveau'.

Nous avons vu plus haut sur quelle fiction épistémologique s'installent les trois derniers contrats. La légitimité 'historique' de la position et de la fonction d'un savoir peut-elle servir encore lorsqu'il s'agit de le faire acquérir réellement par un sujet ? Comment peut-on affirmer que ce savoir est effectivement équivalent à un certain ensemble d'exercices, auquel son acquisition entraînera certainement la réussite ? Les critères empiriques de dépendance entre les acquisitions sont encore extrêmement flous et ceux dont nous disposons vérifient très peu les assertions théoriques.

La transformation de ces applications en exercices d'évaluation par le professeur (évaluation de son enseignement, évaluation du savoir appris, évaluation de l'élève, etc.) et à fortiori en exercices d'apprentissage pose de nombreux problèmes de didactique, d'épistémologie et de psychologie cognitive.

Nous allons examiner différentes stratégies définies par le renvoi de la responsabilité principale à tel ou tel des éléments de la

situation didactique, et par les hypothèses épistémologiques qui sont associées à ces contrats

Le contrat d'imitation ou de reproduction formelle

Le professeur s'engage à faire effectuer, par l'élève, et par un moyen quelconque, une tâche qui est reconnue par la culture comme la marque de l'acquisition d'un savoir : par exemple, l'élève dira le texte d'un théorème, écrira la solution d'un problème, reproduira à la demande une activité déterminée. Le moyen par lequel la production de l'œuvre de l'élève est obtenu n'entre pas en compte car c'est l'activité elle-même qui est supposée être la source et la preuve de l'apprentissage. Qu'un virtuose ou un peintre génial aient ou non beaucoup travaillé et soient ou non en mesure de commenter leur œuvre n'a pas d'importance.

Ainsi en mathématiques l'enseignant peut exiger de l'élève qu'il recopie la correction d'un problème, qu'il récite un énoncé, qu'il imite une procédure etc. La traduction des ordres du professeur en actes n'exige pas le passage par la connaissance visée. Il serait périlleux sous ce prétexte d'ignorer que ce type de stratégie peut apporter une contribution importante à certains apprentissages. Le fait que ces moyens de reproduction, par imitation, n'exigent pas de formulation de raisons ou d'explications, etc. leur confère des propriétés intéressantes, par exemple pour acquérir 'du métier'.

L'élève s'engage à effectuer la tâche définie à la condition qu'elle soit complètement réductible au

répertoire qu'il possède. Dans ce système l'exécution de la tâche par l'élève n'est pas donc pas l'objet d'un vrai contrat didactique. L'effet didactique de l'exécution de la tâche n'est assuré que par les croyances du professeur ou de la culture. La croyance en ce que l'activité engendre la connaissance (la main façonne l'esprit) a été appuyée par de nombreuses thèses pédagogiques. L'opinion répandue 'j'entends j'oublie, je vois je comprends, je fais je retiens' tendrait à faire du contrat de reproduction une panacée. C'est une position bien excessive.

Le contrat d'ostension

Le professeur "montre" un objet, ou une propriété, l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance, ou plutôt de reconnaissance, ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir. Il est sous-entendu que cet objet est l'élément générique d'une classe que l'élève doit imaginer par le jeu de certaines variables souvent implicites. Ce procédé fonctionne assez bien dans la vie courante, pour faire identifier une personne, une espèce animale ou un type d'objet etc. à l'aide d'un répertoire de reconnaissance "universel". Il est en tous cas exigé banalement dans les rapports institutionnels élémentaires.

Le contrat didactique d'ostension repose sur ce succès, mais il est insuffisant pour "définir" un objet mathématique. Par exemple "définir" un polynôme comme une somme de monômes, ou présenter le

dessin d'un carré, ou "décrire" un décimal comme un nombre comportant une virgule, ne permet pas de déduire les propriétés caractéristiques de ces objets mathématiques c'est à dire de reconnaître quelles sont les factorisations compatibles avec la structure d'anneau, que l'égalité ou la perpendicularité des diagonales peuvent se déduire d'autres propriétés.

Le professeur l'exigera néanmoins et l'élève s'y pensera tenu, soutenus par les idées suivantes: le professeur doit utiliser un répertoire de reconnaissance à la portée des élèves, les moyens de reconnaissance "généraux" sont "universels" et donc identiques pour le professeur et pour l'élève qui doivent "voir" la même chose dans les mêmes objets. La base du contrat est donc une hypothèse épistémologique empiriste et réaliste qui arrange apparemment les deux parties. Elle permet au professeur de prétendre communiquer une connaissance en faisant l'économie à la fois des situations d'action où elle transparaît, de sa formulation et de l'organisation du savoir correspondant. Cette présentation ostensive permet d'ailleurs une "familiarisation" avec un objet d'études qui sera supposé être repris et redéfini plus tard. Le pouvoir de "généralisation" prêté à l'élève (et exigé de lui) ne peut fonctionner que dans le cas où il est culturellement et didactiquement soutenu par une fréquentation ou un "frayage" qui crée un domaine et une pratique d'usage commun. Il ne peut pas être mathématiquement justifié.

L'induction radicale exigée par le contrat d'ostension échoue souvent. Le professeur soutient la fiction de sa légitimité et de sa fécondité par des contrats d'analogie. La classe n'est plus suggérée par un mais par plusieurs éléments, dont les propriétés "visibles" communes et leurs variations sont supposées plus "génériques".

Le contrat d'ostension, bien que fondé sur une épistémologie "fausse" est pourtant très utilisé par les enseignants car il fonctionne très bien dans de nombreux cas où une définition mathématique serait trop lourde ou inutile.

Le contrat de conditionnement

La production (obtenue par imitation ou par exécution d'un ordre) d'une tâche n'étant pas le plus souvent un garantie que l'élève peut la reproduire en toute circonstance, l'enseignant est conduit à chercher des conditions qui fonctionneront comme des *causes d'apprentissage*, indépendamment des savoirs du sujet et de ceux qu'on veut lui enseigner, c'est à dire de ses *raisons de savoir* ce qu'il a appris.

Les thèses associationnistes et béhavioristes apportent des justifications à la répétition de situations de reproduction, ou de toute situation didactique, pour en assurer le succès. Plus que d'autres ce contrat se prête à des usages excessifs car il laisse peu de place à des indices conduisant à sa propre régulation. Si le psittacisme n'a aucune vertu dans le domaine des savoirs, il serait vain de nier la place que peuvent tenir les connaissances ou les apprentissages

formels dans le fonctionnement cognitif même le plus évolué. Exiger la 'récitation' d'un savoir peut conduire l'élève à des réflexions personnelles intéressantes sur ce savoir. Les connaissances acquises implicitement dans des pratiques répétées ont leur intérêt.

Concrètement le professeur prend à sa charge l'organisation d'une répartition 'raisonnée' d'exercices 'raisonnablement' répétitifs, et légèrement informatifs et gère le débit en fonction du rendement de son procédé qui est globalement assez faible. Recourir exclusivement aux causes d'apprentissage sans se soucier des raisons de savoir est un procédé désespéré.

Le rôle de l'élève est de se prêter à la répétition. Il peut - et son professeur aussi - croire que le temps se chargera de lui enseigner (de le familiariser avec) ce que ni l'un ni l'autre n'affrontent sur le moment. Le danger vient de ce que ce n'est pas entièrement faux.

La maïeutique socratique (contrat C 3)

Le professeur choisit des questions telles que l'élève puisse en trouver les réponses avec ses propres ressources, et il les organise de façon à modifier ses connaissances ou ses convictions. Le professeur modifie ses questions en fonction des réponses de l'élève. Mais le choix des questions n'est soumis à aucun contrat didactique, elles peuvent être très ouvertes ou très fermées comme dans le dialogue du Menon, elles pourraient a priori emprunter n'importe quelle voie rhétorique et obtenir la 'bonne' réponse par des

analogies, des métaphores etc. Aussi ce contrat pourrait-il être considéré comme un cas particulier du contrat de reproduction (C1) en ce sens que le professeur fait dire à l'élève le savoir qu'il vise à lui transmettre en s'abstenant de le lui dire lui-même. Toutefois le passage des ordres aux questions introduit une grande différence. Tout dépend de l'idée que le professeur se fait du savoir et de la connaissance qu'il en a. (l'épistémologie du professeur et ses qualités de mathématicien). Pour Platon, la théorie de la réminiscence assurait que la production d'un indice de savoir était associée à un savoir correspondant parce que ce dernier était 'déjà là'. En conséquence il est inutile de l'apprendre au sens moderne, 'dire' équivaut à 'savoir'.

Combinée à d'autres conditions, elle est une des sources de certaines formes d'enseignement programmé.

La maïeutique, assez appropriée à un préceptorat se prête beaucoup moins bien à l'interaction entre un professeur et une classe. La maïeutique collective est pourtant très employée et provoque de nombreux effets didactiques plus ou moins négatifs.

Un de ses principaux inconvénients vient de ce qu'elle tend à exclure les interactions du sujet avec un milieu effectif. Toutes les situations 'a-didactiques' en particulier les problèmes, sont difficiles à inclure dans une maïeutique à cause de la dispersion des réponses et des problèmes qu'ils peuvent soulever.

Les contrats d'apprentissages empiristes (contrat C5)

Dans ce cas la connaissance est supposée s'établir essentiellement par le contact avec le milieu auquel l'élève doit s'adapter. La responsabilité de l'apprentissage est renvoyée au milieu et à la nature.

Dans les formes les plus simples la lecture est presque directe, l'élève perçoit en 'voyant' la structure (sans processus intermédiaires, ni culturel ni cognitif). Cette position a été identifiée par Aebli⁹ comme un *empirisme sensualiste*, appuyée sur des théories épistémologiques comme celle de la "gestalt" ou des traces mémorielles. Jointe à l'idée que la lecture directe peut être aussi immédiate, elle conduit à des stratégies didactique d'**ostension** :

le professeur montre un objet et l'élève est supposé y voir les notions, les concepts, les propriétés etc.

Ce que l'élève ne perçoit pas du premier coup, il le découvre et l'apprend par une fréquentation répétée des mêmes circonstances. L'idée que c'est la répétition des contacts directs avec le milieu qui enseigne, conduit à l'apprentissage 'par', et au moins 'sur' 'le terrain' ou par 'frayage'. Les méthodes Freinet, certaines méthodes actives, ainsi que le constructivisme radical, se justifient en partie par des points de vue similaires. Le savoir quand il n'est pas ignoré n'est qu'un commentaire, qu'une description de ce que la nature nous enseigne, un raccourci d'action, ou d'apprentissage, ou même un simple moyen didactique.

Les contrats constructivistes (contrat C.6)

Dans ce nouveau contrat les situations qui conduisent l'élève à l'apprentissage de connaissances ne sont plus des situations 'naturelles'. Le professeur organise le milieu et lui délègue la responsabilité des acquisitions. Mais cette organisation est dérivée essentiellement du savoir visé et de la connaissance des processus d'acquisition des élèves et non pas seulement modélisée des situations 'de référence' rencontrées dans l'institution cible, ou dans l'institution savante qui produit le savoir. Ce milieu peut d'ailleurs être effectif ou fictif, il est souvent l'un et l'autre suivant diverses conditions ergonomiques. Les savoirs (anciens) ne se manifestent que comme prérequis, c'est à dire comme moyens de formuler les conditions initiales de la situation, l'énoncé du problème, comme moyens d'évoquer la stratégie de base etc. , Le recours à des phases a-didactiques (d'action, de formulation ou de validation) pour faire créer diverses formes de connaissances est un exemple de ce contrat.

L'élève est supposé rationnel ou au moins cohérent, (en particulier, relativement fidèle) et économique. Il s'adapte pour minimiser ses efforts ou ses risques et pour accroître son plaisir, d'où l'idée de représenter ses comportements par des modèles ergonomiques : schèmes ou conceptions calculés. En fait, la cohérence n'est souvent que locale et l'élève s'accommode des contradictions par des assujettissements distincts à des situations différentes. La dévolution

⁹ Aebli 'Didactique Psychologique' Delachaux et Niestlé 1960

de la responsabilité de la cohérence est économisée par la fidélité à un discours cohérent...

La théorie des situations montre le caractère insuffisant de chacun de ces contrats pour construire à la fois un savoir canonique, les connaissances qui l'accompagnent et les pratiques qui caractérisent sa mise en œuvre, au cours de genèses souvent longues. L'enseignant, dans la relation didactique se manifeste, localement, par le choix, la rupture et le remplacement des contrats suivant des indices et des stratégies de régulation qui échappent pour l'instant à nos moyens d'investigation.

4. Contrats basés sur la transformation des savoirs 'anciens'

les savoirs anciens dans la relation didactique : la mémoire didactique

Dans les stratégies présentées plus haut, le savoir émis est supposé 'nouveau'. Le savoir ancien ne sert qu'à présenter les conditions de son apprentissage, ou à le construire par superposition et à l'intégrer par une genèse standard donnée par l'organisation culturelle des savoirs. Il correspondrait aux apprentissages que Piaget compare aux assimilations. Même dans les conditionnements, le savoir n'est pas supposé se modifier au cours des répétitions. Sauf peut-être dans certaines interprétations de la maïeutique, la récupération, la correction, le remplacement, la transformation, le rejet des savoirs anciens est à la charge de l'élève.

Dans les types de contrats basés sur la transformation des savoirs anciens, le système didactique accepte de remettre en question l'ordre empirique, l'ordre axiomatique ou l'organisation culturelle standard pour s'adapter à un ordre génétique. Il accepte la réalité des apprentissages par accommodation, l'existence d'obstacles et la nécessité de connaissances provisoires, 'transposées' et révisables dans le processus d'enseignement. L'articulation et la genèse des savoirs, collective ou personnelle, entre dans la négociation du contrat.

Le système didactique, dans ce type de contrats, accepte au moins une épistémologie selon laquelle la genèse collective didactique des savoirs procède par modifications et par ruptures à l'instar d'une genèse historique et non pas de façon linéaire par simple accumulation de savoirs. Dans un contrat plus complexe, c'est l'adaptation à l'ontogenèse et à la psychologie de l'enfant qui justifie une genèse collective appropriée. Mais les travaux de J. Centeno ont montré que le contrat didactique approprié implique une mémoire didactique du professeur (et du système

* une extension du savoir à des domaines nouveaux de savoir, à des applications qui demandent une adaptation de l'outil appliqué.

Plus concrètement, il convient d'examiner les changements de statuts :

* les transformations des savoirs enseignés (éducatif) qui lui permet d'utiliser le passé particulier de classes et de gérer l'articulation

des apprentissages particuliers en relation avec l'histoire de la classe et des élèves.

L'enseignant prend en compte l'histoire du sujet et la sienne propre, il accepte d'avoir une 'mémoire didactique'. Dans ce cas un contrat didactique est d'autant plus nécessaire que l'élève a développé son propre rapport au savoir ancien qu'il lui a déjà attribué un sens, une place dans l'établissement d'autres savoir. La reprise d'un savoir ancien appelle donc une nouvelle répartition des responsabilités entre le professeur et l'élève. Le plus souvent les raisons de la reprise ne sont pas les mêmes pour le professeur et pour les élèves.

La reprise peut être justifiée par des raisons didactiques :

* un échec de l'apprentissage précédent

* une mobilisation et une adaptation en vue d'apprentissages nouveaux

* la réorganisation après coup de l'histoire effective de l'apprentissage et des savoirs acquis en une genèse fictive où les causes d'apprentissage sont interprétées en raison de savoir

ou par des raisons épistémologiques, sans rapport avec les apprentissages antérieurs :

* une réorganisation de savoirs anciens, un changement de position par rapport à des acquisitions anciennes, une adaptation pour la construction d'un savoir nouveau en moyens de décision, en connaissances

* inversement les transformations de connaissances développées dans des situations d'action, de communication ou de

preuve en savoirs institutionnalisés, organisés de façon canonique

Les contrats de reprise des savoirs anciens

* *La révélation* : le savoir ancien n'est évoqué, le plus souvent implicitement que pour servir de décor, de faire valoir, d'antinomie, au savoir nouveau et finalement être 'péjoré' ou rejeté.

* *Le rappel* : Le concept de situation de rappel a été introduit par M.J. Perrin¹⁰. Le savoir rappelé est supposé être 'identique' au savoir convoqué. Les faits principaux et les actions passées sont évoquées, formulées, reconstruites, rationalisées et justifiées après coup dans une situation didactique particulière qui est un des instruments principaux de l'institutionnalisation. L'explicitation des faits connus de tous est théoriquement placée sous le contrôle de la mémoire personnelle de l'élève, mais il est clair qu'il ne peut formuler et rendre public que ce que le répertoire didactique lui autorise. D'un autre côté ces situations de rappel permettent à l'élève de formuler ses observations et ses souvenirs de façon incomplète et allusive puisque leur passé commun met le professeur en mesure de les comprendre. Il se crée ainsi une zone "proximale" d'apprentissage où les connaissances apparaissent sous des formes provisoires (inévaluables de façon formelle mais perceptibles au professeur) avant leur acquisition sous forme de savoirs.

* *La reprise* : la forme ancienne est dans ce cas ouvertement mise en cause, dans sa forme, elle fait

¹⁰ M.J. Perrin ‘

’ Thèse

l'objet d'une formulation, ou d'une traduction, ou dans sa constitution même, elle est alors l'objet au moins d'un commentaire, souvent d'une explication¹¹, d'une remise en cause, d'une critique, ou même d'un rejet. La reprise place le savoir ancien dans une nouvelle dialectique.

Les inconvénients de l'utilisation bonne ou mauvaise des connaissances anciennes se révèle aux enseignants et aux administrateurs de l'enseignement lors des changements de classe ou de niveaux.¹²

5. Les effets des réformes à long terme

La théorie des situations peut être comparée à la microéconomie en ce sens qu'elle ne prend en compte qu'un nombre très réduits de systèmes et de paramètres. Il pourrait sembler bien ambitieux de vouloir l'utiliser pour décrire et prévoir l'évolution des pratiques cognitives des enseignants et des institutions étude qui relèverait plutôt d'une macro-didactique.

Elle a cependant contribué à mettre en évidence et à prévoir dans plusieurs cas les effets à long terme de réformes éducatives amples et puissantes. Ces réformes qui se sont succédées depuis quarante ans avait pour but officiel d'améliorer l'enseignement. Toutes étaient motivées par la correction de certains caractères "antérieurs" du système

éducatif repérés et déclarés alarmants. Chacune d'elle était issue d'un faisceau de propositions et d'idéologies parfois faiblement liées, sinon contradictoires, mais nécessaires pour former un tout suffisamment ample (pour conjuguer des forces sociales suffisantes) et prometteur. Nous ne pouvons ici que les évoquer de façon très superficielle.

L'individualisation de l'enseignement

Certains élèves en échec dans l'enseignement standard semblent pouvoir être "rattrapés" par des interventions individuelles adaptées à leur cas et à leur rythme. (Thèse de Henri Bouchet 1934). Le public a le sentiment que la condition idéale pour l'enseignement serait celle du précepteur s'occupant d'un élève unique. Cette idée ne va plus cesser de peser sur les réformateurs. Conjugée avec des apports de la psychologie, elle amène à croire que chaque élève penserait et apprendrait de façon différente ce qui requerrait une pédagogie différenciée et des classes homogènes ! Ce modèle est faux, et poussé à l'extrême, aboutit à des décisions absurdes. Les connaissances sont un bien culturel commun que les élèves ne peuvent apprendre à pratiquer qu'ensemble. La solution est dans un équilibre.

Le modèle commercial : objectifs et évaluations et ses conséquences

Le moyen de prévenir les dérives, de contrôler et d'homogénéiser l'enseignement tout en lui permettant des adaptations et

¹¹ A. B Mopondi 'les explications en classe de mathématiques' RDM

¹² J. Centeno et G. Brousseau ' , (ICME Budapest)

des choix pédagogiques est apparu à la suite des travaux du Mathematical study group pour le NLSMA. La détermination des objectifs (Bloom) et les méthodes d'évaluation (Guilford, Cron'bach etc.) ont connu un grand succès à cause de leur référence à des métaphores industrielles et administratives. La dissymétrie entre les possibilités de traiter les objectifs de niveau bas et de niveau élevé, conduisent à ignorer le développement pourtant nécessaire des connaissances non décontextualisées de l'élève (Vigotski). Les professeurs et les parents sous estiment les capacités de l'élève et les programmes scolaires reprennent au niveau suivant les mêmes projets d'apprentissages qu'au précédent.

Autres réformes

Nous étudions de même les oppositions entre des choix opposés : *L'homogénéisation de la culture ou l'adaptation à des demandes sociales différenciées* (les mathématiques ésotériques et exotériques ou les mathématiques humanistes), *la priorité donnée au sens ou la forme, à la rigueur ou à l'efficacité ?* (les mathématiques modernes). *L'intérêt principal porté au texte du savoir ou aux problèmes*, (l'heuristique et le retour de la géométrie), *l'apprentissage par conditionnement ou le constructivisme ?*