/ LOGIQUE FONCTIONNELLE /

1 - GENERALITES

La théorie des ensembles telle que nous l'avons introduite aux chapitres 7 et 16 ne suppose aucune connaissance préalable sur le langage ordinaire ni sur le langage logique.

Nous nous sommes servis de la langue ordinaire pour écrire ce livre et nous avons supposé que le lecteur pourrait comprendre des phrases comme :

si $x = y$ alors $y = x$ (axiome E_1)

Nous avons supposé aussi que l'enfant de 6 à 7 ans, au contraire, risquait de ne pas "comprendre" cette phrase et, de toute manière, ne pourrait pas y retrouver la locution si ... alors ... et lui donner son sens mathématique : Il n'est pas possible de se servir de l'étude et de l'emploi de " si alors " pour introduire ni l'implication, ni l'inclusion.

Nous avons seulement supposé que l'enfant pouvait acquérir un modèle mental lui permettant de manipuler les écritures

$x = y$ et $y = x$ comme s'il appliquait E_1 :

Il décode $x = y$ et $y = x$ de la même façon, connaissant l'un, il utilise l'autre, convaincu de la véracité de l'un il affirme celle de l'autre ... etc. Cette connaissance implicite de E_1 nous suffit ; la conviction de l'enfant reposera sur la pratique de la désignation des ensembles et des objets qu'il manipule.

...

L'introduction de cette désignation peut se faire dans des conditions pédagogiques qui n'exigent pas une formulation quelconque en langue usuelle. (cf. Chap. VII) (méthode que nous qualifierons de non verbale).

Par conséquent ces conditions permettent à l'enfant d'employer n'importe quelle expression de sa langue usuelle pour indiquer ce qu'il fait.

Nous voulons montrer dans ce chapitre comment l'enfant peut construire les règles de la logique, c'est-à-dire, la "grammaire" qui commande la manipulation des propositions de certains de ses discours, en s'appuyant sur le travail de désignation des ensembles décrit plus haut.

En suivant l'ordre d'introduction des axiomes de la théorie des ensembles, nous allons les utiliser pour "codifier" l'emploi des prédicats et ainsi introduire la logique fonctionnelle.

2 - PREDICATS : rappel

Nous avons, au Chapitre II, appelé prédicat un discours à trous : " p (x) " susceptible de désigner une partie A d'un référentiel E de la façon suivante :

$$\text{soit } a \in E \begin{cases} \text{Si } p(a) \text{ est vraie alors } a \in A \\ \text{et si } a \in A \text{ alors } p(a) \text{ est vraie} \end{cases}$$

On écrit alors $A = \{x \text{ tq } p(x)\}$

EXEMPLE : E est l'ensemble des "baguettes logiques".
p(x) est le prédicat. " x a une base carrée "
A est l'ensemble des baguettes qui ont une base carrée.

...

VOCABULAIRE : Nous dirons que "dans E, A est le champ des réalisations de p(x)", ou que " A est la trace de p(x) dans E," ou que " A est associé à p(x) dans E".

3 - CONJONCTION DE PREDICATS ; INTERSECTION

a/ DEFINITION

Dans E, A et B sont des ensembles définis par les prédicats p(x) et q(x)

$$A = \{ x \mid p(x) \}$$
$$B = \{ x \mid q(x) \}$$

$$A \cap B = \{ x \mid p(x) \} \cap \{ x \mid q(x) \}$$

$A \cap B$ est un ensemble, nous le désignerons par un prédicat que nous noterons $p(x)\ \boxed{\text{et}}\ q(x)$

$$A \cap B = \{ x \mid p(x)\ \boxed{\text{et}}\ q(x) \}$$

b/ CONDITIONS SATISFAITES PAR $\boxed{\text{et}}$, CONJONCTION LOGIQUE

Elles se déduisent des axiomes ou des théorèmes établis dans la première partie :

I_1 $p(x)\ \boxed{\text{et}}\ p(x)$ désignent le même ensemble que $p(x)$

I_2 $p(x)\ \boxed{\text{et}}\ q(x)$ désignent le même ensemble que $q(x)$ et $p(x)$

I_3 $[p(x)\ \boxed{\text{et}}\ q(x)]$ et $r(x)$ définissent le même ensemble que $p(x)\ \boxed{\text{et}}\ (q(x)\ \boxed{\text{et}}\ r(x))$ - etc...

c/ VOCABULAIRE DE LA CONJONCTION ET DE L'INTERSECTION :

- L'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments qui, à la fois, sont éléments de A et sont éléments de B.

...

Ainsi, un tablier à carreaux rouge et blanc n'est pas un tablier blanc. (Il n'appartient pas à l'ensemble des tabliers blancs).

L'intersection de l'ensemble des tabliers blancs et de l'ensemble des tabliers rouges ne peut pas comporter les tabliers rouge et blanc - En fait elle est vide -

Les confusions de ce genre peuvent se produire dans l'esprit de l'enfant si l'on veut trop vite substituer à la désignation directe de l'intersection une définition construite d'après le "et" de la langue naturelle, et à fortiori si l'on veut procéder à l'envers et se servir du $\boxed{\text{et}}$ pour définir l'intersection.

Car le sens du $\boxed{\text{et}}$ ainsi introduit est plus restreint que celui du "et" du langage courant : certaines phrases, où figure un "et", ne sont pas une conjonction de prédicats et ce "et" littéraire n'a pas alors le sens du $\boxed{\text{et}}$ logique :

<u>EXEMPLES</u> : "Je crois que deux <u>et</u> deux sont quatre <u>et</u> que quatre <u>et</u> quatre sont huit" (Molière)

(Idée d'addition) -

" x <u>et</u> y sont bons amis " (Idée de couple)

" <u>Et</u> vous prononceriez un arrêt si cruel " (Racine)

Voici l'ensemble des objets rouges <u>et</u> celui des objets en bois (Idée de réunion)

De plus, le "et" littéraire n'est pas le seul procédé qui permette d'exprimer le $\boxed{\text{et}}$ logique.

<u>EXEMPLES</u> : Il est rouge<u>,</u> en bois<u>,</u> de section carrée<u>,</u> et a 7 cm de long

De chacun, vous pouvez aussi bien dire qu'il est rouge <u>ou</u> qu'il est en bois.

...

4 - IMPLICATION DE PREDICATS ET INCLUSION

a/ DEFINITION

Dans E, A est un ensemble défini par le prédicat $p(x)$
B est un ensemble défini par le prédicat $q(x)$

$A = \{ x \mid p(x) \}$, $B = \{ x \mid q(x) \}$

$A \subset B$ c'est-à-dire $\{ x \mid p(x) \} \subset \{ x \mid q(x) \}$
peut s'écrire $p(x) \Rightarrow q(x)$
que nous lirons $p(x)$ implique $q(x)$

Ceci veut dire que tout élément x de E qui vérifie $p(x)$ est un élément de B et donc il vérifie $q(x)$.

b/ CONDITIONS SATISFAITES PAR $\Rightarrow$

Elles découlent de l'inclusion.

- quel que soit $p(x)$
  $p(x) \Rightarrow p(x)$ d'après le théorème 1
- si $[p(x) \Rightarrow q(x)$ et si $q(x) \Rightarrow r(x)]$
  alors $q(x) \Rightarrow r(x)$ d'après le théorème 2

EQUIVALENCE LOGIQUE

- Si $p(x) \Rightarrow q(x)$ et si $q(x) \Rightarrow p(x)$ nous conviendrons d'écrire $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ qui se lira :

  $p(x)$ équivaut à $q(x)$

...

Deux prédicats sont équivalents dans E si les parties de E qu'ils déterminent sont "égales" (la même) autrement dit : si tout x qui vérifie le premier, vérifie le second et si tout x qui vérifie le second vérifie le premier.

$$p(x) \Leftrightarrow q(x) \quad \text{équivaut à} \quad A = B$$

Afin de suivre pas à pas le plan de la théorie des ensembles nous reviendrons sur l'étude de l'implication après l'introduction de la négation.

c/ VOCABULAIRE DE L'IMPLICATION ET DE L'INCLUSION

L'implication est une notion importante. La langue usuelle comporte de nombreuses expressions pour l'exprimer avec des nuances. variées :

- <u>Si</u> p(x) <u>alors</u> q(x) (1)
- <u>Tous</u> les éléments qui vérifient p(x) vérifient q(x) (2)
- Chaque fois que p(x) prend la valeur vraie, q(x) prend la valeur vraie (3)
- " p(x) <u>entraine</u> logiquement q(x) " (4)
- p(x) est une <u>condition suffisante</u> de q(x) (5)
- q(x) est une <u>condition nécessaire</u> de p(x) (6)
- q(x) est une <u>conséquence</u> logique de p(x) (7)
- Le champ de p(x) est inclus dans celui de q(x) (8)

L'expression spécifique "implique" est la meilleure.
Avec les enfants, il semble qu'on doive utiliser de préférence les expressions qui se refèrent à la théorie naïve des ensembles : (2), (8), (3) à la rigueur.

...

Celles qui se refèrent à l'idée de condition : (1), (5), (6) sont parfois ambigües et lourdes. Elles favorisent la confusion, fréquente chez les enfants, entre " $\Rightarrow$ ", " $\Leftarrow$ ", et " $\Leftrightarrow$ ".

<u>EXEMPLE</u> : (1) veut dire en fait :

" Si $p(x)$ prend la valeur vraie pour un x,
alors $q(x)$ prend la valeur vraie pour ce même x."

Les moins bonnes formulations sont certainement celles qui se refèrent à des relations expérimentales comme la causalité : (4), (7).

Les mots "entraine", "conséquence" ne facilitent pas du tout la genèse d'une pensée logique correcte, par suite de la variété des sens pratiques dont ils sont chargés et qui peuvent aller jusqu'à des sens opposés :

<u>EXEMPLE</u> : Les nuages entrainent la pluie (cause physique)
La pluie entraine la présence de nuages (implication logique)

La langue usuelle fournit bien d'autres moyens d'exprimer l'implication ou l'inclusion avec des nuances sur lesquelles [illegible] reviendrons.

Jumbo est un pachyderme <u>si</u> il est un éléphant

Jumbo est un éléphant <u>donc</u> un pachyderme

Jumbo est un pachyderme <u>du fait qu</u>'il est un éléphant

$q(x)$ est vrai <u>dès que</u> $p(x)$ l'est ... etc.

Chacun de ces termes peut être employé dans des constructions qui n'expriment pas l'implication.

...

Cette quantité de termes montre l'importance de la notion d'utilisation et la difficulté que notre civilisation rencontre encore à la manier familièrement.

5 - NEGATION COMPLEMENTAIRE

a DEFINITION

Dans E, A est un ensemble défini par le prédicat p(x) :

$A = \{ x \mid p(x) \}$ L'ensemble des objets de E qui ne sont pas dans A : $\complement A$ est un ensemble ; il est défini par un prédicat que nous notons $\boxed{\text{non}}$ p(x)

b/ CONDITIONS SATISFAITES PAR $\boxed{\text{non}}$

- Quels que soient p(x) et q(x)

  D'après C_3 : $\boxed{\text{non}} \left(\boxed{\text{non}}\ p(x) \right) \Longleftrightarrow p(x)$

  Axiome de la double négation

- Quels que soient p(x) et q(x)

  D'après C_1 : $\left[\boxed{\text{non}}\ p(x)\ \boxed{\text{et}}\ p(x) \right] \Longleftrightarrow q(x)$

  Axiome de la non-contradiction

  On n'a pas à la fois p(x) vrai et non p(x) vrai ou alors, toute proposition q(x) est vraie.

  $\complement A \cap A = \emptyset$ s'exprimera par :

  $\left[p(x)\ \boxed{\text{et}}\ \boxed{\text{non}}\ p(x) \right]$ est toujours faux,

  ou p(x) et $\boxed{\text{non}}$ p(x) sont incompatibles

- Quels que soient p(x), et q(x)

  Si p(x) et q(x) sont incompatibles

  alors $\left[p(x) \Rightarrow \boxed{\text{non}}\ q(x) \right]$

...

Il en résulte immédiatement dans ce cas que
$\boxed{\text{non}}\ q(x) \Rightarrow p(x)$ - (Axiome du tiers exclu)

CONTRAPOSITION

Il en résulte (Th. 12) que
$[p(x) \Rightarrow q(x)]$ est équivalent à $[\boxed{\text{non}}\ q(x) \Rightarrow \boxed{\text{non}}\ p(x)]$

EXEMPLE :

Il revient au même d'affirmer que :

" Tous les éléphants sont des pachydermes "

ou que tout animal qui n'est pas un pachyderme n'est pas un éléphant.

c/ VOCABULAIRE DE LA NEGATION

La négation peut être obtenue :

soit par des constructions grammaticales

EXEMPLE :

Les mouettes ne sont pas des pachydermes

soit par des procédés lexicaux : préfixes a, in,

Il ne faut pas confondre la négation d'une proposition avec l'affirmation d'une proposition dite "contraire". Exemple :
" Il n'est pas noir " et " Il est blanc "

d/ LE MOYEN LE PLUS SUR POUR UN ENFANT DE PRECISER SA PENSEE

consiste à évoquer l'ensemble complémentaire, en utilisant les procédés de la langue qu'il connaît.

...

6 - DISJONCTION LOGIQUE ; REUNION

a/ DEFINITION

Dans E, A est défini par p(x) et B par q(x)

$$A \cup B = \{ x \text{ tq } p(x) \; \boxed{\text{ou}} \; q(x) \}$$

En effet $A \cup B = \complement\left[\complement A \cap \complement B\right]$

$A \cup B$ est formé des éléments qui ne sont pas à la fois exclus de A $\boxed{\text{et}}$ exclus de B

Ils sont donc au moins éléments de l'un d'entre eux.

$x \in A \cup B$ Si l'un des cas suivant est réalisé :

$$x \in A \,, \quad x \in B \,, \quad x \in A \cap B$$

Remarquons que si l'on dit que x vérifie p(x) $\boxed{\text{ou}}$ q(x) on entend qu'il peut vérifier à la fois p(x) et q(x).

b/ CONDITIONS SATISFAITES PAR $\boxed{\text{ou}}$ - ENTRE AUTRES :

LOIS de DE MORGAN

$$\boxed{\boxed{\text{non}} \left[p(x) \; \boxed{\text{et}} \; q(x)\right] \iff \left[\text{non } p(x)\right] \boxed{\text{ou}} \left[\text{non } q(x)\right]}$$

Cela est obtenu par substitution dans la définition de la réunion $\complement A = A'$ $\complement B = B'$ alors $A = \complement A'$ et $B = \complement B'$

d'où $\complement A' \cup \complement B' = \complement\left[A' \cap B'\right]$

de même

$$\text{non } \left[p(x) \; \boxed{\text{ou}} \; q(x)\right] \iff \left[\text{non } p(x)\right] \text{ et } \left[\text{non } q(x)\right]$$

...

VOCABULAIRE de la REUNION et de la DISJONCTION

Comme pour tous les autres connecteurs logiques, la disjonction de deux prédicats n'en altère aucun.

Ex : La baguette cachée a une base triangulaire ou elle a une longueur de 6 cm.

Le ou conjonction de coordination, lorsqu'il coordonne des "attributs" , correspond assez bien à la réunion :

Il est rouge ou grand.

On ne peut pas mutiler la langue au point de ne considérer que des phrases "sujet - verbe - attribut du sujet". Il faudrait alors, avec les enfants, ne considérer que les ensembles qui sont déterminés par une "propriété" ayant un nom dans le langage usuel, ou expliquer que la constitution d'un ensemble confère ipso - facto à chacun de ses éléments, une "propriété". Cette attitude alourdit considérablement l'apprentissage.

Mais ou peut aussi correspondre à la différence symétrique dans le cas où l'on sous entend que la conjonction des cas est exclue.

EXEMPLE :

Dans un restaurant à prix fixe, un client x a le choix :

x mange un poulet basquaise ou x mange un steak frite .

Sous entendu, x n'appartient pas à la fois aux deux catégories de clients.

...

(Ce "ou" dit "exclusif", se traduit mieux par soit ... soit ...

Inversement, la conjonction "et", portant sur des substantifs, peut indiquer la réunion de deux ensembles :

L'ensemble des rouges et des grands

Ce n'est plus un prédicat mais " x est un élément de l'ensemble des rouges et des grands " en est un.

/A/ REPRESENTATIONS GRAPHIQUES des PARTIES d'un ENSEMBLE ou des PREDICATS :

Ces représentations peuvent varier par des conventions qui régissent la relation objets signifiés - dessins signifiants.

Le dessin est un moyen de mobiliser certaines variables rétiniennes (couleur, masse d'un point) ou visuelles (implantation des points, forme, taille, grain, orientation) pour représenter des objets concrets (ou mathématiques) et certaines de leurs relations.

I - DIAGRAMME DE VENN

1° CONVENTION DE M. SERVAIS

Nous avons vu au chapitre 2 comment représenter " x est élément de A " par le point x est dans la région $\mathcal{A}$:

Cette convention donne ici "x a la propriété A" ou "x rend vrai le prédicat $\mathcal{A}$ "

A est un ensemble,

$\mathcal{A}$ est un prédicat.

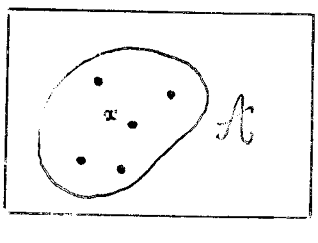


fig. 1

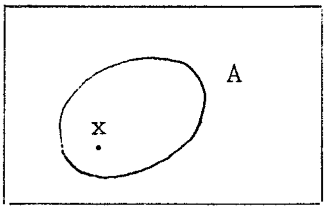
Nous avons convenu jusqu'ici que tous les objets figurant dans A pouvaient être regroupés, qu'ils étaient tous représentés sur le dessin et que celui-ci devait donc permettre d'identifier A , x , et la relation $x \in A$.

...

Cette convention est nécessaire avec des enfants de 5 à 8 ans.

Il est possible ensuite, si A est défini par exemple par un prédicat familier, de transgresser cette règle.

fig. 2

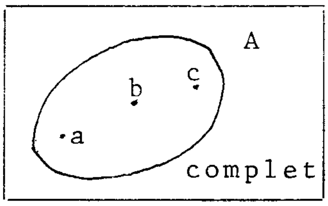


représente A est un ensemble

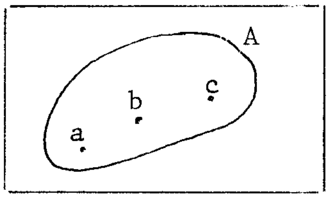
x est un des éléments de A

Il faut alors une nouvelle convention pour indiquer lorsque tous les éléments de A sont représentés, par exemple comme le propose W. SERVAIS, par le mot complet.

EXEMPLES



représente $A = \{a, b, c\}$

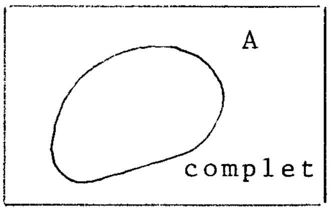


représente

$a \in A$

$b \in A$

$c \in A$



représente $A = \emptyset$

A ne comporte aucun élément.

fig. 3

...

2° CONVENTION DE J. VENN

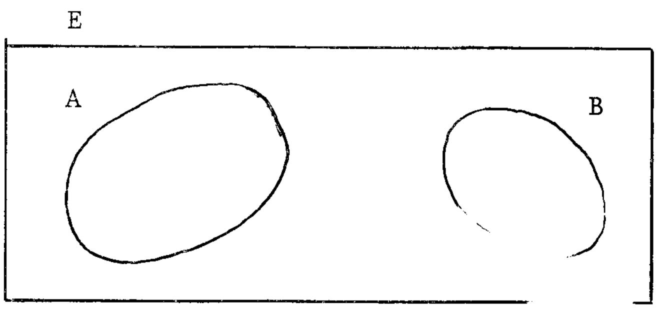
Si nous considérons un ensemble E, et tous les couples (A,B) des parties de E, il est possible de distinguer 16 cas suivant celle des 16 parties définies par (A,B) qui est égale à l'ensemble vide.

On peut admettre que moyennant les conventions du dessin et en éliminant des cas triviaux, ces 16 cas logiques peuvent être réduits à 5 cas de figure : (figure 4)

(les cas $A = \emptyset$, $B = \emptyset$, $\complement A = \emptyset$, $\complement B = \emptyset$, $\complement(A \cup B) = \emptyset$ ... ne sont pas représentés).

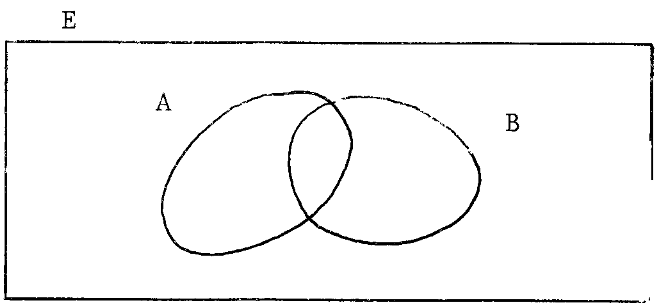
fig. 4

Cas 1



$\boxed{A \cap B = \emptyset}$

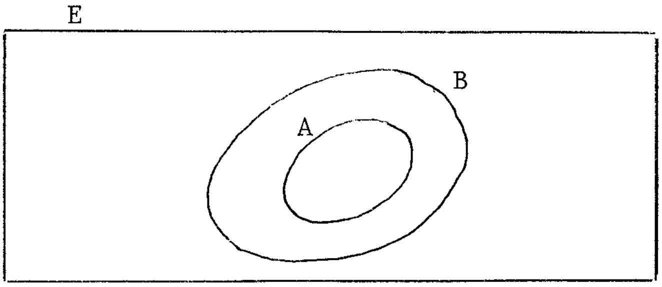
Cas 2



$A \cap B \neq \emptyset$

...

Cas 3

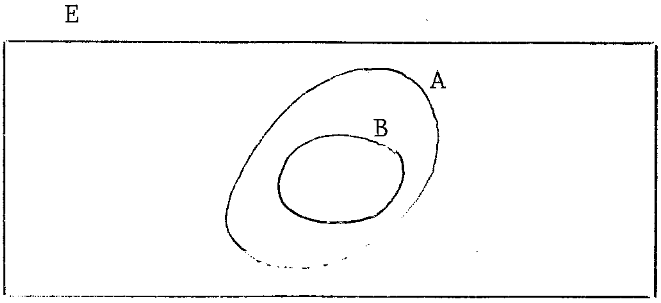


$A \subset B$

$A \cap B = A$

$\boxed{A \cap \complement B = \emptyset}$

Cas 4

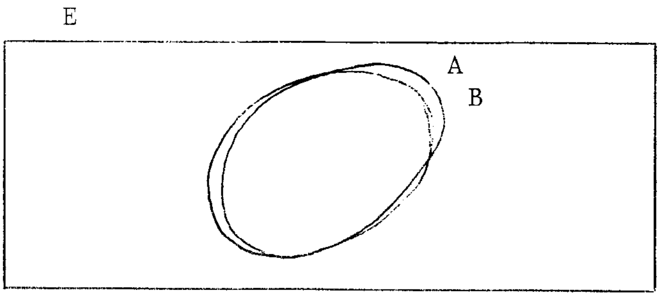


$B \subset A$

$A \cap B = B$

$\boxed{\complement A \cap B = \emptyset}$

Cas 5



$A = B$

$A \cap B = A = B$

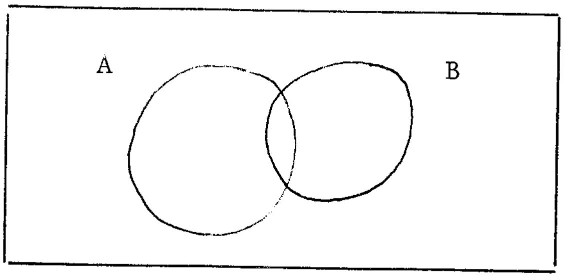
$\boxed{A \triangle B = \emptyset}$

Ces 5 dessins peuvent être représentés par <u>un seul</u> moyennant la convention de J. VENN :

Hachurer la partie vide, ou l'indiquer par $\emptyset$ fig. 5

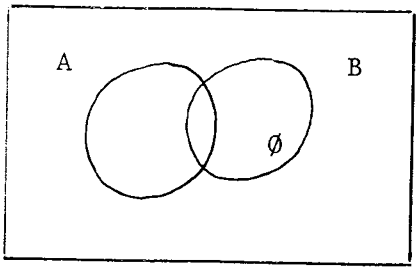
...

fig. 5

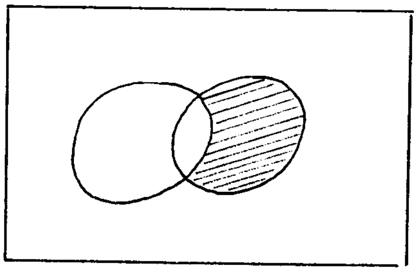


Cas général

EXEMPLE : Représentation du Cas 4 $B \subset A$:



ou



3° CONVENTION DE G. PAPY

La partie $A \triangle B$ est représentée par deux régions distinctes : elle n'obéit pas à la convention de groupement spatial des éléments à l'intérieur d'une ligne fermée unique.

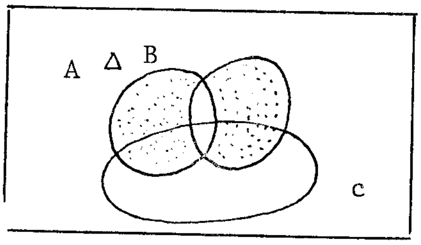


fig. 6

Pour désigner $A \triangle B$, G. PAPY entoure ses composantes de "cordes de même couleur . (fig. 6)

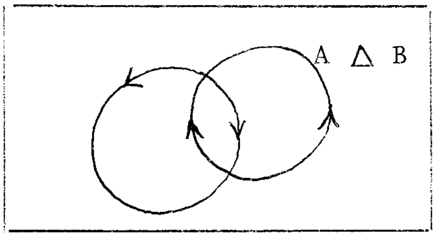
Cette convention est indispensable lorsque le dessin représente plus de deux ensembles. (fig. 6)

...

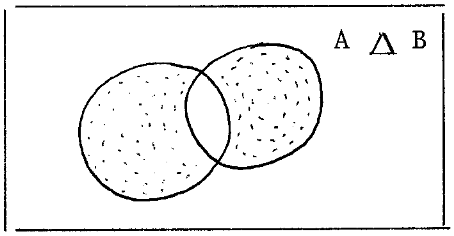
4° CONVENTION COMPLEMENTAIRE

Il faudrait même une autre convention, par exemple une orientation de cordes de couleurs, pour distinguer si l'ensemble identifié est X ou ∁X

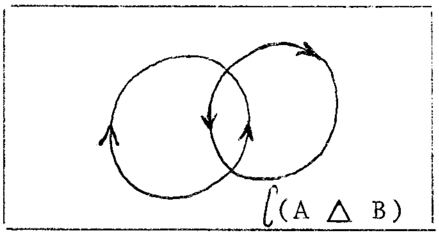
EXEMPLE : Figure 7



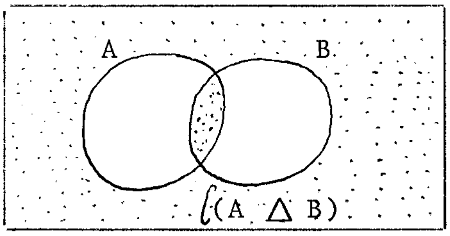
représente

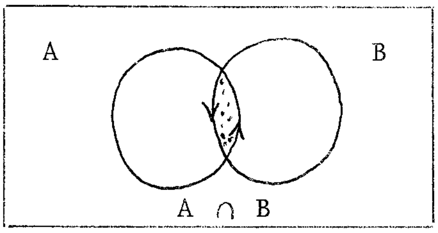


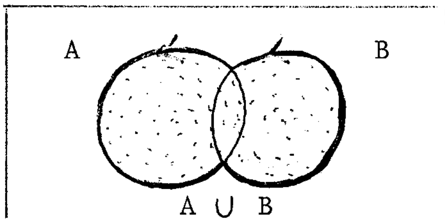
Les liens tournent autour de la région désignée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

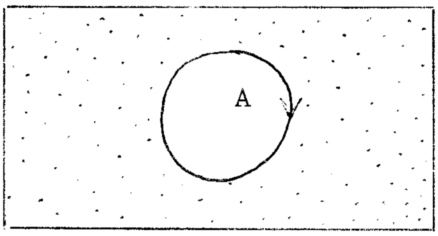


représenterait

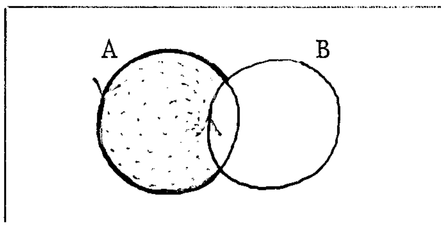








∁A



...

L'usage de ces diagrammes permet d'écrire très aisément les principales relations de la théorie des ensembles.

<u>EXEMPLE</u> : $A \triangle B = (A / B) \cup (B / A)$

Mais comme les diagrammes de L. CAROLL que nous avons utilisés au chapitre 7 ils ne permettent pas facilement les substitutions.

<u>EXEMPLE</u> : Montrer que $A \triangle B = \complement A \triangle \complement B$

II - DIAGRAMME DE L. CAROLL

L'implantation des dessins d'éléments représente leur appartenance à un ensemble ou à son complémentaire.

	A	$\complement$A
B		
$\complement$B		

Un ensemble et son complémentaire ont des représentations symétriques. Ce qui est pédagogiquement préférable.

Lorsque le nombre des parties augmente, les colonnes et les lignes se subdivisent.

	$\overbrace{\text{B} \quad \complement\text{B}}^{\text{A}}$		$\overbrace{\text{B} \quad \complement\text{B}}^{\text{A}}$	
	B	$\complement$B	B	$\complement$B
c				
$\complement$c				

...

/B/ - REMARQUES ET IDEES PEDAGOGIQUES

1° INTERSECTION :

La conjonction de deux prédicats n'en altère aucun. Chaque objet doit vérifier pleinement et séparément l'un et l'autre.

Nous avons déjà signalé que l'intersection de l'ensemble des tabliers rouges et des tabliers bleus n'était ni un ensemble comportant un mélange de tabliers rouges et de tabliers bleus, ni un ensemble d'objets présentant un mélange des "propriétés" définissant A et B (des tabliers rouges et bleus).

Des phrases comme "les tabliers qui ont du rouge" sont bien des prédicats, mais dans la pratique elles ne définissent pas un ensemble à cause de l'ambiguïté du "ont".

(Suffit-il d'un point de fil rouge servant de marque sous le col du tablier ?)

Il y a eu d'ailleurs dans ce domaine des exemples pédagogiques qui me paraissent vraiment dangereux.

Il est possible, en effet, de formaliser de façon correcte une situation très particulière où l'intersection peut ressembler à un mélange. Nous transposons l'exemple :

Considérons des sachets comprenant 5 boules peintes : les unes en vert, d'autres en jaune, d'autres en blanc.

Par exemple, un sachet comporte 3 vertes,
1 jaune,
1 blanche.

un autre : 0 verte,
5 jaunes,
0 blanche. etc ...

...

Considérons l'ensemble des sachets qui comportent <u>au moins une</u> bille verte, et l'ensemble des sachets qui comportent <u>au moins une</u> bille jaune.

$V \cap J$ est un ensemble de sachets qui comportent au moins une bille verte et au moins une bille jaune.

Cet ensemble comportera tous les sachets qui contiennent un "mélange" de billes vertes et de billes jaunes.

Mais remarquons que nous avons opéré sur des objets (les sacs) qui étaient eux-mêmes reconnus comme des ensembles.

Cet exemple ne peut être proposé qu'à des enfants qui savent déjà <u>très bien</u> ce qu'est une intersection.

Pour avoir l'occasion d'utiliser fréquemment l'intersection, pour désigner des ensembles, il faut proposer aux enfants une situation qui en comporte beaucoup.

Classons les baguettes de bois suivant le tableau ci-dessous :

Longueurs / Section	Longueur 1 A	(2) B	(3) C	(4) D	(5) E	([illegible]) F	(7) G	(8) H	(9) I	(10) J	
□											
⌓											
△				$D \cap \triangle$							
○											

...

Chaque case contient un ensemble de baguettes. L'ensemble des baguettes de longueur 4 s'appelle D ; il est formé des baguettes contenues dans la première colonne. L'ensemble des baguettes à base triangulaire, désigné par Δ est disposé dans la 3ème ligne de cases.

La case (D, Δ) contient un ensemble de baguettes que nous désignons par $\boxed{D \cap \Delta}$

(Attention, ne pas confondre le couple, (D, Δ) élément de l'ensemble produit L x S ou L = $\{A,B,C, \dots J\}$ S = $\{\square, \frown, \triangle, \bigcirc\}$ couple représenté par la case, et l'ensemble de baguettes qui se trouve dans cette case et qui est désigné par $D \cap \Delta$.

Dans cette situation, ce procédé de désignation est presque obligatoire et les enfants l'inventent.

Les baguettes ont, sur le matériel Diénès l'avantage, quel que soit le tableau considéré, de faire figurer des ensembles de plusieurs objets dans certaines cases. La confusion n'est plus possible entre l'objet, le couple, et l'ensemble ou le prédicat dont il s'agit.

2° QUELQUES ERREURS PROPRES DE L'INCLUSION

a/ Les enfants confondent parfois l'inclusion et l'appartenance : il faut en revenir à la définition et vérifier les listes définissant les ensembles.

Dans $X \in A$, A est un ensemble d'objets, X est l'un de ces objets. On ne peut pas dire que X soit intrinsèquement un élément, il pourrait être un ensemble et A un ensemble d'ensembles.

...

Dans $X \subset A$ _ X et A sont des ensembles.

AUTRES DIFFERENCES :

On a toujours $A \subset A$, jamais $A \in A$

Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$,
par contre, on peut avoir $A \in B$, $B \in C$ et $A \notin C$

<u>b</u>/ Les enfants "remontent" les implications. Ils savent que $p(x) \Rightarrow q(x)$ est vrai. Ils constatent que $q(x)$ est vrai ; ils veulent conclure : $p(x)$ vrai.

Cette erreur provient :

- d'une part du fait que les enfants rencontrent souvent des égalités et des équivalences logiques et croient en voir partout.

- d'autre part du fait que le vocabulaire familier de l'implication est employé dans des relations symétriques (associations d'idées, ... concordance statistique ... etc) ou ambigües, employer le mot implique !

* * *