Conference : Problems and results of Didactique of Mathematics

Guy Brousseau, Seattle 1994

0 Introduction

Last week a conference of ICMI studied what research in mathematics education is, what its current principal results are and how one can exchange them, validate them and pose new questions. I would like present to you and discuss some opinions about this matter.

For that, in a first part, let us apply to the subject of this conference the fundamental methodological principle of the theory of situations. This consists of defining a piece of knowledge by a "situation", that is, by an "automate" which models some problems for which only the knowledge in question supplies a solution in an optimal way. In this case the method give a metaphor and not a model.

A result in mathematics education will then be defined by its function in an institution or in the relations among several institutions (students, teachers, teacher education, businesses ...). A result is an answer to a question posed in a fairly precise manner by at least one of these institutions. Research in mathematics education produces results directed toward a variety of institutions.

We will give an idea about all that in a second part.

But I will propose in a third part that we concentrate on one only: the mathematical community. What do mathematicians expect of mathematics education, and what can they expect? What does mathematics education expect of mathematicians? What type of knowledge does this interaction require? Can that knowledge be the object of a science? What part should mathematicians play in this?

I Mathematics Education

1) The interest of the teaching of mathematics for mathematicians

Certainly mathematicians have always been interested in the teaching and dissemination of their discipline. They have done it on the one hand by furnishing and preparing the knowledge to be taught and on the other by applying their knowledge and talent to the art itself. It must be admitted, however, that this interest has the air and status of a charitable work.

2) Social and professional necessity of a scientific knowledge of the teaching of mathematics.

A fortiori, a scientific approach to mathematics education seems most often an idea which is simultaneously attractive and futile.

As a project of the community, the question has opened up only very progressively, principally since the ICME conference in 1968. I won't remind you of the reasons and illusions which made conditions favorable for this opening, but only of the requirement of society for clarification of teaching activities and the demands of the professionals. Fairly swiftly, (first at Karlsruhe, then at Adelaide), our community handed over the responsibility for research of a scientific character involving mathematicians and dealing with the teaching of mathematics to other disciplines, classic if possible: psychology, linguistics, sociology, etc.

3) Inefficiency of referral to other sciences.

This reasonable and commendable choice produced appreciable results and permitted the development of a community whose support is becoming ever more indispensable. Nonetheless, importing a result issued in one of these disciplines to make a didactic decision does present a dubious leap. Mathematician-teachers are assailed by a variety of prescriptions and advertisements but have no means to convert them, reconcile them or monitor them. Moreover, the questions which they pose in return generally go into a long circuit. It's illusory to expect answers and excessive to expect of the neurosciences, despite their progress, all of the knowledge that we need about mathematical knowledge.

4) Involvement of mathematicians in teaching.

Moreover, in the teaching of mathematics, there exist some activities which are irreducibly mathematical, such as

— the construction and choice of problems

— the reorganization of a presentation of a theory to facilitate communication, comprehension or use of a mathematical theory.

Otherwise stated, I do not believe that the exact activities could be conceived, described, prepared for or calculated in any domain other than mathematics.

My first thesis then is that there exist in the teaching of mathematics activities which are irreducibly mathematical.

From this I draw the conclusion, which many of you will find trivial, that teaching mathematics is the business of mathematicians. It remains to specify what is meant by this term.

5) Specific scientific information about the teaching of mathematics.

It follows from the two previous paragraphs that mathematicians, whether teachers or not, cannot escape the collective responsibility to import scientific information produced by other sciences about the teaching of their discipline. For that they need specific information. It is clear that they cannot wait for it to arrive by the long external routes: moreover transforming themselves successively into linguists, psychologists, etc. would give them no new supplementary power.

A scientific approach to these genuinely mathematical activities, direct and accessible to mathematicians in a reasonable amount of time, then becomes indispensable. It remains to be seen whether such a theory, permitting the resolution of the problem of controlling the diffusion of

mathematical knowledge and the response to the two requirements above (capacity to be imported and facility of access) is possible.

My second thesis, or rather, my conviction, is that this scientific theorization is possible.

The enormous ratio of this ambition to the modesty of our results, of our methods and of our objects of study leaves lots of room for doubt and derision. I nonetheless take the responsibility of claiming that the didactique of mathematics is called to undertake the explanation of the functioning of this irreducibly mathematical part of mathematics.

6) Teaching of mathematics, Research in mathematical education and in Didactique of mathematics.

Thus one can label as "teaching" or didactical activity any enterprise (project) of arranging for a student or an institution appropriate to itself a piece of what constitutes—or is on the way to constituting—knowledge.

We label as "Didactique of Mathematics" the science of the specifi conditions of (imposed) diffusion of useful mathematical knowledge to members and institutions of humanity. In other terms, it is the study of situations where the transmission of mathematical understanding and knowledge and the study of their effects on the protagonists and their products manifest themselves.

We preferred the pejorative term "didactique" to the more elegant "experimental epistomology" to demonstrate our interest in the case where this diffusion is imposed on its recipient, and above all because all diffusion arises more or less from this case.

At the moment it consists of a vast field of results scattered around the embryos of some theories.

In conclusion, research in mathematics education thus consists of at least three components:

— didactique of mathematics which aims at demonstration, and explaining, teaching phenomena specific to mathematics,

— research (in the teaching of mathematics) which arises from the application of concepts and applications which come from other disciplines and/or are not specific to mathematics (in particular the possible applications of general didactics)

— didactical engineering, which aims at producing plans of action and means of teaching based more or less on didactique or the other results.

Why distinguish the first two components? Because they are not controlled by the same institutions and thus the same domains of knowledge.

7) But then, what is a result and how does one obtain one ?

II Example of a set of research and results in *Didactique* ***(see part in French please[i])***

A . Questions and conditions

B. Results and products

1) Didactic enginering products (see original french text)[ii]

THE RACE TO TWENTY

Rules of the Game

The game is played by two adversaries who take turns writing a number. The objective is to be the one who writes 20. The first player may write 1 or 2. Thereafter any number written must be obtained by adding either 1 or 2 to the number just written by the opposing player.

Introduction

The teacher explains the rules of the game to the class and begins to play it at the blackboard with a student, then lets another student take over and finish the game.

Phase 1 (action)

The students play several rounds of the game in pairs. The numbers played are written in columns on a shared piece of paper.

Phase 2 (formulation

The class is divided into two teams. The game is played at the blackboard by two team representatives, chosen at random by the teacher. Before each round of the game there is time for a conference within each team. The game is played several times , each time by a pair of team representatives chosen randomly after the conference time is over.

Phase 3

The class is still in the same teams, now carrying out a theorem competition. The teams take turns proposing a tactic (for example "You have to play 17") , or a theorem ("If you play 17 the other guy can't win"). If the other team wants to be able to use the tactic, it "buys" it, giving a point to the other team. But if it demonstrates that a theorem of the other team is false, it wins a bunch of points (5 or so.)

A team can require its opponent to play a certain number of rounds using a number which it has proposed as a winning one (in search of a counterexample.)

A team can propose to convince its adversary of the validfity of its tactic, and wins more points if the adversary accepts its reasoning.

The rules set up a debate situation in which theorems and their proofs are invented to win points (or diminish the loss of them.) Actually the point count system isn't applied very firmly (there is no universal automate for producing theorems!) It is only there to incite the students to look for proofs, and to regulate conflicts.

C. Disposition of computations of division

I proved that the French scholastic treatment of multiplication and division relations diminished their dependability while favoring the apparition of certain errors, and slowed the learning process. Thanks to an elementary ergonomic calculation I managed to predict the progress which could be achieved by rearranging the teaching of them and to demonstrate experimentally the validity of my calculations. The progress of the students was rather spectacular and the results were published in the acts of a colloquium of science education. I consider that work to be a result, modest but incontestable, in micro didactiques.

You will not be surprised to learn that that text had absolutely no influence on teaching. I didn't try to get my proposition "passed" because changing a practice in use by an institution with fifty million members is quite another problem—a problem of macrodidactique! It takes a lot more than simply contributing a demonstration of the fact that one can gain nearly a year in the teaching of calculations in elementary school. I consoled myself with the observation that the country (France) which proposed to the world the adoption of a new system of measurement has not managed, two hundred years after a formal decision of its government, to suppress effectively the irregularities of oral numeration which bother children considerably.

D. Conclusions

I would just like to emphasize here the importance of a certain type of interaction with our object of study, and the importance of organiziing observations while monitoring the inevitable engagement of the observer in the teaching itself, insisting as I do so on the deontological precautions which we must respect. To the extent that we know better how to produce instruments of teaching and that we know better their conditions of use and their limits we must convince our interlocutors to let us conform to this deontology. We cannot simultaneously be ambitious decision makers and sensible researchers. The modesty of our knowledge restricts us.

On the other hand, the unexpected and non-coercible consequences of various reforms which I have observed, or to which I have given a hand, have convinced me that it is not lack of power which limits improvement of teaching, but rather ignorance. These observations have given me a great freedom and a certain serenity with regard to the various injunctions relative to action as well as to experimentation and theorization.

III Involvement of mathematicians in research in didactique.

1) Involvement of mathematicians in research in didactique

The legitimate social "control" of human activities occurs by way of the clarifications of a scientific approach, for the teaching of mathematics as for medicine or economics. As we mentioned before, a large number of disciplines furnish concepts, methods and framework useful for the necessary scientific approach. For all that, I maintain, for the same reasons, that not one of these disciplines is suitable for explaining the functioning of the irreducibly mathematical part of teaching of mathematics.

But if the study of these specific activities escapes, and possibly for a long time, it seems to me, the other classical domains, who could and should conduct them? For the moment they also escape the control of our classical forms of mathematical knowledge!

One could conclude that the best thing would be to confide the teaching of mathematics to teachers who are sufficiently "mathematical" and have confidence in them, even if what they do cannot be put under the control of a scientific study.

On the other hand, because the essential part of the activity of mathematicians is of a didactical nature and because the knowledge of their own activity is their job...

My third thesis is that if the scientific approach of the irreducibly mathematical part of teaching is indispensable, it is or will be the business of mathematicians.

That's a delicate point. Let me take the argument a little further.

2) Didactique of mathematics and mathematics

On the subject of teaching, didactique studies objects, functioning and phenomena which strongly resemble those which constitute a large part of the activity of mathematicians. In particular, it attempts to reproduce the conditions of the production of conjectures, theorems and demonstrations.

But it also models, even though in a modest and simplicial manner

— not only the communication of results between the different subcommunities of mathematicians,

— but also the reorganization of knowledge and the choice of formulation or of definitions designed to facilitate access to new problems

— and even the development of conceptions necessary for envisaging and conjectures.

The latter activities cannot be recognized as forming part of mathematics, because according to a conception which goes back twenty-five centuries we identify our activity only as the production of definitions, theorems and proofs. We can only found our judgements on these subjects and opinions and reasons "foreign" to our domain.

Thus Bourbaki, not having produced a single theorem, didn't "do" mathematics---nor Fermat with his conjecture. Thus teachers of mathematics cannot be admitted as such to the community because it is incapable of describing, comparing, appreciating and even receiving their action in the domain of mathematics.

Winning the challenge of didactique will lead in the end to proposing scientific means to legitimate these real but unrecognized activities of mathematicians. That will require a considerable upsetting of the representation which mathematicians and others have of their discipline.

3) Mathematical stakes of the didactic challenge.

My proposals must seem to you bold, dramatic and emphatic. My conviction is deep and long-standing. I believe it to be based on solid reasoning and repeated observations. My courage is furthermore bolstered by an admirable recent article by William P. Thurston. In response to an excessively orthodox article of Jaffe and Quinn, he shows the difficulties which mathematicians encounter and will continue to encounter if they continue to see their work only in terms of the classical model. They recognize in their work only the production of definition-speculation-theorem-proof. Thurston proposes to replace that with another: the work of a mathematician consists of "advancing human comprehension of mathematics".

"We are not trying to meet some abstract production quota of definitions theorems and proofs. The measure of our success is whether what we do enables people to understand and think more clearly and effectively about mathematics."[Bulletin of A.M.S., vol 30, number 2, April 1994]

He supports his proposition with a pertinent, deep and sincere description of what mathematicians do. He indicates why and how in his opinion mathematicians understand, communicate with, and prove themselves to each other, and he concludes by showing how by interesting in this part of their activity, mathematicians could really amplify and considerably ameliorate their task.

This text shows an extraordinary didactic perspicacity, but above all it seems to me to have a capital importance for the future of mathematics itself. He throws down a vast and important challenge to mathematicians.

4) Mathematics challenge:

As a consequence, didactique appears to be a possible means of identifying these activities and the understanding which guides them and of transforming them into knowledge. The insertion into mathematics of this form of knowledge about mathematical knowledge presents some obvious difficulties, about which all manner of suspicion and prudence are justified.

As it happens, he also justifies the following declaration:

My fourth thesis is that in this new conception of mathematics didactique will be fully part of "mathematics".

This is the reason that I present myself to you as a mathematician, which I am not in the classical sense.

This means that mathematicians will be involved as such in research on teaching of mathematics.

5) Conclusions

I don't know—and no doubt Thurston doesn't either—how mathematicians of the future are going to carry out the propositions of his programme, but I'm quite sure that it will happen one day.

And that day will be just as important for mathematics as the day in which, for the first time some great mathematicians agree to consider as one integral and necessary part of mathematics the humble and laborious and trivial explanations which it was necessary to give without much hope of the outcome, to a not-too-gifted but very determined young man in order for him to recognize mathematical truth.

Seattle, 18 May 1994
G. Brousseau ; Translated by Virginia Warfield

---

[i] **II Exemple d'un ensemble de recherches et de résultats en didactique**

Pour montrer comment fonctionnent les recherches en Didactique et quelles sortes de résultats elles peuvent produire, Ginger et moi avons choisi l'exemple dit de "la course à 20".

Il s'agit d'une recherche ancienne (1970-1972) qui ne porte que sur un nombre réduit de situations, présentables dans une classe (micro didactique), ces situations sont dites a-didactiques (nous dirions ici constructivistes) parce que les élèves sont censés construire leur savoir sans que les interventions du professeur apporte d'informations sur ce savoir lui même. La situation elle même est empruntée à un jeu très ancien (le piquet à cheval). Le savoir construit est très élémentaire et la réorganisation didactique très limitée. Nous avons par la suite étudié la diffusion didactique de connaissances mathématiques beaucoup plus complexes et mis en évidence des phénomènes beaucoup plus inattendus. Je pense que Ginger vous en parlera si cela vous intéresse.

A . Questions et conditions

1) Le problème d'ingénierie didactique.

a) Relation sens d'une opération / algorithme.

Les élèves de 4ème année de primaire connaissent assez bien un algorithme de la division euclidienne et ils ont été habitués à associer cet algorithme à la recherche du terme inconnu d'un partage: soit la valeur d'une part, soit le nombre de parts. Des recherches antérieures ont montré que l'algorithme n'est pas bien compris, en ce sens que les élèves ne peuvent pas l'expliquer ni le rattacher à la solution des problèmes posés. Ils ne peuvent pas s'écarter de sa reproduction stéréotypée. La disposition des calculs n'est d'ailleurs pas optimale car elle favorise certaines erreurs.

A chaque nouvelle étude d'un problème de division, les enseignants sont conduits à se ramener à cette association en reformulant le problème en termes de recherche du terme inconnu d'un produit, ce qui déclenche l'algorithme. Il est ainsi presque impossible de re-analyser cet algorithme et d'étendre son sens à des problèmes réellement différents. Des apprentissages trop étroitement conditionnés aboutissent souvent à ce genre de difficultés.

Il s'agissait donc d'imaginer une situation qui ait une division pour solution, mais qui conduise les élèves à réinventer l'algorithme de la division, au besoin en le disposant différemment. Il ne fallait donc pas qu'ils puissent l'identifier avec un de leurs problèmes familiers.

Un problème de recherche du reste semblait idoine.

b) Raisonnement. Parmi les objectifs scolaires figuraient une initiation au raisonnement mathématique et l'introduction de certains mots de métamathématique comme "théorème" ou "démonstration". Cependant l'âge des élèves nous suggérait d'établir le statut mathématique des énoncés, non pas de façon formelle comme un langage isolé, mais plutôt par rapport à un ensemble de modalités plus large et en rapport avec une activité de preuve: quelles règle faut-il respecter pour convaincre quelqu'un de façon "mathématique" ?

c) motivation. Un objectif constant aussi consistait à vouloir augmenter la motivation mathématique des élèves en leur faisant prendre du plaisir dans l'acte même d'inventer, de prouver ou d'apprendre des connaissances mathématiques.

2) Diverses questions de didactique théorique ou expérimentale

C'est un sujet un peu ancien, ce qui nous oblige à rappeler quelques questions théoriques qui se posaient à l'époque.

a) Dans le domaine des théories de l'apprentissage, la querelle entre Skinner et Chomsky avait rebondi avec la démonstration de Suppes. Certes, pour apprendre à produire des phrases de longueur infinie, un modèle stimulus- réponse était insuffisant car il fallait au moins un automate fini, mais pour chaque automate fini, il existait un S-R. Model qui lui était assymptotiquement équivalent. Le débat se déplaçait par conséquent sur les vitesses de convergence (la question devait être résolue un peu plus tard par Arbib et Nelson). Il était donc intéressant de confronter une découverte par les élèves, si nous pouvions la provoquer, à ces différents modèles. Les modèles Skinneriens primitifs s'étaient alors déjà un peu complexifiés sous l'impulsion, entre autres, de Estes (modèles stochastiques d'apprentissage par échantillonnage par ex.) et divers perceptrons étaient à l'étude.

b) Dans ma théorie des situations j'utilisais les automates (stochastiques ou non) comme modèle des "situations", c'est-à-dire comme modèle des problèmes posés aux élèves et non pas comme modèles des élèves. En m'appuyant sur une idée de Paul Lorenzen, je pensais avoir identifié le genre de modèle qui pouvait être caractéristique de la création d'un théorème. Il s'agissait donc d'exhiber une situation de ce type et de l'étudier.

Nous avions déjà fait un inventaire de conditions nécessaires pour qu'une situation permette un processus non didactique de redécouverte d'une connaissance fonctionnant comme modèle implicite d'action (M.I.A.). Les situations correspondantes étaient des situations d'action, qui provoquent chez les élèves des adaptations cognitives mais qui n'exigent pas que les connaissances qui apparaissent ainsi soient explicitées. Elles peuvent même rester inconscientes car elles n'interviennent que comme moyen de solution par l'action ou la décision.

Nous avions aussi identifié les caractères des situations permettant la formulation de ces connaissances implicites, en particulier pour satisfaire des besoins précis de communication.

c) Il nous paraissait intéressant d'étudier les caractéristiques de ces situations, des connaissances qu'elles activent, des apprentissages qu'elles provoquent, et bien sûr, les interactions entre les diverses formes d'une même connaissance (M.I.A., langage, théorème). Nous pensions en particulier à des hypothèses comme celles ci:

La formulation en situation non didactique {accélère ou ralentit} l'apprentissage (confronter avec Vigotski).

Les situations de preuve ou de "validation" {convertissent ou non} un modèle implicite en savoir? Un MIA est il nécessaire pour l'apparition d'un théorème.

Les situations d'action {convertissent ou non} les savoirs en connaissances.

Les M.I.A.{sont nécessaires, favorisent, contrarient} l'apparition des théorème, etc.

Des problèmes à la fois théoriques et méthodologiques se posaient.

Par exemple: comment définir et mettre en évidence un modèle d'action ?

[ii] a) La course à 20: présentation aux élèves. L'institutrice annonce un jeu. Elle invite un élève à venir au tableau et énonce les règles au fur et à mesure en jouant avec lui. Ce jeu se joue à deux. Chacun commence à tour de rôle. Celui qui commence choisit entre 1 ou 2. l'autre répond un nombre qu'il obtient en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par son partenaire, et ainsi de suite. Celui qui dit 20 gagne.

première phase (action): les élèves jouent un contre un en silence pendant 10 minutes.

deuxième phase (formulation): La classe est partagée en deux équipes ayant un nombre égal d'élèves, qui jouent l'une contre l'autre de la façon suivante: dans chaque équipe les élèves se répartissent des numéros. L'institutrice appelle un numéro, cela désigne deux représentants qui vont au tableau disputer une partie. Entre les parties, les joueurs se concertent dans chaque équipe pour convenir des décisions et des stratégies à utiliser.

troisième phase: Les deux équipes poursuivent la compétition par un concours de théorèmes

A tour de rôle, chaque équipe propose une tactique: par exemple "il faut jouer 17" ou un "théorème": "Celui qui joue dix-sept peut empêcher son adversaire de gagner". Si l'autre équipe veut pouvoir utiliser la tactique, elle "l'achète" en donnant un point à son adversaire. Mais si elle montre qu'un théorème de l'adversaire est faux elle gagne des points (5 par exemple).

Chaque équipe peut obliger l'autre à jouer une série de parties en lui imposant un même nombre de départ.

Chaque équipe peut proposer de convaincre son adversaire de la validité de sa tactique et gagne plus de points si l'adversaire accepte son raisonnement.

L'équipe attaquée peut se délivrer de son obligation en montrant qu'on l'oblige à perdre.

etc.

Les règles réalisent un système de proposant et d'opposant dans lequel les théorèmes et leur démonstration doivent être inventés pour augmenter le gain ou diminuer la perte. En fait, le règlement par points n'est pas appliqué fermement (il n'existe pas d'automate universel capable de créer tous les théorèmes de mathématiques). Il n'est là que pour inciter les élèves à chercher des preuves et pour régler les conflits.

Nous allons étudier cette situation un peu plus loin.

b) La re-découverte de la division se poursuit de la façon suivante.

Lorsque les enfants ont trouvé et discuté la stratégie gagnante, le professeur propose d'autres "courses à n" avec les mêmes règles. Il ne fait pas expliciter les classes modulo trois.

Il propose alors une nouvelle règle: on peut choisir d'ajouter à chaque coup un des nombres inférieurs ou égaux à p (p = 6 par exemple). Les élèves trouvent qu'il faut dire les nombres de 7 en 7 et cherchent le nombre que doit dire le premier joueur.

Le professeur propose des problèmes du genre on fait la course à 38 422 avec un "pas" de 17. Les élèves procèdent par soustractions répétées et re-inventent des soustractions groupées pour économiser des calculs. Une disposition "ergonomique" différente de la disposition habituelle maintient le mystère jusqu'à ce que les enfants reconnaissent là une division .

2) Etudes de la phase d'action

L'expérience complète d'enseignement a été observée plus de soixante fois, chaque leçon étant suivie d'interrogations cliniques ou collectives.

En outre, la phase d'action a fait l'objet de plusieurs expériences.

a) nombre de jeux illimité. Les élèves jouent et rejouent avec le même partenaire autant de parties qu'ils le veulent. Sur les cinq premières parties nous avons ainsi les résultats de plus de 900 paires et nous avons des paires qui ont joué plus de cent parties.

Résultats (voir diagramme 1):

- sous la forme implicite le théorème "dire 17" apparaît et persiste, dès la troisième partie
- Le passage du théorème 17 au théorème 14 est beaucoup plus long
- la vitesse de découverte décroît (alors qu'on s'attendait à ce qu'elle croisse par effet de récurrence) suivant une loi quadratique. Explication: un théorème implicite n'est jamais équivalent à une règle.
- les théorèmes 5 et 2 sont totalement inaccessibles par cette voie purement empirique
- les élèves prennent conscience des conséquences dans les deux alternatives lorsqu'ils sont en position d'échouer et non pas quand ils sont en position gagnante.

b) Apprentissage de la course à 7 et à 20 contre un moniteur qui applique la stratégie gagnante. Le "moniteur" est en fait un disque de carton.

Résultats: les élèves repèrent les choix systématiques du moniteur et apprennent ainsi beaucoup plus rapidement que ci dessus la suite des nombres gagnants mais ils sont moins capables d'expliquer pourquoi ces nombres gagnent.

c) Confrontation à des modèles théoriques d'apprentissages. Les modèles étaient du type de Rosenblatt: après d'une partie gagnante la probabilité de choix des nombres qui ont étés utilisés est augmentée, celle des autres diminuée.

Résultats: il existe un modèle simple pour la course à 7, mais pour la course à 20, aucun modèle de ce type n'a pu atteindre les vitesses de découverte des élèves (diagramme 2).

d) Quelle "stratégie" utilisent donc les élèves dans cette situation d'action.

R. Une analyse plus précise montre que les élèves qui "connaissent" le théorème t = 20-3k commencent la partie en ajoutant systématiquement 2 jusqu'au nombre t - 7, ils semblent pratiquer par essais et erreurs sur un intervalle de 7 nombres puis appliquent la tactique connue (diagramme 3). Ces stratégies de réduction de l'incertitude et d'analyse régressive semblent assez générales.

3) Etudes de la phase de formulation.

Cette phase est supposé favoriser les formulations de théorèmes et de tactiques et même l'apparition de quelques preuves.

R: Parmi de nombreuses observations on relève que les élèves ne peuvent formuler des théorèmes que plusieurs parties après qu'ils se soient manifestés comme M.I.A. Les premiers débats se heurtent au rôle particulier de la contingence: ce qui s'est passé ne peut pas servir de contre exemple: un élève peut avoir joué un nombre gagnant et perdre par la suite. Un joueur peut ne pas pouvoir appliquer sa stratégie.

La formulation n'accélère pas la découverte des théorèmes et n'augmente pas la conviction des élèves. Ce résultat semble contredire les résultats de Vigotski. Il s'agit ici d'un cas qu'il n'a pas examiné: les formulations en situation d'incertitude.

4) Etudes de la phase de "validation sociale" (preuves)

Observations. Les théorèmes apparaissent suivant l'ordre régressif. La preuve par exhaustivité pour le Th 17 est proposée assez rapidement et le plus souvent spontanément (sans règle de points).

Les débats accélèrent les découvertes de façon spectaculaire. Il est toutefois difficile de maintenir une action complètement a-didactique du professeur.

Même institutionnalisé, un théorème ne devient pas équivalent à une règle: les élèves commencent par reprendre les démonstrations de bout en bout. Par la suite, ils se reportent au résultat déjà obtenu et montrent qu'en jouant 14 on peut jouer 17 et que 14 alors est gagnant puisque 17 l'est mais plus le raisonnement est long plus la conclusion est "incertaine".

Les modalités différentes d'un même théorème, et leur rôle dans la résolution des problèmes et la construction des savoirs, apparaissent alors clairement différentes suivant le type de relation de l'élève avec son environnement.

La récurrence pour la formulation d'une conjecture n'apparaît pas avant que l'on ait établi le théorème 14. Elle apparaît le plus souvent avec le th.11. Le prolongement et la réitération apparaissent assez généralement avec le théorème 8. Mais l'idée qu'il existe une stratégie entièrement déterminée leur répugne et bloque pour certain l'acceptation des derniers théorèmes.

Résultat didactique: le professeur peut faire un court commentaire sur les manières honnêtes de se convaincre et de convaincre les autres en mathématiques et sur les règles du débat scientifique.

Retourner à la suite du texte en Anglais.