

# Notes pour une présentation au groupe d'étude **ICMI Study 94**

“What is Research in Mathematics Education and What Are Its Results?” Washington 1994

**(texte reconstitué en 2011)** Les seules notes en Français que j'ai retrouvées ne sont pas conformes au texte en Anglais. Elle sont plus explicites, c'est pourquoi je les publie. J'ai dû réorganiser l'ordre des déclarations en me limitant à corriger les fautes et quelques omissions évidentes. Ce texte est à rapprocher de la conférence que j'ai donnée à l'Université du Washington à Seattle, sous le même titre. On trouvera dans ce dossier le texte en anglais de cette communication : « Problems and results of Didactique of Mathematics ». Je ne l'ai retrouvé qu'après avoir reconstitué le texte de notes présenté ici. Les deux textes sont assez différents !

## **Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques**

Guy Brousseau

### *Introduction*

Cette conférence est peut être la première où, nous, les mathématiciens, nous tentons enfin de regarder, du point de vue de leur validité, nos propres travaux sur l'éducation mathématique. C'est un moment bien émouvant pour moi car bien que je ne sois rien d'autre au fond qu'un observateur passionné de l'activité mathématique des élèves de la scolarité obligatoire, je souhaitais ce débat depuis très longtemps.

### 1. Prolégomènes de la Didactique des Mathématiques<sup>1</sup>

*Déclaration 1. L'Implication des mathématiciens dans l'enseignement de leur discipline est indispensable.*

Il existe dans l'enseignement des mathématiques des activités irréductiblement mathématiques comme entre autres

- la construction et le choix des problèmes
- la réorganisation d'un exposé, pour faciliter la communication, la compréhension ou l'usage d'une théorie mathématique...

*Déclaration 2 Le « contrôle » scientifique de l'enseignement des mathématiques requiert des savoirs scientifiques*

Mais si ces activités sont connues des seuls mathématiciens, elles n'en sont pas pour autant sous le contrôle scientifique de leur discipline

*Déclaration 3 :Le contrôle de l'enseignement des mathématiques est une nécessité sociale et professionnelle qui doit s'appuyer sur un "contrôle" scientifique*

La question ne s'est ouverte, comme projet de la communauté, que très progressivement, principalement depuis la conférence ICME de Lyon en 1968. Je ne rappellerai pas les raisons et les illusions qui ont favorisé cette entrée, mais seulement les exigences sociales de clarification des activités d'enseignement et les demandes des professionnels. Assez rapidement, à Karlsruhe puis à Adélaïde, notre communauté a renvoyé les recherches à caractère scientifique impliquant des

---

<sup>1</sup> Qui ne se réclame d'aucune Didactique Générale. Dans tout ce texte, « Didactique » signifie « Didactique des Mathématiques »

mathématiciens et portant sur l'enseignement des mathématiques, sous la responsabilité des autres disciplines, classiques si possible : psychologie, linguistique, sociologie, etc.

*Déclaration 4 L'Enseignement des Mathématiques, les Recherches en éducation mathématique, et la Méthodologie des mathématiques tendent à former un champs scientifique pour les sciences établies. Mais ce champ n'a aucune consistance propre, ni théorique ni expérimentale.*

*Déclaration 5 : Or le renvoi de cette responsabilité aux autres sciences s'est révélé lui aussi insuffisant*

Le renvoi aux autres sciences a donc été un choix raisonnable et méritoire en l'état des connaissances de 1968. Il a donné des résultats appréciables et a permis le développement d'une communauté dont l'appui se révèle toujours plus indispensable. Cependant l'importation d'un résultat issu de ces disciplines vers la décision didactique présente toujours un saut assez douteux. Les mathématiciens-enseignants sont assaillis de prescriptions et d'avertissements divers mais ils n'ont aucun moyen raisonnablement surs de les convertir en décisions appropriées, ni de les concilier avec d'autres exigences, ni même d'en contrôler l'application.

*Déclaration 6 Un cadre scientifique spécifique à l'enseignement des mathématiques est indispensable*

La réunion des mathématiques au sens actuel et des autres disciplines ignore une partie essentielle des objets qu'il convient d'étudier. Il est donc indispensable de donner à ce champ un fondement épistémologique compatible avec les sciences existantes et des concepts et des méthodes scientifiques appropriées.

Cette approche scientifique des activités didactiques propres aux mathématiques, est comparable à des domaines comme la logique, l'épistémologie, l'histoire des mathématiques et l'informatique théorique<sup>2</sup>

*Déclaration 7*

*L'acte même de comprendre un énoncé de mathématiques ne peut pas être indépendant de cet énoncé lui même, et donc, des conditions dans lesquelles il se présente. Il en est de même pour l'acte d'apprendre.*

Les théories de l'apprentissage qui ne procèdent de la connaissance visée qu'en tout dernier ressort ne visent que l'expression du savoir pas son sens.

En d'autres termes, la Didactique doit étudier les situations où se manifeste la production et la transmission des connaissances et des savoirs mathématiques et leurs effets sur les protagonistes et leurs productions.

Il peut exister d'autres approches mais l'objet est le même.

Nous avons préféré ce terme péjoratif de "didactique" à celui plus élégant "d'épistémologie expérimentale" pour montrer l'intérêt que nous portons aux cas où cette diffusion est imposée à celui qui la reçoit, et surtout parce que toute diffusion relève plus ou moins de ce cas.

Elle ne comprend pour l'instant qu'un vaste champ de résultats clairsemés autour des embryons de quelques théories, parmi lesquelles la plus brillante me semble être celle de Yves Chevallard, dont je regrette vivement l'absence ici aujourd'hui.

---

<sup>2</sup> Jean Pierre Kahane ancien Président de l'ICMI à proposé le regroupement de ces domaines sous le nom de « Sciences Mathématiques »

## 2. Qu'est-ce qu'un résultat de Didactique, comment l'obtient-on ?

Je veux, au sujet du devenir d'un résultat, évoquer seulement un souvenir personnel. Dans les années 60, j'ai prouvé que la disposition scolaire des calculs de la multiplication et de la division en France, diminuait leur fiabilité en favorisant l'apparition de certaines erreurs, et retardait l'apprentissage. Grâce à un calcul ergonomique élémentaire, je suis parvenu à prévoir les progrès qui résulteraient d'un changement de disposition et à prouver expérimentalement la validité de mes calculs. Les progrès des élèves étaient assez spectaculaires et les résultats furent publiés dans les actes d'un colloque des sciences de l'éducation. Je considère ces travaux comme un résultat, modeste mais incontestable, de micro didactique.

Vous ne serez pas surpris d'apprendre que ce texte n'a eu aucune influence sur l'enseignement. Je n'ai pas essayé de "faire passer" ma proposition car changer une pratique en usage dans une institution de cinquante millions de membres est un autre problème, un problème de Macrodidactique.

*Déclaration 8 : L'implication des mathématiciens dans la recherche en didactique est indispensable.*

Si l'approche scientifique de la partie irréductiblement mathématique de l'enseignement est indispensable, elle est ou sera principalement l'affaire des mathématiciens. C'est un point délicat, permettez-moi de l'argumenter un peu.

## 3. La Didactique des mathématiques et les Mathématiques

La didactique cherche à reproduire les conditions de la production de conjectures, de théorèmes et de preuves.

Elle modélise aussi, quoique de façon très modeste et simplifiée

- non seulement la communication des résultats entre les différentes sous communautés de mathématiciens,
- mais aussi la réorganisation des savoirs et le choix de formulations ou de définitions destinés à faciliter l'accès à de nouveaux problèmes,
- et même le développement de conceptions nécessaires pour envisager de nouvelles conjectures.

Ces dernières activités ne peuvent pas être reconnues comme faisant partie des mathématiques, car selon une conception qui remonte maintenant à vingt-cinq siècles, nous identifions seulement notre activité avec la production de définitions, de théorèmes et de démonstrations.

Ainsi Bourbaki n'ayant produit aucun théorème n'a pas "fait" de mathématiques, non plus que Fermat avec sa conjecture.

*Déclaration 9 La didactique des mathématiques doit proposer les moyens scientifiques de légitimer (ou non) les décisions et les actions des mathématiciens en matière d'enseignement de leur discipline.*

Gagner le défi de la Didactique conduira, à terme, à proposer les moyens scientifiques d'une légitimation de ces activités réelles, (mais non reconnues des mathématiciens). Cela suppose des bouleversements considérables de la représentation que les mathématiciens et les autres se font de leur discipline.

*Enjeu mathématique du défi didactique*

Mes propos doivent vous paraître bien téméraires, dramatiques et emphatiques. Ma conviction est profonde et ancienne. Je la crois fondée sur des raisonnements solides et des observations répétées. Mais faire ce genre de déclarations devant une assemblée de spécialistes dont je connais depuis longtemps la compétence, la prudence et la sourcilleuse rigueur a de quoi faire trembler. Je n'aurais certainement pas eu cette audace si je n'avais pas reçu le formidable appui d'un admirable article récent,<sup>3</sup> de William P. THURSTON.

En réponse à un article de JAFFE et QUINN, qui s'indignaient de ses pratiques non orthodoxes, il montre les difficultés que rencontrent et que vont rencontrer les mathématiciens s'ils continuent à ne voir leur travail qu'à travers le modèle classique.

*Déclaration 10 Les mathématiques émergent de l'activité de l'ensemble de la communauté et non pas seulement de celles d'individus indépendants*

Thurston appuie sa proposition sur une description que je trouve pertinente, profonde et sincère de ce que font les mathématiciens. Il indique pourquoi, et comment à son avis, les mathématiques se comprennent, se communiquent et se prouvent. et il conclut en montrant comment, en s'intéressant à cette partie de leur activité, les mathématiciens pourront réellement amplifier et améliorer considérablement leur tâche.

Ce texte témoigne d'une perspicacité didactique extraordinaire, mais surtout il me paraît d'une importance capitale pour l'avenir même des mathématiques. Il lance un défi bien plus vaste et important aux mathématiciens.

*Déclaration 11 La Didactique doit être retenue comme faisant partie des Sciences Mathématiques comme la Logique, l'Epistémologie des Mathématiques ou l'Histoire des Mathématiques ...*

C'est la raison pour laquelle je me suis présenté à vous comme un mathématicien, que je ne suis pas au sens classique.

*Les Défis mathématiques de la didactique*

*déclarations 12 à 15<sup>4</sup> [... ? ]*

*Conclusion*

Je ne sais pas - et sans doute que THURSTON ne le sait pas non plus - comment les mathématiciens de l'avenir réaliseront les propositions de son programme, mais je suis sûr que cela se fera un jour.

Et ce jour-là sera aussi important pour les mathématiques que celui où pour la première fois, cinq siècles av. J.C. quelques mathématiciens parmi les plus grands ont accepté de considérer comme partie intégrante et nécessaire des mathématiques, les humbles et laborieuses et triviales explications qu'il fallait donner en désespoir de cause à un jeune homme peu doué, mais exigeant, pour lui faire reconnaître la vérité mathématique.

Washington, le 8 Mai 1994  
G. Brousseau

---

<sup>3</sup>: "on proof and progress in mathematics"

<sup>4</sup> Je n'ai pas pu retrouver ces déclarations qui ont dû être coupées pour des raisons de temps de parole.