GUY ET NADINE BROUSSEAU

ATELIER D'INGENIERIE ET D'ANALYSE
DES PROCESSUS DIDACTIQUES
RATIONNELS ET DECIMAUX

PRESENTATION ET ORGANISATION

But de l'atelier

Cet atelier a pour but de permettre aux participants de s'initier aux méthodes d'analyse, de conception et de conduite des processus didactiques complexes et des leçons qui les composent. Nous souhaitons qu'ils puissent faire usage de nos informations dans leurs recherches et dans la formation des professeurs des écoles.

Concrètement nous voulons que chaque participant ait participé à l'élaboration d'une grille d'analyse des situations didactiques, d'une grille d'analyse des connaissances, et d'une grille d'analyse des processus.

Organisation didactique générale

L'atelier s'appuiera sur l'étude de l'expérience de didactique : « l'enseignement des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire » dont les objectifs et les résultats *scientifiques* seront exposés à part.

Il s'agira d'identifier les objectifs, les caractères et les résultats *didactiques* de l'expérience d'enseignement, en les regardant comme des instanciations de principes généraux et de théorèmes de didactique issus de la théorie des situations

Ne seront exposés formellement par les responsables de l'atelier que les éléments strictement indispensables au déroulement de l'atelier. Des textes d'accompagnement permettront aux intéressés de s'informer et aux moniteurs de l'atelier d'éviter de multiplier les interventions générales. Nous comptons réserver au moins trois heures pour les travaux en groupes de trois et pour les comptes rendus au cours desquels nous nous efforcerons de répondre aux questions des participants.

Méthode de travail

Nous vous proposerons d'analyser des leçons et l'ensemble du processus à l'aide de grilles dont nous donnerons les bases et des exemples mais que vous pourrez compléter, modifier et discuter.

Cette méthode de travail suppose

- que chaque participant ait entre les mains au moins l'ouvrage étudié ainsi que l'exposé dit « de Montréal » pour les références des contrats didactiques.
- que certains veuillent bien préparer les comptes rendus (courts) de l'activité de leur groupe chaque soir pour le lendemain.

Ressources pour les participants

Les participants auront à leur disposition

1. un exemplaire de l'ouvrage « l'enseignement des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire »,

2. Les séquences filmées suivantes (DVD et bandes VHS) seront disponibles sur 2 DVD à lire sur l'appareil de l'atelier ou à la bibliothèque :
    module 1-1 épaisseur d'une feuille (L.I. leçon introductive)
    module 5-1 encadrement d'un rationnel par des rationnels (leçon introductive)
    module 6-5 l'ordre dans les décimaux (leçon ordinaire)

module 8-2 Fonction linéaire : Image d'une entier : le puzzle (leçon introductive)
module 9-3 dénomination des reproductions linéaires (leçon introductive)
module 14-2 composition d'applications (leçon introductive)

3. Les documents d'accompagnement de l'atelier suivants (sous forme de fichiers informatiques ou de papiers suivant les possibilités) seront fournis au fil des séances

a) présentation organisation. (séance 1) Annexe : programme (séance 1)
b) méthodes d'analyse (séance 2)
c) analyse d'une situation a-didactique (séance 2) annexes : formes de connaissances (séance 2)
d) analyse d'une situation didactique (séance 3) annexes), différents contrats didactiques (séance 4) descripteurs d'une situation didactique (séance 4)
e) analyse de processus (séance 3) annexes : structure du processus R & D (séance 1), les dépendances didactiques (séance 3)

4. Des diaporamas (à consulter sur l'ordinateur de l'atelier) rappelleront divers aspects théoriques ou méthodologiques de la TSDM.

5. Les ouvrages évoqués dans la bibliographie seront disponibles à la bibliothèque.

Note Il est possible d'obtenir des textes indiquant les caractéristiques de l'enseignement des *nombres naturels* qui précédait cet enseignement des rationnels et des décimaux. Demander les références aux animateurs de l'atelier.

Résultats

Nous souhaiterions pouvoir présenter dans un CD.ROM, avec nos textes : vos études, vos observations, vos questions et vos propositions sur ce corpus.

Emploi du temps

Les travaux seront répartis dans les quatre séances de 1h 30 selon le programme en annexe (qui sera remis aux participants) :

Note : Ressources pour les animateurs

Deux ordinateurs
15 exemplaires de R & D
Matériel scolaire : pied à coulisse, puzzle, pantographe,
Les 2 DVD
Les diaporamas
Les textes à distribuer
Les textes de la bibliographie

ANNEXE DU DOCUMENT 1

Programme de l'atelier « Rationnels et décimaux »
Nadine et Guy Brousseau

1ère séance : Atelier 1

a) Présentation de l'atelier
les participants : leur travail, l'origine:de leurs travaux (N : les noter)
le sujet : distribution du tableau et du matériel, les références
la forme de travail : groupes, comptes rendus, documents écrits,
les grilles en chantier, les débats. (lecture commentée de la présentation mais non remise)

b) Présentation de l'expérience « Enseignement des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire » : enjeux scientifiques et aspects didactiques. Enumération des différentes grilles à élaborer et des méthodes d'analyse:

c) Analyse de cinq situations introductives (définitions implicites)

Travail par groupes de 3, un sujet par groupe : (papiers, approximation, puzzle 1, optimist 2, pantographe) Les moniteurs (N et G) des ateliers répondront aux questions particulières des groupes. **Travail intra groupe : TaG**

d) Le contexte didactique des connaissances des élèves et son évolution (introduction à l'analyse des situations « intermédiaires »). Exposé.

e) Préparation des comptes rendus du lendemain (travail intra groupe) TaG

2^{ième} séance : Atelier 2

a) **Présentation par un membre de chaque groupe, des renseignements recueillis (avec leurs propres grilles) lors de la première séance. Travail inter groupe TiG**

b) Analyse collective des 5 leçons,
  a. Présentation et remise du documents 2 : Méthodes d'analyse,
  b. Présentation et remise du documents 3 : Analyses d'une situation a-didactique

c) Questions relatives aux différents types de connaissances manipulées par le professeur
  a. distribution du document 5 : formes de connaissances
  b. commentaire rapide

d) le rôle des leçons « intermédiaires » : exposé

e) **Analyse d'une ou de plusieurs leçons « intermédiaires », en plusieurs ou en un seul groupe.**

f) La création de grilles d'analyse des situations et des connaissances

g) **Temps pour jeter les bases du compte rendu du ou des groupes**

3^{ième} séance : Atelier 3

a) Compte rendu de l'analyse des leçons « intermédiaires » :

b) Questions relatives à l'analyse des « résultats de leçons » dans un processus, et questions sur l'organisation des processus, Remise et commentaire de l'annexe du document 6 : les dépendances didactiques

c) Analyses du processus d'enseignement et d'apprentissage (par groupes). Repérer des formes de dépendances, les principes qui les justifient et les commenter ou les discuter la liste des principes et des théorèmes de didactique. En conclusion annonce ou remise du document 6

d) La création et l'étude de grilles de dépendance et d'évolution des connaissances
(document sur l'analyse statistique des dépendances dans N: ?)

4^{ième} séance : Atelier 4

a) **Compte rendu sur la création des différentes grilles** (caractères des situations didactiques et a-didactiques, formes de connaissances, dépendances entre les situations, principes) remise d'une ébauche de grille les caractères des situations didactiques et du document 8 sur les contrats didactiques.

b) Conclusions des animateurs (exposés): Panorama d'ensemble du processus et des moyens d'analyses
  a. les principes de l'analyse et de l'ingénierie des situations didactiques

  b. les objectifs et les conclusions de la recherche sur les TSD.
  c. les questions d'enseignement
  d. les questions et les résultats scientifiques en TSD

c) Synthèse et conclusions des participants. Rôle de l'ingénierie, de l'observation et de la théorie dans la formation des professeurs.

Remarques :

1. Les périodes de travail dévolu aux participants pendant l'atelier sont **en gras** (240 minutes sur 360). Ce qui laisse 2 heures pour l'organisation et les exposés. C'est peu pour pénétrer un ouvrage dont la partie émergée fait plus de 500 pages. C'est la raison pour laquelle nous avons prévu tant de documents annexes.

2. Mais ces documents ne sont eux-mêmes que des ébauches, car la complexité des instruments nécessaires pour traiter les sujets abordés est beaucoup plus grande que ce que notre culture nous permet d'envisager de dire. Pour passer de nos rêves à la réalité de l'étude scientifique de la didactique des mathématiques peut-être faudra-t-il autant de temps qu'il en a fallu pour passer des programmes de Cyrano de Bergerac à ceux d'Apollo.

3. Dans les activités autonomes chaque participant exerce ses talents et ses connaissances à sa guise, il n'y a pas de tabou, mais les animateurs ne s'engagent à présenter et à discuter que les résultats de leurs propres travaux, à l'aide des conceptions et des instruments qui sont les leurs.

4. Le déroulement et la réalisation du programme impossible de notre atelier seront soumis aux possibilités, aux désirs et à l'humeur des participants, ainsi qu'aux impedimenta inhérents à un voyage aussi débridé.

4. Les participants sont toutefois priés de ne pas manger à tous les ateliers. Il n'y aura pas de séances de rattrapage pour les nomades, ni d'absolution pour les déserteurs.

Annexe

GUY BROUSSEAU

INTRODUCTION A L'INGENIERIE DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES

1. PRESENTATION

Le terme d'ingénierie est récent et son sens varie encore suivant les traductions et les domaines. Hasardons une définition :

« L'ingénierie didactique est l'étude d'un projet d'enseignement sous ses aspects didactiques, techniques, économiques, financiers et sociaux et qui nécessite un travail de synthèse coordonnant des travaux de diverses équipes de spécialistes ». Pour sa part, Michèle Artigue[1] en donne la définition suivante :

> The concept of didactic engineering entered the didactics of mathematics in the early 1980s. The aim was to use this term to label a form of didactic work: we may compare the work of an engineer who, in order to carry out a particular project, draws support from scientific knowledge in the domain, accepts scientific verification, but at the same time, has to work on objects which are far more complex than the simplified objects of the science. Engineers must therefore treat in a practical way, with ail the means at their disposal, problems which science does not wish to or is not able to tackle

Mais nous allons la préciser.

L'ingénierie consiste

- en la ***conception*** et en la ***réalisation*** de tout ou partie de curriculums : une suite de leçons, une leçon, un assortiment d'exercices, un manuel, un programme informatique etc. et au sens strict du terme ingénierie, cette conception est accompagnée de l'étude des diverses possibilités entre lesquelles il est fait un choix, et de l'explicitation des raisons de ces choix (techniques, scientifiques, et autres).
- Mais en un sens plus large, on peut y admettre la simple ***production*** d'un curriculum – sans ses justifications précises – et, par conséquent aussi sa ***conduite***, dans la mesure ou tout curriculum laisse nécessairement un certain champ de décisions didactiques à l'enseignant qui l'utilise
- Enfin les ***techniques spécifiques*** à ce genre de travaux forment une partie commune à cette discipline et à la didactique elle-même.
- On peut y adjoindre des ***recherches d'ingénierie*** lorsque des problèmes techniques identifiés précisément font l'objet d'études théoriques ou expérimentales directement liées aux conditions d'un projet d'enseignement déterminé.

Ce cycle d'études a pour objet d'exposer quelques uns des principes et des techniques qui ont été dérivés de la théorie des situations didactiques et illustrés par leur mise en œuvre dans le curriculum consacré à l'enseignement des « rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire ».

Dans les expériences dont nous allons parler, l'ingénierie était en partie au service de ***recherches plus fondamentales***. Il faudra donc évoquer aussi les dispositifs et les aménagements du curriculum liés à ce volet du projet, ainsi que les résultats qu'il a permis d'obtenir. Les rapports de l'ingénierie avec la didactique théorique et expérimentale sont d'ailleurs très étroits. On peut distinguer l'*ingénierie* proprement dite qui conduit à la création d'un curriculum effectif, pour enseigner et la *phénoménotechnique* qui est l'art de préparer une expérience d'enseignement pour répondre à des questions de didactique. Mais en fait la technologie et les techniques sont identiques, car la même éthique s'impose dans les deux cas.

Et par conséquent, la frontière entre l'ingénierie et la science didactique est encore assez floue.

---

[1] Michèle Artigue, Didactic engineering, 41-65, *Research in Didactique of mathematics Selected paper*s Régine Douday ; Alain Mercier Ed RdM 1992)

Par contre, et parce que les curriculums qui nous serviront d'exemples n'étaient pas destinés à un ***développement direct dans l'enseignement***, nous avons pu écarter de nos travaux les conditions et les études liées à ce développement (adaptation aux enseignants, aux structures éducatives, à la noosphère et à la communication). Ces travaux ont complètement et volontairement ignoré les possibilités de diffusion dans le système éducatif réel.

2. LES METHODES CLASSIQUES

Pour réaliser un curriculum il est nécessaire de combiner les opérations suivantes :

a) Modifier un curriculum existant (manuel, ou description d'une pratique observée), ou le comparer à un projet nouveau obtenu différemment

b) Imaginer un ensemble de tâches correspondant à un ensemble d'objectifs et ensuite les ordonner

c) Partir d'une liste de notions à enseigner telles qu'elles figurent dans un programme et en dériver une suite d'activités didactiques

Les principales conditions qui semblent devoir être satisfaites sont les suivantes :

a) L'ensemble des séquences doit présenter l'ensemble des notions visées

b) Chaque séquence doit pouvoir être enseignée et le savoir qu'elle propose doit pouvoir être appris pendant cette séquence.

Il semble les résulter au moins qu'

a) Aucune des séquences d'enseignement composant le curriculum ne doit faire appel à des connaissances qui n'ont pas été apprises précédemment. Il en résulte une classification des séquences suivant leur dépendance à l'égard des autres séquences, et diverses relations d'ordre entre elles.

b) Aucune séquence ne peut être menée à bien si les connaissances « requises », c'est-à-dire devant être enseignées au préalable ne sont pas « acquise ».

Techniquement on peut alors distinguer parmi les séquences

- celles qui ne dépendent pas ou très peu des connaissances antérieures : les séquences initiales
- celles qui doivent être précédées par d'autres les séquences intermédiaires
- celles qui peuvent n'être suivies par aucune autre : les séquences terminales

Les raisons d'ordonner les séquences sont des dépendances de divers types. Mais habituellement elles sont réduites à des dépendances didactiques

Le professeur doit pouvoir convoquer des savoirs « de référence » sans avoir besoin de leur réserver un acte didactique. Les moyens de « construction » de la connaissance nouvelle (définition, démonstration, utilisation), doivent être praticables, familiers ou au moins connus (les « éléments » qu'il compte utiliser pour définir, calculer ou démontrer doivent être « sus ».

L'apprentissage de ces éléments est considéré comme un processus décomposable en deux : la compréhension, qui suit exactement la construction intellectuelle des connaissances, et le savoir qui ne dépend que de processus psychologiques généraux indépendants de ces connaissances (la mémorisation), et déterminés par des conditions telles que la fréquentation, la répétition etc.

Ces conceptions permettent une répartition des charges de l'ingénierie didactique entre diverses institutions.

L'organisation « logique » des connaissances est calquée sur un discours déterminé par les règles de la discipline et fournit un ordre général

La transposition didactique de ces connaissances s'effectue dans le milieu éducatif noosphérien par la tradition, et par l'usage d'une « didactique élémentaire formée de diverses croyances naïves

Aujourd'hui elle se traduit par la détermination « d'objectifs » et d'épreuves d'acquisition scolaire.

L'organisation des séquences d'enseignement est à la charge des enseignants mais principalement des auteurs de manuels

La conception des leçons et leur conduite sont à la charge des enseignants

LES NIVEAUX DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

En fait l'étude et la réalisation d'un curriculum se décomposent en plusieurs niveaux qui correspondent à des objets, à des composantes et à des étapes distincts du processus de conception et de réalisation curriculum :

2 .1. Niveau mathématico-épistémologico-didactique.

Les préoccupations principales concernent à ce niveau

a. la détermination des « savoirs » et leur organisation dans la topogenèse qui résultera du processus : les définitions principales et les propriétés essentielles des notions mathématiques
b. la détermination des connaissances qui accompagneront nécessairement ces savoirs
c. leur articulation générale dans une « origogenèse » qui précisera les rapports entre les conceptions initiales des élèves et leur évolution vers les conceptions finales. A ce niveau les obstacles épistémologiques seront examinés ainsi que les stratégies d'évitement ou d'utilisation
d. la détermination à grands traits des caractéristiques mathématiques qu'auront à supporter les situations fondamentales, les situations qui supporteront la définition des objets principaux

Ce premier niveau est celui du soubassement du curriculum

Dès cette étape, l'examen de toutes les possibilités est important pour ne pas laisser échapper des possibilités « écrasées » indûment par les hasards de l'histoire ou les négligence de la culture ou de la tradition (formulation irrégulières et même aberrantes de certains nombres, procédés de calculs maladroits, abus inutiles consentis …). La tradition adapte parfois mais souvent elle râpe et déforme les concepts.

2.2. Niveau des situations fondamentales, a-didactiques

C'est la partie sans doute la mieux connue sans doute parce qu'elle est apparemment la plus originale et la plus séduisante pour les idéologies pédagogiques d'une certaine époque.

2.3. Les études didactiques du schéma du processus.

Elles ont pour objet de préciser les choix du niveau précédent en prévoyant les connaissances et les savoirs intermédiaires et de vérifier :

a. leur compatibilité et leur cohérence interne : il s'agit de faire en sorte que toutes les connaissances nécessaires soient présentes (a priori) du fait du processus, sous la forme voulue, au moment où leur intervention dans le processus est requise, en esquissant à leur propos des conditions pour leur acquisition, qui soient plausibles. Cette étude se fait avec l'analyse des matrices de dépendance.
b. Leur adéquation externe : il s'agit de vérifier que les objectifs du curriculum auront bien été traduits par des activités vraisemblablement réalisables et raisonnablement efficaces. (Il faut noter que les objectifs sont examinés après la conception du schéma de processus, et non avant)
c. Leur ergonomie d'ensemble : à cette étape de l'étude, mises à part les situations fondamentales qui peuvent être étudiées indépendamment, les leçons intermédiaires ne sont pas déterminées : elles peuvent prendre toutes sortes de formes. Personnellement je les suppose d'abord construites de façon très basique et assez fermée (du côté des élèves et du côté du professeur). Schéma d'une telle séance : court exposé (définition) de la connaissance à apprendre, questions, illustration, explications et justification, exemples d'utilisation, exercices, problème, résumé. Or la liste de ces leçons est toujours beaucoup trop longue puisqu'elle suppose que chaque notion élémentaire intermédiaire présente dans le curriculum soit disponible sous forme d'un savoir scolaire appris et convocable au niveau individuel.

Cette remarque est à l'origine du principe fondamental de l'ingénierie didactique que nous exposerons plus loin

2. 4. Les connaissances et les situations intermédiaires, la familiarisation et l'institutionnalisation

Elle a pour but d'améliorer le « rendement » du processus conçu suivant les principes des études didactiques de l'étape précédente. Il s'agit de remplacer des leçons ou des suites de leçons basiques par des leçons plus attrayantes, plus efficaces, moins nombreuses ou plus ouvertes à une activité plus riche, individuelle et collective des élèves.

Toutes les connaissances « nécessaires » n'ont pas besoin de parvenir au stade d'un savoir scolaire « achevé ». Certaines peuvent rester implicites, jusqu'à ce qu'il soit utile de les identifier, de les appréhender avec un vocabulaire adéquat et de leur assigner une place dans la culture des élèves. Il est même parfois indispensable de ne pas « fixer » des connaissances intermédiaires, nécessaires et à peu près adaptées à une étape de la genèse des connaissances visées, mais qui doivent changer de forme, de statut ou simplement disparaître pour faire place à une autre. Les études de ce niveau déterminent des équilibres subtils entre la « dé-didactification » des situations basiques et l'organisation de l'institutionnalisation et des apprentissages. Elles sont très complexes. Les connaissances intermédiaires doivent être suffisamment présentes pour permettre la construction de celles que l'on considèrera comme plus « définitives » mais pas suffisamment pour leur faire obstacle. L'ingénierie des situations intermédiaires et de leur articulation paraît similaire à celle des niveaux 2 et 3. Elle est en fait très différente. Tel « principe » qui s'impose à un niveau ne doit pas être retenu de façon systématique au niveau inférieur.

Concrètement, après les approches préliminaires le travail envisagé à un certain niveau va remettre en cause des choix effectués aux autres niveaux provoquant d'incessants va sans et viens. Conserver la cohérence d'un ensemble aussi complexe de décisions exige des instruments d'analyse spécifiques (descripteurs de forme, paramètres divers, matrices fines de dépendance, grilles d'intentions (fondées sur les objectifs), grilles de résultats (fondées sur les possibilités ouvertes par une situation intermédiaire) etc.

La théorie des situations joue un rôle important à ce stade en permettant d'établir des relations précises entre les situations envisagées, les connaissances de base nécessaires pour les aborder, et les effets de ces situations sur les connaissances des élèves, c'est-à-dire pour suivre les composantes de l'écheveau des connaissances en devenir dans la genèse et l'apprentissage d'un savoir mathématique.

2.5. La conduite des situations envisagées

Le résultat des études précédentes est sans valeur s'il n'est pas considéré comme utilisable par l'agent, l'enseignant qui devra l'utiliser. Quels que soient la compétence et le soin des concepteurs du processus, il reste une adaptation indispensable à faire à l'enseignant et à sa classe. Cette phase conduit souvent à modifier plus ou moins profondément et parfois à abandonner les situations envisagées. C'est alors que les travaux du niveau 4 révèlent leur utilité en permettant de remobiliser des alternatives connues. La souplesse et la robustesse des processus apparaissent alors comme des propriétés essentielles du projet.

L'étude de la conduite des situations envisagées s'est faite à l'école Michelet suivant des techniques spécifiques et de pratiques très longuement étudiées et mises au point.

2.6. Les études locales mathématiques, psychologiques et pédagogiques.

Lors de la conception et de la réalisation du curriculum, les arguments d'origine pédagogique ou psychologique disponibles sont bien évidemment utilisés en fonction de la situation dans laquelle les élèves seront supposés se trouver. Il est clair que ces conditions doivent d'abord être connues pour que l'on puisse les comparer à celles dans lesquelles les observations de psychologie ont été faites. Au fur et à mesure que le processus se précise les observations de cette nature se raréfient mais prennent de la force. Si le résultat de l'étude apparaît comme incompatible avec ce que nous savons de la psychologie cognitive ou affective des élèves l'étude doit être modifiée.

3. LES METHODES ET LES BASES DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE

3.1. La méthodologie, la 'méthodonomie'

La complexité et le nombre des paramètres qui caractérisent les situations didactiques rendent illusoire l'ambition de déterminer par quelques principes et quelques techniques, même solidement établis, un dispositif d'enseignement optimal. L'utilisation d'une technique éprouvée dans certaines conditions, doit toujours être suspectée d'être abusive dans des conditions différentes. Autrement dit dans les meilleurs des cas le résultat des recherches d'ingénierie n'est qu'un modèle, et doit être utilisé comme tel, avec les précautions et les réserves d'usage. Ici l'ingénierie didactique, malgré une terminologie moderne et rassurante tend à rejoindre l'ancienne « *méthodologie*» ou pédagogie spéciale.

Mais celle-ci au fil du temps avait fini par se borner à une *méthodonomie,* accompagnée d'arguments comparatifs généraux et souvent hasardeux.

3.2. L'ingénierie didactique rompt avec la méthodologie classique :

L'ingénierie didactique continue le projet de la méthodologie mais rompt avec elle sur un certain nombre de points essentiels.

La *première rupture* consiste à se donner le droit d'interroger la discipline de l'intérieur, sans accepter a priori comme des nécessités mathématiques des conceptions ou des pratiques improvisées par des mathématiciens. Alors que l'ancienne conception de la didactique laissait à chaque discipline le soin de déterminer le savoir à enseigner par des méthodes a priori hors de la didactique. La partie principale de la nouvelle didactique opère sur les mathématiques à l'aide d'instruments mathématiques, épistémologiques et didactiques dont elle doit rendre compte. La prise en charge totale du projet de transposition contrôlée est la première rupture.

La *deuxième rupture* procède de la même attitude vis-à-vis des autres domaines. Elle consiste à prétendre soumettre à un réexamen tous les apports des diverses disciplines dès lors que ces apports concernent des comportements et des pratiques relatifs à des connaissances mathématiques, à leur compréhension, leur usage ou à leur acquisition…. La dépendance entre les manifestations de connaissances et les conditions de ces manifestations, est soumise à une nouvelle analyse où la nature spécifique de chaque connaissance peut intervenir. Autrement dit, il n'est plus admis que les dispositifs grâce auxquels des résultats de psychologie, de sociologie ou de pédagogie ont été obtenus, soient supposés transparents du point de vue mathématique.

La *troisième rupture* vient d'une audace méthodologique : l'usage familier de modèles et l'application à ces modèles de méthodes de simulation et d'analyse statistique en usage dans d'autres branches des mathématiques appliquées. Une stratégie de remise en cause de ces modèles permet de franchir un mur dressé contre l'usage des méthodes « dures » dans le domaine des sciences humaines. Evidemment cette hardiesse a dû être accompagnée d'une éthique, d'une rigueur, d'une prudence et d'un engagement scientifique beaucoup plus important qu'avec la méthodologie et la didactique classiques.

La *quatrième rupture* a résulté de l'ampleur des efforts déployés et des moyens consentis pour avancer dans cette voie. Ces efforts ont portés leurs fruits grâce à la cohérence des théories et surtout grâce à la cohésion de la communauté des didacticiens mathématiciens face à l'indistinct fourmillement des approches classiques très parcellaires ou très générales et souvent trop idéologiques.

3.3. Critiques des méthodes dérivées de la conception classique

Elle repose principalement sur le principe très ancien qui consiste à concevoir un projet, à le mettre en œuvre, à examiner son fonctionnement et à l'améliorer en remplaçant les options douteuses par des options meilleures.

Une interprétation classique et quasi universelle de cette idée conduit à utiliser les taux de réussite des élèves comme base des comparaisons et comme indice de la valeur des projets. Cela paraît évident. Mais il faut aussi choisir des descripteurs du système et établir que ces descripteurs sont liés aux résultats observés. Chaque discipline y va de ses paramètres qui concernent généralement les acteurs du système. Ce type de travaux montre par exemple que le taux de filles dans les classes, ou l'origine socioculturelle des élèves sont des facteurs liés aux résultats scolaires[2].

Il faudrait ensuite établir un lien rationnel entre les résultats observés et les décisions didactiques précises qu'il conviendrait de modifier : (l'école, quoi qu'en prétendent certains ne peut pas changer le sexe des élèves ni égaliser le statut socioculturel des parents d'élèves).

C'est la partie faible de cette approche. En l'absence d'une explication tout à fait précise et montrée, non pas seulement de façon stochastique mais aussi rationnelle, de l'effet d'une décision sur la variable cible, toutes les suggestions sont de nature idéologique[3] et au mieux impuissantes.

3.4. Une nouvelle méthode générale de recherche en ingénierie didactique

L'alternative proposée par l'ingénierie didactique que je présente ici est fondes sur deux critiques

1. Malgré toutes les précautions, les résultats des élèves ne sont pas une variable libre que les variables explicatives influenceraient suivant un loi déterminée. Il s'agit d'un variable régulée, un homéostat. Différentes conditions conduisent le système à essayer de les maintenir constantes de sorte que les relations entre ces résultats et une variable peuvent n'exprimer que le résidu aléatoire de cette régulation.
2. Les variables qui opèrent ne le font pas de façon indépendante mais par l'intermédiaire de systèmes complexes.

---

[2] Cette chasse aux facteurs défavorables soutenue par des inventaires de plus en plus fouillés de toutes les formes d'erreurs et d'écarts observés à l'école par rapport à toutes les normes dont il plaît à une minorité quelconque de se plaindre a alimenté depuis trente ans toute une ménagerie de détracteurs de l'école.

[3] Au lieu d'enrichir nos connaissances et d'aider à améliorer progressivement le fonctionnement de l'enseignement, les analyses sommaires issues de ces procédés favorisent tous les excès. Elles inspirent des rafales de réformes contradictoires qui désorientent les professeurs et mettent progressivement le système scolaire à la merci des pires entreprises. Les violences et les alliances nécessaires pour déclancher un changement de « méthodes » (ce que les promoteurs considèrent comme leur succès) conduisent automatiquement à la dégradation de l'enseignement.

Le procédé proposé consiste à comparer les séquences d'enseignement **à résultat égal** par l'observation du temps nécessaire et des efforts qui doivent être déployés par le professeur et par les élèves pour **obtenir les mêmes résultats.**
Alors que la modélisation d'un moment d'enseignement par une situation répond à la nécessité de pouvoir établir un lien entre une variable et une décision le recours à la méthode de comparaison modifie fondamentalement non seulement l'organisation des expériences mais aussi la nature des phénomène envisagés, le choix des variables et celui des objets étudiés. La principale rupture est probablement celle qui est instaurée par ces méthodes de recherche.
Il ne faudrait pas en conclure que les méthodes qui viennent d'être critiquées doivent être abandonnées. Observer les pratiques des enseignants, les caractériser, les classer, les comparer qualitativement puis comparer certains des paramètres de ces classes ou des comportements particuliers des élèves (y compris les résultats scolaires) reste très utile. Il faut seulement connaître les limites de ces méthodes, soumettre leurs résultats à d'autres analyses et éviter de les renvoyer vers les enseignants en laissant entendre qu'ils devraient pouvoir en tirer parti, sans qu'on sache comment.

3.5. Méthodes constructives et inductives d'analyse

Dans ce cycle d'études nous essaierons de relever et de commencer à classer quelques unes des techniques et des « principes » de l'ingénierie didactique.

Evidemment nous essaierons de présenter les méthodes les plus fondamentales : les analyses a priori, notamment les *méthodes constructives* (construction de situations correspondant à une connaissance donnée) et les analyses a posteriori, notamment les *méthodes inductives*, qui s'inspirent entre autres de la sémiologie du cinéma.

3.6. Le dispositif du COREM

Mais la partie de l'ingénierie didactique la plus originale, la plus remarquable et la plus essentielle pour l'émergence de la didactique elle-même a été la conception, l'organisation et la conduite du COREM. Le centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques a été conçu pour la production et l'étude de l'ingénierie, indispensable aux recherches théoriques et expérimentales en didactique des mathématiques.

Nous serons conduits à évoquer certains aspects des dispositifs administratifs, scolaires, pédagogiques,… et matériels qui ont permis de réaliser et de répliquer les expériences que nous rapporterons. Ce centre a été conçu avec les mêmes principes et les mêmes techniques que ceux qui étaient dans l'analyse des situations didactiques : il fallait faire en sorte que le dispositif *doive* conduire les chercheurs à produire et à perfectionner les connaissances que nous recherchions, comme les situations conduisaient les enfants à produire et à perfectionner des connaissances mathématiques.

ATELIER I

LES DOCUMENTS QUI ONT ETE UTLISES DANS LA CONDUITE DE L'ATELIER I SONT DE DEUX TYPES, REUNIS ICI DANS

DEUX ELEMENTS INTRODUCTIFS CONCERNANT RESPECTIVEMENT LES METHODES D'ANALYSE ET LA DETERMINATION DES CONNAISSANCES

DEUX PARTIES DANS LESQUELLES SONT PRESENTES PLUS SPECIFIQUEMENT CE QUI A TRAIT AU PROJET GLOBAL CONCERNANT LA RECHERCHE SUR RATIONNELS ET DECIMAUX

ANNEXE 2 DU CHAPITRE 1

METHODES D'ANALYSE

1. METHODES D'ANALYSE D'UNE LEÇON

L'étude ne dépend pas de la présentation de la leçon : fiche didactique, transcription ou document vidéo, du moins dans un premier temps. Nous considérons deux méthodes que nous utilisons concurremment

La « méthode constructive » et la « méthode inductive »

a) La méthode constructive

La méthode constructive consiste à :

1. Estimer « directement » les intentions didactiques du professeur.

La lecture de la fiche de la leçon permet à l'observateur d'identifier la présence ou l'absence de connaissances, de termes etc. utilisés et/ou enseignés. Par exemple le terme « couple est-il utilisé ? par le professeur ? par les élèves ? avec quelle signification ?...

Il s'agit, dans un premier temps, de représenter sous une forme didactique minimale, le « savoir visé ». C'est-à-dire de traduire « ce que le professeur voudrait que l'élève sache » à la fin de la leçon, sous la forme d'une déclaration objective de tout ce qu'il y a savoir, sans se préoccuper de l'activité effective de l'élève.

Ainsi l'observateur écrit ce qu'il croit à priori être l'objet de la leçon sous forme d'une « exposé classique », qui correspond au contrat minimal dit « de diffusion » (cf. Montréal).

Exemple. « L'épaisseur d'une feuille de papier quelconque peut être *déterminée* par le nombre de feuilles identiques empilées et par l'épaisseur de la pile, mesurée en mm. La technique de mesurage consiste en l'utilisation d'un pied à coulisse.

Remarque : « déterminer » veut aussi bien dire :

- faire correspondre un couple de nombres à une feuille donnée,
- que faire correspondre une feuille à un couple de nombre donné

Il n'y a pas de technique simple pour la réalisation d'une feuille d'épaisseur donnée.

2. Ensuite à tenter d'identifier la répartition des responsabilités entre le professeur et les élèves. Un plan d'étude systématique de cette répartition consiste à suivre l'ordre de l'exposé des contrats de Montréal et à examiner ainsi successivement et progressivement les responsabilités que le professeur a pu prendre (ou non) et les dévolutions qu'il a pu tenter.

Cette méthode suit l'ordre théorique de l'ingénierie de la leçon. L'observateur tente de repérer les étapes qu'aurait pu suivre un concepteur systématique. Il peut ainsi examiner leurs possibilités retenues ou écartées et deviner leur motivation

Exemple d'une identification constructive.

Etapes « ». Le professeur fait « réciter » le texte du savoir

Etapes « ». Le professeur prend en charge l'enseignement par l'exemple et par des exercices de reproduction de l'exemple,

- du mesurage de l'épaisseur de divers papiers dont il propose une pile. Il démontre l'usage du pied à coulisse. Il s'assure que chaque élève peut effectuer au moins une mesure effectivement.
- De la reconnaissance d'une feuille d'épaisseur donnée

Il s'assure que tous l'ont fait. Se convainc qu'ils peuvent le refaire.

Il demande de « réciter » le texte du savoir.

Il fait décrire la méthode de mesurage oralement, celle de la reconnaissance d'une feuille correspondant à une épaisseur donnée

Etape « ». le professeur ne veut pas proposer lui-même une « définition » de l'épaisseur. Il veut que les élèves « produisent proposent et éprouvent eux-mêmes une « représentation » de l'épaisseur des feuilles.

Il doit donc « fonctionnaliser » cette définition. Elle doit être la réponse optimale à une situation a-didactique etc.

3. Chaque étape est l'occasion d'une interrogation de la fiche didactique pour savoir ce qui relève effectivement ou non de cette étape dans la fiche.

A la fin du processus on a obtenu un découpage de la fiche en « situations didactiques » de différents modèles

4. Cette analyse constructive permet à l'observateur d'explorer en même temps les différentes formes d'une connaissance qui peuvent être visées ou acceptées, et les autres. Et de confronter cette liste avec les choix retenus implicitement dans la fiche (voir la grille des formes de connaissances)

Exemple : la description des méthodes de mesurage circule mais n'est pas exigée au niveau individuel. Elle restera au niveau de connaissance attachée aux circonstances de la leçon jusqu'à la leçon 11-12.

b) La méthode inductive

La méthode inductive consiste à

1. Décrire les différents moments d'activité plus ou moins autonomes des élèves, à les modéliser par des types standard de situations, et à en inférer les différentes sortes de connaissances implicites et explicites nécessaires aux élèves et les apprentissages possibles et vraisemblables.

Voir la grille d'analyse des situations a-didactiques.

2. à reconnaître les informations apportées par le professeur, et à en inférer les connaissances supposées connues, explicitement ou implicitement, ou reconnues, les connaissances institutionnalisées etc.
3. à reconnaître les questions soulevées par la réalisation des situations
4. à identifier les corrections, les régulations exercées par le professeur ou par les élèves

Pour la facilité de l'exposition et surtout des exemples, nous avons distingué les leçons d'introduction et les leçons ordinaires d'étude, qui suivent et préparent les premières. Les leçons d'introduction sont celles qui ont été le plus remarquées mais les plus importantes pour l'analyse comme pour la conduite des apprentissages sont les secondes. En fait la même méthode d'analyse s'applique aux deux types de leçons.

2. METHODES D'ANALYSE D'UN PROCESSUS

Les deux méthodes : inductives et constructives font ressortir des questions sur les dépendances entre les conditions des apprentissages et sur les successions de connaissances qui ne peuvent trouver de réponse que dans une étude du processus entier.

Mais l'élaboration d'un processus dépend de la possibilité effective de réalisation des leçons qui le composeront. Il est difficile de rendre ces deux analyses totalement indépendantes.

L'analyse constructive d'un processus suit les mêmes méthodes que celle des leçons. Elle consiste d'abord à repérer les différents objets d'enseignement et à expliquer leur ordonnancement par des « conditions de succession d'apprentissages » des en envisageant ses variantes.

Les successions d'apprentissages s'appuyant sur une classification des formes d'usage des connaissances et des savoirs et sur des principes portant sur les conditions des successions des notions enseignées (par exemple « ne pas définir une notion nouvelle avec des termes inconnus »)

Dans le cas présent, la théorie de situations permet d'affiner les conditions classiques. Pour cela elle utilise la classification des différentes formes de connaissances :
Par exemple « Il est possible de « définir » une notion en identifiant par un terme un modèle implicite d'action préalablement « connu » et contrôlé par l'élève (une forme d'ostension). Les deux moments didactiques peuvent être simultanés. Ils ne peuvent successifs si le modèle implicite est construit trop longtemps après sa définition.
Les analyses inductives et constructives d'un processus conduisent ainsi à ordonnancer les leçons en utilisant les règles de dépendance et à dresser les matrices explicatives correspondances.

Ainsi nécessairement, l'analyse d'un processus s'appuie alternativement sur des études de leçons et du processus par des analyses constructives et inductives. L'organisation de ces analyses est systématique mais « dialectique ». Elle me parait irréductible à un algorithme « universel ».

[1] Le langage des praxéologies peut s'adapter à cette dynamique : k représente la praxis (tâche et technique), s le logos (technologie et théorie)

[1] Nous avons repris la distinction latine entre une *connaissance* (gr : co-noos-scere) – « connaissance qui naît avec » (l'action - et un *savoir* (lat : sapere) – saveur (d'une connaissance)-. Une *connaissance* est un moyen de résoudre des problèmes éventuellement organisée de façon très complexe avec des références à des savoirs communs mais qui comporte des partie importantes non référencées, peut être indicibles voire inconscientes. Le *savoir* est la connaissance d'une « connaissance » d premier type dans une communauté où elle est répertoriée et standardisée afin d'y servir de référence. Un même objet peut êtr une connaissance dans une situation (ou pour un sujet) et un savoir dans une autre (ou pour un autre). Certaines connaissances n peuvent pas être des savoirs (praxis et logos) en ce sens qu'elles comportent une utilisation opportune de conditions aléatoires no prévues (metis) et elles ne sont donc pas « reproductibles » au sens ordinaire.

[1] La question des agrégats de ces connaissances en praxéologies est ouverte. Certes il est important de tenir compte de la faç dont plusieurs formes des connaissances envisagées, sous des formes variées, concourent ensemble à la maîtrise d'une question. praxéologies décrivent bien des connaissances propres à un fonctionnement. Les connaissances fonctionnent ensemble et praxéologies sont des moyens très utiles d'approcher ces modes de fonctionnement. Quelles possibilités d'évolution les praxéolog offrent-elles et dans quelle mesure limitent elles les possibilités d'évolution de leurs composantes ? Mais il s'agit maintenant décrire des transformations de systèmes de connaissances. L'apprentissage laisse-t-il inchangé les praxéologies ? ou réorganise- de façon nouvelle une partie des connaissances qui les composent ? D'autre part toute situation didactique peut-elle être envisag par le professeur et par les élèves comme une tâche dans une praxéologie ? (Quelle place tient la metis ?)

Première partie :

Buts, enjeux et résultats des recherches sur les rationnels et les décimaux

1. LES BUTS INITIAUX DE LA RECHERCHE

Les buts initiaux de l'expérience sur les décimaux et les rationnels étaient multiples :

Ils concernaient aussi bien *l'ingénierie didactique*
dans ses aspects
- théoriques (comment réaliser un enseignement ayant des caractéristiques données ? comment définir ces caractéristiques?)
- et pratiques (comment les satisfaire)

que les recherches scientifiques théoriques (quels concepts utiliser pour décrire les situations des élèves et des professeurs, et leurs modifications et prévoir leurs effets) comment décrire les usages des connaissances et les connaissances elles-mêmes en situation didactique
Quelles seraient les conditions à satisfaire pour enseigner les mathématiques les plus puissantes, (les plus utiles immédiatement et à terme), le mieux et le plus vite possible.
Ils n'étaient d'ailleurs qu'une partie d'un projet plus vaste : celui de la recherche des conditions limites d'une expérience en pédagogie des mathématiques.

Il s'agissait de savoir si on pouvait provoquer l'apprentissage de connaissances mathématiques
- en respectant au mieux, in fine, leur définition mathématique *par leur structure*, et leur fonction mathématique
- en utilisant leur nécessité dans des activités proprement mathématiques
- et en rendant minimales les motivations exogènes (c'est-à-dire non mathématiques) par l'usage de situations a-didactiques

2. LES ENJEUX :

QUELQUES UNES DES HYPOTHESES OU DES QUESTIONS A L'ETUDE:

Primauté des conditions sur les dispositions des sujets et sur les propriétés didactiques usuelles des savoirs : les enfants peuvent apprendre des choses apparemment très complexes sous réserve de certaines conditions. Lesquelles ? Les décisions prises uniquement en fonction de raisonnements psychologiques, mathématiques ou didactiques au sens classique ne sont pas justifiées et sont souvent non pertinentes. L'expérience sera un ensemble de contre exemples.

Les connaissances jouent un rôle important dans l'usage et l'apprentissage des savoirs. Ni la conversion des savoirs en connaissances ni celle des connaissances en savoirs ne sont automatiques. Quelles conditions pour les unes et pour les autres ?

La connaissance des *structures* mathématiques (la connaissance des objets mathématiques par leur structure) est une nécessité logique et ergonomique à leur apprentissage. Elle peut être acquise sous réserve de motivations et de « démarches spécifiques et mathématiques. Seule une didactique naïve et inappropriée peut laisser croire qu'un tel enseignement est « impossible ».

Conséquence : *pour les étudier* : séparer les connaissances suivant les structures : Ex. groupe (ou semi groupe), groupe linéaire, identification, plutôt que l'inverse. Cela ne préjuge pas de la décision pour un développement didactique effectif.

3. LES TYPES DE RESULTATS

Résultats expérimentaux :
- rôle des connaissances et des conditions socialisées
- *Obstacles* : étude de l'obstacle « commensuration »
- *Institutionnalisation*
- Les limites du constructivisme radical
- Le fonctionnement des divers types d'évaluations etc.

Apports à l'ingénierie didactique
- Spécifique (leçons)
- Techniques (formes de situations)

Résultats empiriques
- observation de nombreux faits particuliers
- redéfinition de nombreux concepts,
- possibilité d'envisager les apprentissages scolaires de façons différentes

Retombées théoriques

Retombées méthodologiques

Questions particulières relatives aux processus d'apprentissage :

	a-didactiques	et didactiques
rationnels		
décimaux,		
généraux		

Aux situations
Aux dépendances entre situations
Etc.

La gestion des apprentissages sur un long terme
La justification des apprentissages par des questions intellectuelles
Les erreurs habituelles à propos des motivations etc.
Critique des « principes généraux » de la didactique dite « générale »

Reprendre les résultats de la thèse

4. LES RESULTATS

1. Le résultat le plus important peut-être est celui-ci :
« Les » élèves de dix ans peuvent « apprendre » sur les rationnels et les décimaux des « connaissances mathématiques » beaucoup plus complexes et précises (raffinées) qu'on ne le croyait :

L'échantillon des élèves soumis à l'expérience est significatif (choix au hasard, nombre supérieur à 750…)

L'apprentissage s'est déroulé dans des situations scolaires ordinaires et reproductibles.
Conséquence : Imputer exclusivement les difficultés de l'enseignement soit aux élèves (par des explications psychologiques) soit aux professeurs (par des explications de didactique générale) soit aux connaissances elles-mêmes semble donc très excessif. En fait l'insuffisance des connaissances de didactique (théoriques et pratiques) tant des professeurs que de la société, paraît au moins aussi largement aussi engagée. D'ailleurs le seul moyen de l'action des professeurs sur les élèves passe par la création et la conduite de situations. Le savoir n'est pas une image de son fonctionnement (de même qu'un concept n'est pas contenu dans sa définition).

2. Autre résultat cherché : L'ordre des enseignements est compatible avec celui déterminé par une définition mathématique « moderne » des objets (par les structures). Sous la condition que celle-ci soit reconstruite à partir de la structure mathématique actuelle des connaissances et de leurs relations
En fait il s'agit de prendre l'organisation mathématique « optimale » d'une notion comme l'objet final construit au cours de l'apprentissage et non pas comme une sorte de programme ou de guide pour l'apprentissage lui-même.

Seconde Partie : Conception et structure d'un curriculum, études mathématiques, didactiques et épistémologiques

1. OBJET DE L'ETUDE

Il s'agit
- de résoudre l'objet d'enseignement « rationnels et décimaux » en une suite de projets didactiques (A.D),
- et indépendamment, de décrire la suite des leçons d'un réalisation effective d'un processus d'enseignement (A.A.).

Dans les deux cas, l'objet de l'analyse est

- de mettre en évidence l’articulation des réalisations ou des projets de « leçons » successifs
- et d’interroger cette articulation pour comprendre comment chaque étape prépare et permet les suivantes, leurs réussites et leurs échecs.

L’articulation concerne particulièrement

- l’évolution des δ-connaissances et des savoirs des élèves, non pas seulement ceux qui constituent les objectifs d’enseignement mais tous ceux qui interviennent dans le déroulement du processus
- les conditions de l’apparition ou de l’évolution de ces connaissances, c'est-à-dire l’évolution des situations qui servent de support aux connaissances des élèves mais aussi celles qui jouent un rôle dans la stratégie du professeur.

Il conviendra donc pour analyser un processus de concevoir les interdépendances entre les formes différentes d’un même savoir ( ) , ou de savoirs différents, ou entre des différentes sortes de situations ( ), et d’en noter les occurrences au cours de l’observation ou d’en justifier l’usage dans la conception d’un processus. Cette justification est exactement l’objet des recherches scientifiques et techniques en didactiques. Le résultat des analyses est donc un ensemble de matrices de dépendance ou de succession entre les situations, les connaissances ou les comportements, établies soit a priori soit a posteriori qui peuvent être confrontées les unes comme modèle les autres comme contingence.

Il conviendra donc au cours de nos travaux de noter les raisons invoquées au cours de la création d’un processus ou au cours de l’analyse de sa réalisation pour les soumettre à une étude indépendante.

L’analyse commence par celle de l’objet mathématique de l’enseignement projeté. Elle a pour but de l’identifier, de le définir puis de trouver et choisir les conditions de sa « définition.

Il n’est pas possible de retracer ici l’histoire des fractions et celle des décimaux mais nous nous réservons de puiser dans cette histoire trois fois millénaire les éléments et les leçons qui nous seront nécessaires. Il en est de même pour les diverses pratiques d’enseignement relatives aux fractions différentes époques

Pour connaître cette histoire et ces pratiques il est nécessaire de se doter d’abord de l’instrument d’analyse mathématique le plus fin, le plus discriminant dont nous disposons, c'est-à-dire le plus récent. Ainsi nous – les observateurs - pourrons distinguer les fractions des rationnels, les rationnels décimaux parmi les rationnels, les rationnels scalaires et les rationnels mesure, les rationnels et leur groupe linéaire... par des définitions catégoriques, c'est-à-dire qui identifient l’objet lui-même, exactement, sans recours à des figures de rhétorique.

Nous n’allons d’abord donner le résultat de l’étude puis esquisser les raisonnements qui m’ont conduit à concevoir l’introduction des décimaux que nous étudions. Nous essaierons ensuite d’en abstraire les principes et les méthodes.

2. STRUCTURE DU PROCESSUS R & D

Vocabulaire de l’Analyse constructive :

Parties

Module : projet

Activités (ordre fixé mais durée variable), Suite d’activités

Processus

parties	Modules	activités	séances	objets	milieu
	1	3	1-3	Définition des rationnels	Epaisseur

Mesures	2	6	4-10	Opérations +, -, ., ./ .ds Q	
	3	3	11-15	Mesure de grandeurs	Poids, capacités longueurs
	4	4	16-19	Ordre des rationnels	Encadrements
	5	5	20-25	Décimaux construction	Approximation
	6	5	26- 31	Opérations +, -, ., ./. , ds D	
	7	6	32-36	Représentations décimales de rationnels	« Division »
Fonctions	8	5	37- 41	Similitude	Puzzle
	9	6	42-44	Applications linéaires ds Q. Désignation : fractions	Optimist
	10	4	45- 47	Multiplication par un rationnel (externe)	
Situations	11	3	…	Situations linéaires	
	12	2	…	Les divisions « classiques » ds Q	
	13	3	…	Nouvelles divisions ds Q	
Algèbre et arithmétique rationnelles	14	5	58-62	Composition des applications linéaires	Pantographe
	15	4	62-65	Décomposition, identification des structures, rapports	
Définitions et propriétés de Q et de D	Partie à traiter ultérieurement				

Vocabulaire de l'analyse inductive
Séquences
Séances
Phases

Note Le terme « leçon » est ambigu. Il désigne tantôt

- Un objet d'enseignement, un sujet d'étude
- Un enseignement,
- Une période réservée à un enseignement

Ces sens correspondent à des pratiques didactiques où projets et séances doivent coïncider et être déterminés à l'avance.

La didactique par les situations oblige à séparer ces deux concepts

3. UNE ANALYSE CONSTRUCTIVE SOMMAIRE DE L'OBJET "RATIONNELS ET DECIMAUX"

Les principes de l'ingénierie du processus

Nous avons pensé devoir enseigner différents aspects des rationnels et des décimaux de façon spécifique.

A. Décomposer vs compléter et corriger

1. Les rationnels (donc les décimaux) « s'opposent » aux nombres naturels essentiellement

a. par leurs propriétés topologiques : les premiers réalisent un ordre dense qui promet de pouvoir attribuer une mesure à toute quantité d'une grandeur.
b. Par leurs propriétés algébriques : tout rationnel non nul possède dans Q (mais pas dans D) un inverse pour la multiplication : toute équation linéaire a = bx (b non nul) y a une solution unique.

On peut alors choisir
- Soit de prolonger les pratiques et les concepts des entiers en minimisant ou en cachant les différences, pour « bénéficier » au mieux des apprentissages antérieurs
- Soit au contraire de créer un objet nouveau approprié à la résolution d'un problème non résolu et effectuer ensuite les comparaisons, les plongements, les « raccordements » et les synthèses utiles. Ce dernier choix tend à consacrer une genèse propre à chaque connaissance ou à chaque objet et à chaque propriété.

J'ai choisi cette deuxième solution, non pas parce qu'elle est meilleure a priori pour l'enseignement (car il faudra bien limiter l'éparpillement des apprentissages) dans mais afin de mieux étudier les conditions propres à la meilleure compréhension de chacune des connaissances visée et d'étudier ensuite, indépendamment les moyens et les raisons de regrouper et d'articuler ces apprentissages. Le principe de notre recherche était de « mettre à plat » les problèmes d'enseignement des décimaux. Il nous conduit évidemment à ne pas se soumettre *a priori* aux usages traditionnels, mais à les retrouver éventuellement comme conclusion de nos recherches en les opposants aux autres possibilités.
Il s'agit là de deux « principes d'ingénierie » (ou plutôt de phénoménotechniques) opposés que nous pourrions appeler, le premier : « principe de regroupement d'apprentissages indépendants », le second : « principe de correction progressive d'apprentissages ». En fait tout processus didactique réel doit à la fin conjuguer et violer ces des deux principes : les conséquences de l'émiettement qui résultent de la décomposition des apprentissages en petits projets indépendants sont bien connues C'est la réponse classique aux exigences sociales d'évaluation : les évaluateurs décomposent la connaissance visée en une multitude de réponses à des situations diverses, chacune devient un objectif d'enseignement indépendant, le tou est finalement écrasant et fort peu efficaces.
Il est donc indispensable de ne décomposer les connaissances qu'en des parties qui ont une signification importante pour la compréhension et l'usage de ces connaissances et de les rassembler autour d'une genèse très « cohérente », tant du point de vue de l'organisation logique que de celui de la problématique et de l'usage. Le choix de la TSM de considérer les connaissances sous l'angle de leur rôle dans des situations conduit naturellement à différencier d'abord les objets par leur nature mathématique, par leur structure et par la généralité de leurs propriétés et à associer à ces point essentiels des problèmes « fondamentaux ».
E n conclusion nous étudierons séparément les structures (naturels, rationnels et décimaux) et leurs propriétés (algébriques et topologiques)

Ces premiers principes nous conduisent à ne pas nous restreindre aux aspects traditionnels des fractions, Nous devrons étudier aussi la topologie des rationnels et des décimaux (leur ordre interne et réciproque).

2. Les rationnels et les décimaux sont deux réponses différentes et presque indépendantes à un même problème : faire apparaître des nombres pour mesurer des quantités « continues », ce que les naturels ne font que d'une façon discrète et grossière. Les décimaux sont une catégorie de rationnels, ils peuvent *représenter* les fractions

voisines dans les calculs, et ainsi remplacer les pénibles opérations sur les fractions par des calculs simples « comme » avec les naturels.

Ces remarques ouvrent une alternative

B. Commencer par la structure « la plus facile » et la plus puissante (les décimaux) ou suivre l'ordre historique et didactique classique ?

1. Il n'est pas nécessaire d'apprendre les fractions pour *apprendre* les décimaux, bien au contraire ces derniers sont compris en même temps que la numération décimale soutenue par le système décimal de mesure et permettent de résoudre tous les problèmes pratiques beaucoup plus facilement. C'est la solution qu'il convient de préconiser pour l'enseignement.
2. Mais pour *inventer et comprendre* les décimaux il est utile d'avoir à simplifier le calcul des fractions apprises précédemment. Les mathématiques sont comprises et utilisées comme un moyen de simplification et de contrôle. Compte tenu des buts de l'expérience il convient de suivre cette voie

En deuxième conclusion nous essaierons d'enseigner d'abord les rationnels pour faire découvrir ensuite l'intérêt des décimaux. Les étapes de l'étude établiront et feront évoluer les rapports entre ces trois structures : les naturels, les rationnels et les décimaux

C. Les rationnels se présentent usuellement sous la forme de fractions mais ils sont conçus dans des rôles distincts, comme des concepts mathématiquement différents.

1. Les *fractions mesures* : une unité étant déterminée, la mesure m/n d'une quantité donnée est obtenue par le partage de cette unité en n parts égales (autant qu'on veut) puis en reportant autant de parts m que nécessaire pour égaler la quantité donnée. Cette définition classique ne détermine en fait aucune solution pratique au problème de la mesure ou on ne sait pas trouver au hasard un sous multiple exact de l'unité et de la quantité à mesurer. Par contre la définition suivante est opératoire : le nombre de reports n de l'unité qui coïncident avec m reports de la quantité à mesurer détermine la mesure m/n de cette quantité avec cette unité. On peut omettre l'écriture de l'unité si elle ne change pas. Mais la conception de cette fraction reste celle d'une valeur d'une mesure, un nombre « concret ».
2. Les fractions *applications linéaires* : (c'est la structure duale de la précédente, c'est-à-dire les automorphismes multiplicatifs de l'ensemble des fractions mesures définies précédemment). L'image de la somme de deux fractions mesures est la somme des images de ces deux mesures. Alors l'application 7/8 kg/l est l'application linéaire qui fait correspondre la valeur 8 litres à la valeur 7 kg (elle peut exprimer le poids spécifique d'un liquide, ou bien une quantité de graines - mesurée en litres- à mélanger à une quantité d'autres graines (au poids) qui se dira « 7 pour 8 ». La valeur image de l'unité 1 l est 7/8 kg. On peut omettre les unités, la « dimension » mais à condition de ne pas l'oublier
3. Les *fractions rapports* : leur usage le plus fréquent est celui de *rapport scalaire*, un nombre sans dimension (un nombre abstrait), qui exprime « le nombre (rationnel) de fois », qu'un nombre m est contenu dans un autre : n. Ces nombres m et n peuvent être eux même un naturel ou une fraction, tous les deux abstraits ou concrets (mais alors mesurés avec la même unité). La fraction peut exprimer un rapport « externe » : le nombre 8 d'un certain ensemble correspond au nombre d'un autre 7. Dans ce cas elle exprime un couple unique, sous entendu d'une fonction linéaire, et elle doit conserver les dimensions, si elles sont différentes.

Les écritures et les calcul formels de ces trois sortes d'objets mathématiques s sont les mêmes, exactement si on se restreint aux expressions numérique. Mais il est clair qu'on ne conçoit pas la somme de deux applications linéaires, ni même la somme de deux rapports, aussi facilement que la somme de deux fractions mesures. Les sous entendus ne sont pas les mêmes. Il semble donc utile d'étudier les facilités ou les difficultés de définir dans chacune des conceptions, les fractions, leurs opérations et leur topologie puis d'homogénéiser explicitement ces trois point de vue. C'est une des options principales de l'expérience.

L'enseignement traditionnel introduit les trois conceptions conjointement, de façon à les affirmer sans cesse comme « naturellement équivalentes. Mais il n'utilise en fait dans chaque exemple que la conception qui se prête le mieux à une illustration de ce qui est présenté. Et cette conception change d'un exemple à l'autre sans que le lien soit fait. L'équivalence est affirmée, elle n'est ni montrée ni justifiée de sorte qu'elle soutient la compréhension métaphorique des solutions connues sans donner de moyen efficace de contrôler l'usage des fractions dans les situations incertaines.

L'enseignement traditionnel, axé sur l'apprentissage des algorithmes à coup de répétitions et d'analogies ne favorise pas le fonctionnement normal des connaissances mathématiques comme moyen d'invention et de contrôle des décisions.

En troisième conclusion nous essaierons d'enseigner distinctement et successivement les deux premières conceptions :

Par contre les rapports resteront longtemps des rapports naturels, ou un suite de deux « rapports » naturels conçus plutôt comme deux opération successives mais distinctes. L'identification formelle de ces suites d'opérations avec des rationnels se fera après l'étude des applications linéaires. Le maniement des rapports sera familier et fondamental mais implicite.

LES GRANDES ETAPES DU PROCESSUS

Ces considérations permettent de dessiner déjà la structure du projet d'enseignement :

Les fractions mesures seront étudiées d'abord (chapitres 1 à 7), ensuite les fractions applications linéaires (chapitres 8 à 11), enfin, après l'étude de la composition et de la décomposition des applications linéaires les rationnels viendra l'homogénéisation consciente et justifiée des trois conceptions (chapitres 12 à 15).

1. La première traite de nombres, rationnels puis décimaux, utilisés comme **mesures de grandeurs** (longueurs, poids, capacités) dans les fonctions distinctes de mesures et de repères). Les opérations internes qui y sont définies sont l'addition et la soustraction. Les nombres naturels opèrent sur ces nombres comme sur les entiers naturels ce qui donne un sens à la multiplication et à la division des rationnels par des nombres entiers. Les naturels fonctionnent donc comme des rapports entre certains rationnels.

2. La seconde partie traite des **applications linéaires** (rationnelles puis décimales) entre des ensembles de nombres rationnels ou décimaux qui représentent des mesures (de mêmes grandeurs ou de grandeurs différentes).

L'application ¾ est celle qui fait correspondre la mesure 3 à la mesure 4. Ce peut être par exemple 4 l ou 4 personnes et 3 dag ou 3kg. La correspondance peut être Dans le chapitre introductif les applications linéaires sont représentées par des similitudes géométriques et des homothéties numériques : par exemple à toute longueur de l'objet représenté l'application qui fait correspondre une longueur 3 à une longueur 4 est l'application ¾ .

Remarque. Dans des méthodes plus anciennes les rapports entiers étaient utilisés pour définir les fractions. Les quantités étaient représentées par une matière non mesurée, mais sur laquelle des opérations de somme, de différence, de multiplication et de partage étaient supposées conçues. La fraction était le moyen d'assigner une mesure à une partie de cette matière. Elle était fractionnée en parties égales et un certain nombre de cette « nouvelle unité » étaient additionnées pour réaliser la quantité voulue. Cette définition présente des avantages mais aussi des inconvénients : les élèves ont du mal à concevoir des fractions plus grandes que l'unité car il faut replacer la totalité initiale comme unité dans une nouvelle mesure.

Ici les élèves peuvent éventuellement effectuer successivement par exemple une division par un nombre naturel (3), puis une multiplication par un nombre naturel : (5). On pourrait croire que, puisque ces deux opérations équivalent à une multiplication par un rationnel (5/3), le produit de deux fraction est facile à introduire. Ce serait une erreur car en fait cette définition se raccorderait très mal avec les fractions mesure. De sorte que ce sens de la fraction « rapport » vont rester implicites dans les deux premières parties du cours.

Dans chacune de ces conceptions, il s'agira de passer de l'usage des rationnels à celui des décimaux, pour des raisons ergonomiques claires, la compréhension issue de l'étude précédente étayant et contrôlant la facilité des écritures décimales. La définition des objets sera suivie de l'étude de leurs propriétés, de leur ordre, et des opérations faciles à concevoir dans cette structure.

3. La troisième partie explicite **l'homogénéisation** de l'ensemble des rationnels (meures ou scalaires) et de son dual (rapportes et applications linéaires). Elle est en particulier nécessaire pour permettre aux élèves de compléter l'ensemble des significations de la division des rationnels et des décimaux.

Considérer que tous ces objets introduits et connus comme différents puissent être en fait un seul et même objet sera l'objet de la dernière partie du processus. Cette conception n'aura pas été proposée aux élèves comme une réalité intangible ni même comme une évidence mais comme le résultat d'une opération particulière, une interrogation spécifique.

4. La connaissance mathématique des rationnels et des décimaux ne peut être construite uniquement comme collection de pratiques, de techniques, et de connaissances théoriques comme celles que nous avons enseignées dans ce cours. Tous les éléments ont été introduits avec une signification correcte tant du point de nue de l'adéquation aux situations que de la conformité aux définitions mathématiques actuelles, mais les élèves ne savent pas ce qu'ils connaissent. Il est nécessaire de reprendre ces connaissances comme objet d'études indépendant. Une activité mathématique de reconnaissance et de disposition des objets mathématiques – une théorie - est nécessaire. Ce rôle était tenu au dix neuvième siècle par la « théorie des rapports et proportions » ou par la théorie des fractions »

Pour achever le cours il faudrait donc un cours sur le cours. Cette conclusion du processus n'est qu'amorcée dans notre ouvrage, il devait se poursuivre au collège. Tous les objets mathématiques nécessaires étaient connus sous une forme adaptée à la dernière étape : l'institutionnalisation des définitions dans une construction mathématique des structures numériques, standard mais fortement signifiante. La transition de cette arithmétique vers l'algèbre a été en partie poursuivie jusqu'à la thèse de Dominique Broin. Elle aurait entre autre absorbé et remis à sa place la théorie des proportions, objet didactique en voie de disparition mais transitoirement utile dans une mathématique de la scolarité obligatoire.

D'un point de vue scientifique, la question de savoir si une mathématique spécifique à la scolarité obligatoire est indispensable, est tranchée à mes yeux : c'est oui. Nous avons le choix entre chercher à gérer les transpositions culturelles indispensables par l'exercice d'une science du didactique ou les laisser errer au gré des idéologies et des intérêts du moment. L'illusion qu'un bras invisible corrigera toujours notre ignorance des phénomènes didactiques et culturels a des effets dévastateurs. Après avoir été postulée dans les années 60, la volonté de nier la nécessité de cultures et d'institutions appropriées à l'enseignement « obligatoire » persiste aujourd'hui, pour toutes sortes de raisons, longtemps après le reflux de la réforme des mathématiques modernes qui en avait été l'argument principal.

3. PRINCIPES ET METHODE

Ainsi organiser un processus consiste

a) à *décomposer* l'objet de l'enseignement en différentes *connaissances* afin d'en retenir certaines et d'en rejeter d'autres,
b) et conjointement à *regrouper* les produits de cette décomposition et à confondre des objets suffisamment voisins,
c) puis à trouver les *situations* d'introduction ou de définition de ces connaissances
d) enfin à les ordonner de façon à satisfaire au mieux les contraintes d'une origogenèse compatible (ordonnancement des situations en fonction des questions qu'elles posent et résolvent, c'est-à-dire par des relation de causalité) pas trop éloignée d'une topogenèse compatible avec l'organisation « standard » des connaissances (ordonnancement des situations en fonction des relations « logiques » des connaissances.

a et b revient à les *définir* de façon catégorique (indépendamment de leurs conditions d'usage)
c et d revient à les définir de façon opératoire et explicative

Ce processus permet de définir les praxéologies attachées aux connaissances visées. En fait il est conçu pour permettre de construire des praxéologies didactiques transposées et adaptées. Par contre il ne me semble pas possible d'emprunter ces praxéologies directement aux pratiques mathématiques ou didactiques usuelles, ni même de les construire directement sans référence aux situations et à la genèse didactique associée.

Les questions associées à ce processus sont naturellement du genre :
Quelles raisons de choisir une décomposition d'un objet déterminé?
Quelles raisons de ne pas le faire ou de regrouper plusieurs objets dans un même projet ?
Exemple

Les modes de définition

Les deux modes principaux de définition catégorique d'une classe d'objets sont

- la définition par les propriétés caractéristiques (dite parfois « définition en **compréhension** »)
- l'énumération des éléments de cette classe (définition en **extension**[1])
- **l'ostension**

Il arrive souvent dans l'enseignement qu'il semble impossible d'utiliser aucune de ces deux définitions. Définir de façon catégorique un rationnel exige la définition d'une structure entière et énumérer effectivement un ensemble infini (toutes les fractions) n'est pas possible.

Un procédé courant consiste à présenter un élément (une fraction par exemple) en situation, d'énumérer ceux de ses caractères qui sont communs à la classe (définition descriptive) qu'on veut définir pour essayer de faire de cet élément l'élément générique de la

---

[1] Jean Jacques Robrieux , éléments de rhétorique et d'argumentation, Dunod, p. 98-101

classe visée. Ce procédé, dit de **définition descriptive**, relève de la métonymie puisqu'il définit un objet par une de ses parties. Il relève aussi de la métaphore puisqu'il repose sur une analogie et sur un détournement de signifiant (43/17 est une fraction tout « comme » 2/3 sauf que…). En fait la métaphore est dans l'intention : la fraction 2/3 devrait être aux rationnels comme 43/17 mais l'analogie est fausse pour l'élève s'il veut s'en servir de façon pratique et la chose définie par 2/3 n'est pas la même que celle définie par 43/17. Il y a détournement de signifié.

Mais cette forme de connaissance « descriptive » des objets mathématiques n'est pas sans inconvénients.

Elle se conjugue avec un autre procédé didactique qui consiste à faire coexister des définitions différentes et à les présenter comme « équivalentes » du fait de leur coprésence dans un même objet alors qu'en fait elles relèvent de traitements et de raisonnements très différents. Nous les avons identifié sous le nom d'***ostension*** et nous avons montré les inconvénients de leur abus et les limites de leur usage dans l'enseignement.

Exemple

Il est d'usage dans l'enseignement de définir les fractions, par exemple 2/3 à un moment, puis 4/6 à un autre… de façon à rester proche d'une utilisation ou apparaissent des tiers ou des sixièmes, puis de déclarer plus tard que ces deux fractions sont « égales » , qu'elles ne sont que deux aspects d'un même objet. Confondre les éléments (ici les fractions) et les classes (ici les rationnels) est une pratique très courante - et apparemment anodine - très utilisée dans l'enseignement pour introduire des objets mathématiques.

Il est fréquent de relever les malentendus, les erreurs et les difficultés qui découlent de ces formes didactiques de définition. (Exemple : Il est facile de présenter un quart de tarte, un dix-septième de tarte c'est moins sûr, quarante trois dix-septième encore moins, mais comment faire pour « mesurer » un morceau de tarte déjà là avec des fractions ?)

Cette simulation de définition est une transposition didactique classique. Elle trouve une justification dans les heuristiques utilisées par les chercheurs. Par la suite, Bernard Sarrazy a fortement tempéré nos critiques en montrant qu'une part d'ostension était universelle, inévitable et constitutive de la connaissance.

Le mode de définition envisagé dans la Théorie des situations inclut en fait une certaine ostension, mais il la place dans un processus de définition plus vaste, fondé aussi sur la définition opératoire et sur la définition explicative.

La **définition opératoire** consiste à remplacer les propriétés constitutives de l'objet par ses effets symptomatiques (Un acide est ce qui fait virer la couleur d'un révélateur au tournesol). L'objet est « ce qui sert à », ce qui produit tel effet etc.

La théorie des situations permet de ramener cette définition à la définition mathématique : au lieu de satisfaire une relation simple, l'objet est tenu de satisfaire (résoudre) un modèle mathématique de la situation.

Dans le cas des fractions, il faut trouver une situation assez générale pour rendre nécessaire l'expression d'une fraction à l'aide de nombres naturels AVANT qu'on ait eu besoin d'enseigner aucune expression de cette sorte. (Principe de non circularité d'une définition)

La **définition explicative** a pour but de faire « accéder à l'essence de l'objet à définir » [Robrieux]. C'est celle qui permettra d'accéder le plus précisément mais aussi le plus rapidement et le plus économiquement à ce qui peut distinguer l'objet de ses voisins.

A défaut de disposer de la possibilité de définir un objet à l'aide des procédés précédents, il reste la **définition conventionnelle**, qui consiste à résumer, à remplacer un objet ou une propriété déjà là par une autre. La définition déclare l'équivalence des deux signifiés. Assez souvent elle cache un détournement de sens.

Exemple : un vecteur est un segment de droite orienté.

La détermination des objets de savoir et des « situations fondamentales »

Les présentations longues (a-didactiques) ou courtes (didactiques) de ces situations a-didactiques

Structure du processus « Rationnels et décimaux » préparation 2 du chapitre 2

	parties			Modules	activités	séances	objets
I	Mesures	rationnelles	Opérations	1	3	1-3	Définition rationnels
				2	6	4-10	Opérations ., ./ .ds Q
				3	3	11-15	Mesure de grandeurs
II			Topologie	4	4	16-19	Ordre des rationnels
				5	5	20-25	Décimaux construction
III		Décimales	Opérations	6	5	26- 31	Opérations ., ./. , ds D
			Topologie	7	6	32-36	Représenta décimales d'u rationnel
IV	Fonctions	similitude	Une fonction linéaire (sans nom	8	5	37- 41	Similitude
		Applications linéaires rationnelles	Ordre fonctions rapports	9	6	42-44	Applicatio linéaires dans Désignation : fractions
V		Multiplications et divisions hétérogènes	Multiplication d'une mesure par une rationnel scalaire	10	4	45- 47	Multiplicat par un rationn (externe)
VI	Situations	Etude de pb.	Multiplication par un Décim.	11	3	…	Situations linéaires
		Classification de Pb.de mult. Et division	Division rat.	12	2	…	Les divisio « classiques »
			Division déc.	13	3	…	Nouvelles divisions ds Q
VII	Algèbre et arithmétique rationnelle			14	5	58-62	Compositi des applicatio linéaires, fonc inverses
		Identification mesure-fonct.		15	4	62-65	Décompos identification structures, rap

VIII	Récapitulation							
	Epreuves terminales			16		66		

Partie à traiter au collège							
IX	Définitions et propriétés de Q et de D	Etude mathématique des rationnels Définition : divisions, fractions, rapports, Fonctions linéaires Propriétés					

		(algébriques) Propriétés topologiques Proportions Expressions diverses (taux, etc.)					
X	Formules et algorithmes	Nombres et Lettres comme arguments					

Vocabulaire de l'Analyse descendante : Programme Parties Module : projet Activités (ordre fixé mais durée variable) Suite d'activités Processus *Vocabulaire de l'analyse ascendante* Séquences Séances Phases	Note Le terme « leçon » est ambigu. Il désigne tantôt - Un objet d'enseignement, un sujet d'étude - Un enseignement, - Une période réservée à un enseignement Ces sens correspondent à des pratiques didactiques où projets et séances doivent coïncider et être déterminés à l'avance. La didactique par les situations oblige à séparer ces deux concepts

ATELIER II

EXEMPLE D'ANALYSE D'UNE SITUATION A-DIDACTIQUE

Nous allons commencer par l'étude d'une de ces situations d'introduction a-didactique d'une notion nouvelle qui ont eu un certain succès. Nous poursuivrons par celle d'une des leçons « ordinaires » moins excitantes mais plus répandues, délicates et importantes. Nous serons conduits à utiliser les grilles relatives aux formes de connaissances, puis celles relatives aux principes de dépendance entre les apprentissages.

Il s'agit d'abord d'étudier une leçon dont on pense qu'elle possède un modèle de situation mathématique, (c'est-à-dire a-didactique) et donc de déterminer ce modèle. La lecture de la leçon permet d'identifier la connaissance mathématique visée.

1. Etude de l'objet mathématique de la leçon « définition d'un rationnel »: les couples (les fractions)

(Pour une description de la leçon, on se reportera à l'article de RDM n°2, reproduit dans l'ouvrage)
Cette première étude considérant l'objet mathématique « en diverses situations ou conditions » constitue une étude préalable des variables, indépendantes de la situation effective recherchée. Elle débute l'analyse constructive et encadre les analyses inductives.

Par exemple dans la 1ère leçon, nous reconnaissons une définition des fractions il s'agit d'introduire les fractions comme moyen de mesurer des « longueurs non entières.

« La fraction n/m est la mesure d'un objet tel qu'il faut en « sommer » m, égaux, pour équivaloir à n unités ».

Cette définition est inhabituelle, son choix découle de plusieurs observations :

1. La définition classique est : « la fraction n/m est la « grandeur » obtenue en partageant l'unité en m parts égales et en ajoutant n de ces parts ».

La définition classique n'est pas opératoire pour programmer un mesurage, lorsqu'il s'agit de « mesurer » une grandeur effective. Par exemple il faut en effet que celui qui veut mesurer un segment A avec une unité U,

- choisisse d'abord un nombre, par exemple 7, sans savoir si ce choix est judicieux ou non
- détermine un quantième selon ce nombre : U/7, (cela peut être techniquement difficile)
- puis encadre la grandeur A entre deux nombres successifs de quantièmes :
  $n U/ 7 < A < (n+1) U/ 7$
- constate que le choix de 7 ne permet pas d'exprimer exactement la mesure cherchée et donc le rejette
- commence une nouvelle étape en choisissant un autre nombre par exemple 3 ou 11
- …

Chaque étape, effectuée avec un nombre précis, est similaire aux précédentes, et ne leur emprunte aucune information utile. Il est donc « économique » d'essayer d'abord les quantièmes simples ½, 1/3, ¼, 1/5 etc. avant d'essayer des 7^{ième} ou des 11^{ième}.

Cette stratégie très coûteuse ne peut être utilisée pratiquement. L'idée de « mesurer » une grandeur avec une fraction est donc métaphorique.

2. Au contraire la définition retenue permet un mesurage effectif : reporter côte à côte l'unité et la grandeur à mesurer et chercher une coïncidence est facile à réaliser. Cette définition est

provisoirement une meilleure solution au problème « affecter une valeur (un signe) » à une grandeur qui permette de la reconnaître.

Remarquons que l'énoncé du problème contient une solution puisque les catégories de feuilles sont identifiées par des lettres A, B, C, etc. Il faut donc que les élèves « inventent » des signes avec lesquels on puisse calculer avec des sommes et des produits comme il est d'usage dans les mesurages « naturels ». Mais cette consigne ne peut pas leur être donnée directement car elle les détournerait vers des considérations théoriques. On utilise donc le mot « mesurer les épaisseurs », qui formellement n'a pas de sens mais qui évoque les actions habituelles.

3. Mais il faut échapper aux pratiques de la mesure avec des naturels, qui est adaptée aux cas où la « grandeur » mesurée est grande par rapport à l'unité (au moins deux fois plus grande). Ce qui conduira avec d'autres considérations à vouloir mesurer des grandeurs inférieures à l'unité. Mais si la taille des grandeurs à mesurer le permet, les élèves recourront à des sous unités pour retrouver les conditions du mesurage naturel. Il faudra donc mesurer des grandeurs de très petite taille avec des unités elles aussi très petites, et de taille voisine.

4. Le choix de la commensuration, une conception culturellement morte, au détriment de celle qui est dominante (le fractionnement de l'unité) peut paraître mal avisé (inutile, compliqué) voire dangereux pour la compréhension future.

Ce choix répondait à plusieurs conditions et circonstances, principes, ou paris

a) assujettir les « fractions » à leur fonction première de *mesurage* de grandeurs non entières,
b) permettre l'invention du procédé « par les élèves ».
c) Eviter l'enchaînement des conditions et des méthodes liées à la définition classique, qui doit habituellement précéder son usage dans le mesurage. Elle conduit à n'envisager les fractions supérieures à l'unité que sous la forme de nombres fractionnaires et donc à n'utiliser que les fractions inférieures à l'unité etc.
d) ne pas faire d'allusion au partage ou à la division et aux conceptions de rapport ni d'opérateurs d'après le principe de séparation des conceptions suivant leur complexité mathématique.
e) Nous soupçonnions que cette conception pouvait former un obstacle didactique et nous voulions l'étudier (cf. la 1ère thèse de Ratsimba-Rajohn). Nous l'avons fait en espérant que le « modèle dominant » introduit à la leçon 11 est si répandu qu'il reprendrait facilement le dessus.

Remarque : La condition a est une condition mathématique et didactique d'origine épistémologique, les conditions b, c et d sont d'origine didactique, locale (b) ou globale c'est-à-dire relative au processus entier (c et d). La condition e tient aux objectifs scientifiques

5. Le milieu choisi est celui des épaisseurs de feuilles de papiers.

Les raisons de ce choix sont celles exposées en 3 ci-dessus. En particulier il permet d'éviter que les élèves ne mobilisent la définition métaphorique usuelle « par partition de l'unité ». Elle apparaîtra spontanément dès que l'unité deviendra assez grande pour qu'on puisse envisager de la partager (Leçon11)

Les unités à fractionner seront donc des millimètres et les grandeurs mesurées seront inférieures au dixième de millimètre (Il est difficile d'envisager de diviser un millimètre). La condition sur le voisinage grandeur-unité n'est pas respectée mais l'éloignement des conditions habituelles affaiblit son effet.

a) l'absence de référence à la méthode des mesures naturelles conduira à l'usage du couple n nombre d'unités, m nombre de reports de la grandeur de façon plus « symétrique ». Il y a des inconvénients et des avantages à cette situation

- inconvénients évidents : la possibilité de confondre le rôle des deux nombres, surtout si l'on veut « généraliser » ou plus précisément oublier le milieu et le fait qu'il s'agit d'une mesure A L'AIDE D'UNE UNITE (ce que nous avons appelé l'évaporation de l'unité, et qui consiste usuellement à « oublier » l'unité, à confondre ¾ m avec ¾) : « n » est le « mesureur » entier (le nombre d'unité) de la pile des unités, et m est le « dénombreur », le compteur du nombre d'éléments empilés à mesurer. Ce risque s'est révélé bien plus grand pour les enseignants que pour les élèves. La fraction mesure est donc ici bien un concept composé de 4 informations : <m,A, n, U> : qui est dit : m « A » mesurent n « U »
- et des avantages à cette condition ; entre autres, la dénomination, totalement différente de la dénomination classique n/m prononcée « n m$^{\text{ième}}$ », qui évoque l'antique définition des quantièmes par l'ordre : prendre le 10$^{\text{ième}}$ d'une collection (décimer), c'est aligner la collection, compter : le premier, le second etc. le neuvième puis retenir le dixième et recommencer. Conception qui ne laisse aucune chance de concevoir 3 dixièmes par exemple et qui ne donne qu'une valeur approchée du quantième voulu.

Le fait d'éviter la conception et la dénomination classiques conduit à envisager une situation de définition de l'objet, indépendante de la dénomination (action pure), et donc de laisser les élèves désigner le couple (nU, mA) comme ils le voudront.

Il faudra un travail spécifique ensuite pour faire considérer ce couple comme une mesure de l'épaisseur, un objet mathématique unique.

A moins que l'idée de « division » demeure. Une division que l'on ne peut pas « effectuer », dont on ne connaît pas de résultat spécifique et canonique, mais qui caractérise bien un résultat. Conserver l'idée que (n,m) est une division amènerait la classe à s'interroger sur ce que peut être la comparaison ou la somme de deux divisions… Cette idée aurait une occasion de surgir dans les leçons suivantes mais elle ne sera reprise que beaucoup plus tard (dans la dernière partie).

b) Le fait de choisir un objet à mesurer beaucoup plus petit que l'unité devrait favoriser le choix d'un n égale à 1. On devrait aboutir seulement à l'usage des quantièmes (il faut 17 feuilles pour obtenir une épaisseur de 1 millimètre). Mais le millimètre lui-même est petit. L'erreur de lecture peut être relativement importante. Il y a intérêt à diminuer cette erreur relative en empilant un plus grand nombre de feuilles. On peut espérer que les élèves « sentiront » cette nécessité » ou qu'au moins certains choisiront une épaisseur de plusieurs millimètres permettant au professeur de « favoriser » implicitement cette pratique en l'approuvant ou en la reprenant.

Conclusion : La connaissance-solution » est : « écrire l'épaisseur d'une feuille donnée» (appartenant à une catégorie de feuilles disponibles) sous la forme (n, m) exprimant m feuilles « mesurent » n millimètres » (remarquer l'inversion : ce sont les n millimètres qui mesurent les feuilles : le langage courant « dissout » souvent et contrarie la précision)

Elle peut s'exprimer comme une tâche et le fait d'empiler des feuilles et d'approcher un double décimètre comme une sous-tâche, utiliser un pied à coulisse serait une technique etc. Mais les rapports de la tâche avec ses sous tâches dans la situation doivent être examinés du point de vue de l'actant dans sa situation et non pas énoncés a priori par l'observateur comme une nécessité logique ?

2. Etude de la situation a-didactique proprement dite correspondante (analyse et constitution de la fiche)

Dans la leçon retenue, il s'agit de désigner par un sigle, inconnu des élèves. un objet mathématique nouveau. Il s'agira donc de le « définir ». Faut-il le faire « préalablement » comme le laisse entendre le principe de formulation d'un modèle implicite déjà présent ?

1. Envisageons de demander d'abord aux élèves de mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier. Il s'agit pour eux d'une tâche car

- elle leur a été demandée dans d'autres circonstances,
- l'expression est courante dans et hors de l'école
- et il lui correspond des techniques familières dans certaines circonstances connues.

A.A. (analyse inductive) Les élèves présentent la feuille sur la tranche en face de l'origine du double décimètre et constatent que leur algorithme échoue. Aucun des éléments habituels du schème n'est présent pour suggérer un aménagement ou un tâtonnement. Ils ne peuvent rien faire d'autre que de se tourner vers le professeur pour qu'il propose une autre question, une information, ou une action qui transformerait cette « situation » (accomplir une tâche inconnue) et la rendrait résoluble.

Accepter de communiquer ou de suggérer la solution ferait apparaître la situation comme didactique : par exemple le maître donne aux élèves une tâche qu'ils ne peuvent pas accomplir, puis leur enseigne la solution, ou bien décompose la demande en sous questions dans une démarche du type « découverte par maïeutique socratique».

Si nous voulons que les élèves aient une chance d'inventer une solution, il faut que la tâche soit « motivée », c'est-à-dire qu'elle soit le moyen de résoudre un problème déterminé (principe TSM1). Ici, ce qui empêche les élèves de chercher quoi que ce soit, c'est le malentendu sur le terme « mesurer » qui leur est présenté comme familier mais qui n'est en fait qu'une métaphore puisqu'il désigne une opération complètement originale (on l'a fait exprès évidemment). Le terme « mesurer », n'est pas défini pour les élèves dans le milieu qui leur est proposé. Il ne correspond à aucune de leurs conceptions - technique ou autre- utile. Leur conception du mesurage est à la fois associé à un ensemble trop complexe de connaissances (techniques, technologiques et théoriques), et défini sur un champ trop étroit pour être investi dans cette nouvelle opération. Remarque : elle ne peut pas être conçue par l'élève comme une *tâche* puisque c'est une chose totalement nouvelle.

Comment « problématiser » la tâche « mesurer » ?

2. Dans le cas envisagé la seule rétroalimentation des actions de l'élève serait l'approbation du professeur. Il convient au contraire d'objectiver l'action de mesurer, de lui trouver un but et des conditions qui feront du mesurage un moyen, parmi d'autres concevables … et indépendant de l'opinion du professeur.

Il faut que cette situation permette à l'élève d'essayer… des actions qui sortiront nécessairement de ses praxéologies et qui laisseront la place à une « aventure » où les essais, les erreurs, l'intuition, le hasard, la metis puissent jouer un rôle. Il faut enchâsser la tâche dans une situation a-didactique et ne pas utiliser le terme « mesurer » autrement que comme une « image ». .

A.D. (analyse constructive) Mesurer c'est au moins exprimer (une jauge), pour pouvoir conserver, reconnaître, ou reproduire, avant même d'être un moyen de comparer et surtout d'effectuer des opérations arithmétiques.

La situation a-didactique pourrait donc être en première approche la suivante : on donne à l'élève une feuille de papier prise à son insu dans un des paquets présents (repérés par des lettres. Il doit trouver de quel paquet sa feuille a été extraite. Les feuilles ne se distinguent que par leur épaisseur (cela doit être aussi vrai que possible mais aussi déclaré, convenu). Cette situation fait du mesurage de l'épaisseur un moyen qui ne porte pas l'idée du mesurage entier habituel. Mais le moyen de vérifier la validité de la réponse tue la question, car on ne peut que

soit dévoiler l'origine (notée à l'avance) de la feuille
soit dévoiler le mode de solution.

Dans les deux cas 'élève ne peut pas vérifier la valeur de sa réponse par lui-même indépendamment de la solution attendue. (Pb1)

De plus une partie importante des élèves peut ne pas avoir d'idée et si un élève a une idée elle ne profitera pas à la recherche des autres (Pb2). La consigne de reconnaître un objet (une épaisseur) laisse un champ de possibilités cognitives a priori beaucoup trop grand, alors que les possibilités d'exploration de ce champ sont toutes petites puisqu'on n'a droit qu'à un essai (Pb3).

3. Simplifions notre exposé de l'analyse constructive en donnant tout de suite une solution à ces problèmes d'ingénierie.[1]

Des élèves sauront de quel tas provient la feuille et devront faire deviner ce tas à d'autres élèves correspondants en leur envoyant des messages où il ne devront pas désigner ce tas lui-même (par sa lettre). Ils ne devront utiliser que des nombres ou des mesures.

Cette situation permet d'éliminer le mesurage de la procédure de vérification. Les élèves peuvent obtenir une appréciation sur leurs tentatives sans que la méthode soit nécessaire. Entre les communications, émetteurs et récepteurs peuvent échanger leurs idées et leurs explications pour élaborer une syntaxe pour leurs messages, « un langage ».

La situation alternative à la « découverte par maïeutique socratique » est donc nécessairement composée de : (d'après les principes 1 et 2)

- d'une situation de formulation pour une communication, d'un concept implicitement défini par une situation d'action : donnez à votre correspondant des renseignements suffisants pour reconnaître un type de feuilles parmi d'autres peu différents
- et d'une situation d'action du genre inventer un mode d'identification pour faire reconnaître un objet parmi plusieurs assez semblables[2]

La référence à ces deux types de situations est une aide puissante pour les analyses (inductive et constructive) de ces conditions. Par le jeu de contraintes qu'elles portent sous forme de questions, elles interrogent sans cesse les solutions envisagées ou observées, que ce soit pour trouver des solutions d'ingénierie ou pour décrire et évaluer leur réalisation.

4. L'observation des comportements des élèves dans cette première phase permet de repérer les difficultés et de révéler certains apprentissages.

Dès que l'idée de mesurer une pile de feuilles est apparue dans un groupe et que les élèves s'escriment avec leur double décimètre, l'institutrice propose des pieds à coulisse (sans vernier). Elle en montre brièvement l'usage. Les termes « épaisseur », « origine » « extrémité » « index » peuvent être utilisés et compris « en situation ». (cet usage faisait l'objet d'une leçon entière au CM2 dans la première moitié du 20$^{\text{ième}}$ siècle).

Les élèves d'un même groupe se contrôlent mutuellement en utilisant le pied à coulisse à tour de rôle. L'observation montre qu'ils doivent décider, sciemment ou non :

- la méthode :

---

[1] Problèmes qui conduisent souvent à envisager de très nombreuses variantes d'une même idée de situation et ne trouvent pas toujours une solution satisfaisante.

[2] Pour ceux que le fait de pouvoir disposer d'une pile de feuilles gênerait, pensez que l'élève pourrait découper une feuille unique en autant de morceaux qu'il veut pour empiler les morceaux

i. soit prendre une pile quelconque de feuilles de papier, mesurer l'épaisseur totale et compter les feuilles
ii. soit choisir un nombre de feuilles et « mesurer » l'épaisseur de la pile
iii. soit fixer une épaisseur totale en mm et mettre le nombre de feuilles voulu pour atteindre cette épaisseur

- l'ordre de grandeur du nombre de feuille
- le tassement des piles de feuilles

L'expérience et les échanges entre groupes les conduit à utiliser iii, et à former des piles les plus grandes possibles avec une borne : si la pile devient trop grande le tassement devient sensible.
Les élèves pensent avoir les meilleures chances avec des piles moyennes d''une dizaine de millimètres' et choisissent des papier « extrêmes soit les plus fins, soit les plus épais.
Les fiches de contrôle n'ont jamais été utilisées. A l'expérience il s'est avéré qu'elles augmentaient la quantité de matériels à utiliser de façon rédhibitoire, sans apporter aucun avantage.
Les messages, bien qu'entachés d'erreurs ou ayant abouti à l'échec sont conservés pour une étude dans la phase suivante.

5. Les expérimentateurs de l'époque n'ont pas jugé utile de décrire formellement les « acquisitions » que les élèves ont faites au cours de cette première activité). Nous allons le faire ici à titre d'exercice (se rapporter au document types de connaissances.

3. Observation d'une réalisation de la fiche 1 (14 Novembre 1989 ref. vidéo 093). (Ce que nous appelions une analyse « à chaud »).

1. Le *découpage de la leçon en séquences* Il s'effectue comme pour l'analyse d'un film : en séquences, d'après le sens).
Il a pour objet de déterminer
- les phases dans lesquelles les élèves ont toutes les informations pour entreprendre une action autonome (situations a-didactique) ;
- les phases de dévolution dans lesquelles le professeur prépare ces situations a-didactiques par une présentation du milieu et des consignes (phases d'exposé et phases d'exécution accompagnée),
- les phases de compte rendu,
- les phases d'institutionnalisation de connaissances,
- les phases d'exposé,
- les phases spécifiques d'évaluation (d'une connaissance, d'une situation, d'un apprentissage, d'une leçon etc.

Ces phases sont déterminées à l'aide d'une liste de question (comme un herbier)

2. La consigne.

La consigne est une phase didactique, puisque le professeur enseigne à ses élèves les règles d'un jeu

L'énoncé traditionnel (d'un problème) est une forme standard de cette phase, réduite aux conditions dont on suppose qu'elles n'ont pas besoin d'explication et donc pas besoin d'enseignement. En fait la dévolution de la consigne d'une situation peut exiger des phases didactiques plus ou moins importantes et évidentes. Dans une leçon initiale, la compréhension de la situation exige (comme pour l'apprentissage des règles d'un jeu) toute une série d'apprentissages, qui sont à la charge du professeur.

Les informations ou les enseignements portent sur les caractères des situations a-didactiques
- sur le milieu et les objets concernés,
- les règles et positions permises,

- l’organisation des joueurs,
- l’état initial,
- les états terminaux,
- l’état final recherché et son enjeu,
- et souvent une stratégie de base pour interpréter cette situation.

Observation de la consigne dans la vidéo.

Habituellement la fiche didactique de la leçon rédigée par l’équipe précisait l’énoncé (la consigne) comme sens, mais l(instituteur communiquait sa consigne comme il voulait.

Dans la vidéo présentée, la consigne dure environ 5 minutes, ce qui est très long. On y retrouve les éléments énumérés ci-dessus. Enoncés avec plus ou moins de précision. En particulier l’institutrice escamote un peu la description concrète des actions attendues. Elle devra y revenir.

4. Etude de l’objet mathématique de la leçon « définition d’un rationnel »: les couples (les fractions)

ATELIER 3 :

EXEMPLE D'ANALYSE D'UNE SITUATION DIDACTIQUE

Il me semble que les collègues qui ont utilisé notre livre ont mis un accent un peu excessif sur les cinq ou six leçons d'introduction des principaux concepts par rapport aux leçons ordinaires intermédiaires entre ces morceaux de bravoure. Certes, certains caractères de ces situations sont intéressants et ils donnaient un support commode pour l'exposition des concepts fondamentaux de la théorie aux professeurs en formation, en particulier pour illustrer la notion de situation a-didactique.

Je suppose que je ne suis pas innocent dans cette distorsion. J'ai montré plus complaisamment ce qui était nouveau que ce qui obéissait à des normes didactiques plus familières.

C'est ainsi que j'ai négligé « l'étude » dans mon panorama des situations didactiques. Ce procédé était si usuel et apparemment si dénué de mystères à l'époque où j'entreprenais mes recherches que j'ai carrément omis de l'inclure. Chevallard à fort justement pallié à cet oubli en mettant… son étude, au premier plan.

Il ne faut pas s'étonner de ces « errements ». La science n'avance pas par la formalisation injustifiée des évidences mais par le l'étude des nécessités. Je n'ai découvert l'importance de l'institutionnalisation que parce que j'ai tenté de m'en passer dans ma première théorie des situations mathématiques Elle n'entre pas dans la théorie par le biais de l'empirie mais par celui de la nécessité, découlant des limites de la théorie constructiviste mises en évidences par les paradoxes du contrat. Certes il a fallu une contingence pour déclencher la « découverte », la résistance des professeurs (et en particulier celle de Nadine) à l'application stricte des processus strictement TSM.

Ainsi je n'ai pas étudié l'étude parce que rien ne m'y a conduit, il me suffisait de la pratique et de la faire pratiquer. Elle ne devient un objet de la TSM que parce qu'elle n'est pas une situation au sens où j'ai défini. Il a fallu faire un nouveau travail pour l'expliquer et la définir en TSM (Théorie des Situations Mathématiques) et en TSDM (Théorie des Situations en Didactique des mathématiques).

Ainsi le travail théorique produit des distorsions dans les rapports à son objet. En mettant en avant la connaissance des conditions a-didactiques j'ai sans doute contribué à mettre dans l'ombre, pour un temps, les conditions didactiques que nous avons étudiées et réalisées dans toutes les autres leçons.

Pourtant la connaissance de ces conditions est des plus importantes à la fois pour concevoir le processus et pour comprendre comment il a pu fonctionner. Et dès lors que l'on utilise les morceaux de bravoure pour la formation théorique des professeurs il devient essentiel de leur montrer l'importance des autres leçons, afin qu'ils ne soient pas tentés d'utiliser ou de comprendre les unes sans les autres.

Je veux aujourd'hui essayer de réparer les inconvénients que cette omission a pu produire.

Nous allons donc choisir quelqu'une de ces leçons intermédiaires, presque au hasard, et l'analyser.
1ère proposition : Module 5, activité 3 : Représentations sur la droite Q page 89
2^{ième} proposition : Module 8, activité 2 : L'image d'un entier   page 141
3^{ième} proposition : Module 8, activité 5 : Division d'un décimal par 10 100 1000. page 156

Résumé :
L'analyse de la situation didactique retenue consistera à

1. repérer les connaissances et les formes de connaissances
    a. avant, pendant après

   b. intervalles et bornes, (dates et durées)
2. repérer les types de situations didactiques dans la leçon (recherche guidée, exercices guidés et leurs caractéristiques
3. repérer les situations a-didactiques et les exercices (les compter)
4. repérer les dépendances intra-activité
5. repérer les dépendances inter-activités

Ce texte présente seulement le point 1. Les fiches didactiques évoquées sont fournies en annexe.

1. OBJET DU MODULE 5

Le module 5 a pour objet « la construction des nombres décimaux ».

Il s'agit pour les élèves de choisir les fractions décimales pour localiser rapidement n'importe quelle autre fraction c'est-à-dire pour évaluer n'importe quelle mesure rationnelle.

Puis de définir l'expression classique des mesures décimales avec les fractions décimales qu'ils viennent d'apprendre.

Le module 6 permettra d'expliciter les opérations connues (+, -, x, /, et l'ordre) sur les écritures décimales en les exprimant et en les expliquant par celles nouvellement découvertes avec les fractions.

Le module 7 aboutira à la « division » comme algorithme d'encadrement d'une fraction, ce qui permettra d'entreprendre l'identification des fractions comme l'expression d'opérations et de fonctions linéaires (module 8 et suivants). Il permettra de distinguer et de caractériser les nombres rationnels non décimaux

Note : Après la fin de l'expérience qui dure 14 ans, on décida d'introduire les mesures décimales au CM1 par la méthode classique : le prolongement du système décimal à l'aide de « la division par dix ». Cet apprentissage n'a pas eu d'influence sur le déroulement du curriculum qui a été conservé pour le CM2 pendant 12 ans. Les élèves reconnaissaient et expliquaient les opérations à l'aide des écritures décimales à l'aide du calcul sur les fractions décimales.

2. COMPOSITION DU MODULE 5

L'organisation des connaissances du module 5 est la suivante est la suivante :

Il 'agit d'apprendre

- à localiser un rationnel, c'est-à-dire de le placer par rapport à une échelle constituée par d'autres rationnels. (5-1)
- puis à réduire l'intervalle de la localisation et à la poursuivre (5-1)
- Puis de choisir « spontanément » le filtre décimal (les fractions décimales) comme meilleur moyen de réaliser cette localisation. (5-2)
- La formulation et l'étude de ce procédé et les apprentissages correspondants se poursuivront dans la leçon (5-3) au cours de l'introduction d'une représentation sur « la droite rationnelle ». il s'agit d'une leçon à composante « didactique » importante
- L'écriture des rationnels décimaux sous la forme habituelle de nombre à virgule s'effectue au cours de la leçon 5-4. Cette leçon est « fortement didactique » en ce sens que le professeur expose les faits ret donne des exercices
- Le module se termine par un contrôle de connaissances.

3. CONNAISSANCES DANS LE MODULE 5

Les connaissances intervenant sous différentes formes dans cette partie du curriculum

a) Connaissances pré requises pour le module 5

Mettre un entier sous forme de fractions (connaissance familière)

Comparer deux fractions par divers moyens :

comparaison des parties entières (encadrement dans N) connaissance

réduction au même numérateur connaissance non institutionnalisée

réduction au même dénominateur connaissance institutionnalisée

posséder une stratégie de réduction de l'encadrement d'un naturel par des naturels (connaissance non formulable comme tâche)

déterminer un intervalle naturel pour encadrer une fraction (connaissance) localiser des fractions dans des intervalles de 1.

b) Connaissances apparues dans le module 5 avant la leçon trois (pré requises pour la leçon 3)

Choisir une fraction dans un intervalle de naturels (leçon 5-1)

Connaître une stratégie de découpage des intervalles de rationnels : transformer l'expression des bornes, par exemple en doublant numérateur et dénominateur (5-1)

connaître une stratégie de réductions successives rapides d'un intervalle. en multipliant par 1000 par exemple. .

connaître le jeu initial (attrape moi ou je t'attrape)

L'usage des découpages décimaux est décisif pour permettre aux élèves de jouer rapidement au jeu initial et de le trouver intéressant

c) connaissances apparaissant dans la leçon 5- 3

Résultats de la leçon 2

A la fin de cette séance, tous les enfants ont compris la nécessité de choisir des intervalles en dixièmes, centièmes, millièmes. Ils arrivent facilement

- soit à attraper une fraction (lorsqu'elle est décimale)
- soit à l'encadrer dans des intervalles très petits (de l'ordre du dix millième ou du cent millième).

Enfin ils ont pris conscience qu'il y a des fractions faciles à attraper, et d'autres non. Certains en ont même désigné spontanément.

Résultats de la leçon 3

Les enfants ont appris à placer des fractions sur une droite graduée, beaucoup savent les placer vite et sûrement, quelques uns ont encore des difficultés.

Ils ont pris conscience que certaines ne pouvaient pas être placées sur une droite graduée en 1/10, 1/100, 1/1000 ...

A la fin de cette activité, ils savent tous décomposer une fraction et donner le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes...

EXTRAIT DU SOMMAIRE GENERAL

II. LA LEÇON ETUDIEE : MODULE 5 - ACTIVITE 3 (SEANCE 23)

5.3 - REPRESENTATION SUR LA DROITE Q.

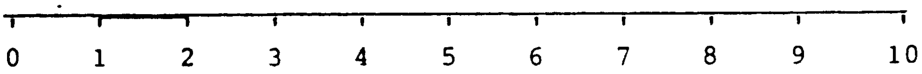
5.3.1. Première phase : 1^{er} jeu (20 minutes)

Consigne : "Aujourd'hui, c'est moi qui vais choisir une fraction que j'inscrirai derrière le tableau. Vous devrez attraper cette fraction en me proposant des intervalles. Je ne répondrai que par "oui" ou "non".

Déroulement : L'enseignant choisit une fraction (145/100 par exemple) l'inscrit derrière le tableau noir. Les enfants travaillent par groupes de 2 ou de 3 et inscrivent les premiers intervalles sur leur cahier. Lorsque l'enseignant s'est assuré que tous les groupes ont choisi un intervalle, il les interroge à tour de rôle.

Les enfants demandent : "Est-ce qu'elle est
Entre ([0 et 5 [...?
Entre [0 et 3[?..."
ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils trouvent l'intervalle de 1 ([1 ; 2[pour la fraction choisie ci-dessus)

L'enseignant dessine une droite sur le tableau, représente les différentes divisions et demande à un enfant de venir montrer où se trouve la fraction.



Il dessine cet intervalle [1 ; 2[en couleur. Puis il demande aux enfants de trouver des intervalles plus petits.

A chaque étape la valeur de l'intervalle est indiquée par les enfants (à la demande de l'enseignant).

Le jeu continue jusqu'à ce que soit proposé l'intervalle

$[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$. L'enseignant dit alors : "attrapée !

Plusieurs stratégies apparaissent

1°) Les enfants proposent directement des intervalles en centièmes

par exemple : $[\frac{100}{100} ; \frac{150}{100}[$

puis progressivement $[\frac{100}{100} ; \frac{125}{100}[$

et ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils trouvent

$[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}$

2°) Ils proposent d'abord des intervalles en dixièmes. Par exemple :

$[\frac{10}{10} ; \frac{15}{10}[$ encadrée

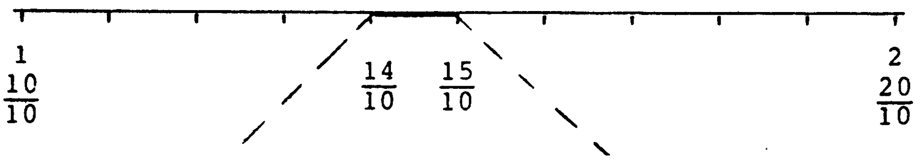
$\cancel{[\frac{10}{10} ; \frac{13}{10}[}$ (l'enseignant barre)

$\cancel{[\frac{13}{10} ; \frac{14}{10}[}$

$[\frac{14}{10} ; \frac{15}{10}[$ encadrée.

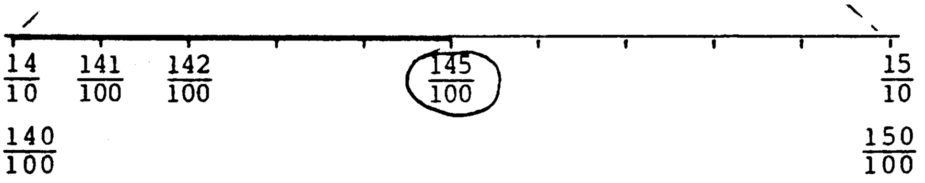
A ce moment-là, ils proposent des centièmes.

Chaque fois que les enfants proposent un nouveau découpage, l'enseignant leur demande de venir au tableau écrire les bornes en fractions.



A ce stade, les enfants se rendent compte qu'il leur est très difficile de dessiner le partage de l'intervalle $[\frac{14}{10} ; \frac{15}{10}[$ en 10 partie égales.

Ils proposent un agrandissement de cet intervalle qu'ils découpent en 10 parties égales. A ce moment là, un enfant vient marquer les bornes en centièmes ainsi que les graduations intermédiaires.



Ils font de nouvelles propositions

$\cancel{[\frac{140}{100} ; \frac{142}{100}[}$

$\cancel{[\frac{142}{100} ; \frac{144}{100}[}$

$\cancel{[\frac{144}{100} ; \frac{145}{100}[}$

$[\frac{145}{100} ; \frac{146}{100}[$

- attrapée !

5.3.2. Placement sur la droite (15 minutes)

a) Consigne : "Nous allons supposer que cette fraction $\frac{145}{100}$ désigne la longueur d'un ruban que nous tracerons en rouge. Si je place ce ruban le long d'une droite graduée de 0 à 10, $\frac{145}{100}$ désigne aussi le point où arrive l'extrémité du ruban sur la droite.

Nous allons placer exactement cette extrémité, c'est à dire $\frac{145}{100}$ »

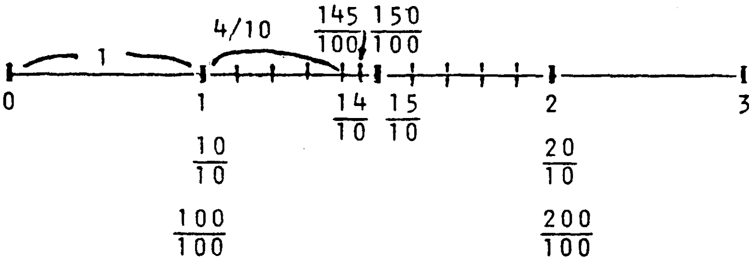
b) Déroulement : C'est une phase collective. L'activité se déroule très rapidement sur le mode "questions-réponses".

Sur la droite dessinée au tableau, un enfant vient colorier l'intervalle [0,1[en rouge, puis propose de partager l'intervalle [1,2[en 10, ce qui est fait aussitôt (soit par l'enseignant soit par lui). Les bornes sont marquées en fractions comme cela a été fait dans la première phase (paragraphe c ci-dessus).

Il continue le trait rouge jusqu'à $\frac{14}{10}$ puis dit : "il faut encore découper en 10 pour avoir des centièmes".

L'enseignant lui demande ce qu'il faut découper en 10. L'enfant montre l'intervalle [14 ; 15 [et marque la fraction $\frac{145}{100}$

Il trace enfin en rouge l'intervalle [$\frac{140}{100}$; $\frac{145}{100}$ [



L'enseignant demande alors :
"Pour mesurer ce ruban, combien faut-il d'unités ?
combien de 1/10 à partir de 1 ?
combien de 1/100 ?
et il inscrit sur le tableau

nombre d'unités	1
nombre de 1/10	4 ou 4/10
nombre de 1/100	5 ou 5/1

Il dit alors : "voilà ce que nous avons mesuré :

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

et demande à un enfant de venir faire cette addition au tableau.
L'enfant écrit :

$$\frac{100}{100} + \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = \frac{145}{100}$$

Remarque : Les enfants disent très souvent : "on a décomposé la fraction !”

5.3.3. Deuxième jeu (15 minutes)
a) L'enseignant propose de jouer une autre fois. Pour ce jeu, la fraction choisie doit être un peu différente de la première, par exemple

$$\frac{975}{1000}$$

Le jeu se déroule exactement de la même manière la fraction est placée sur la droite puis décomposée :

$$\frac{9}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$\frac{900}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{975}{1000}.$$

b) L'enseignant demande ensuite aux enfants de décomposer les fractions qui avaient été attrapées dans l'activité précédente, ici : $\frac{99}{10}$. Chacun écrit sur son cahier

$$\frac{99}{10} = \frac{90}{10} + \frac{9}{10}$$

$$9u + \frac{9}{10}$$

et place $\frac{99}{10}$ sur la droite

Remarque : Certains enfants s'aperçoivent alors que la fraction $\frac{83}{9}$ qu'ils avaient aussi choisie dans l'activité précédente, ne peut pas être placée sur cette droite graduée en 1/10, en 1/100 1/1000 ...

5.3.4. Troisième jeu : (15 minutes)

a) Consigne : "Pourrait-on maintenant deviner très vite une fraction en posant des questions relatives à sa décomposition ? Vous allez essayer de trouver ces questions".

b) Déroulement : Un élève joue contre ses camarades. Il sort de la classe pendant que les autres choisissent ensemble une fraction qu'ils inscrivent chacun sur leur cahier ($\frac{243}{100}$ par exemple).

L'enfant revient et essaie de poser à ses camarades, à tour de rôle, des questions qui lui permettront de trouver très vite la fraction. Après quelques tâtonnements et essais infructueux, il demande (aidé quelquefois par l'enseignant) combien y a-t-il d'unités ? " combien de 1/10 ? combien de 1/100 ? etc."

Ses camarades doivent l'avertir quand la fraction est attrapée. Il doit alors l'écrire sur le tableau (à l'aide des réponses qu'il a reçues) et la placer sur la droite.

c) <u>Remarques</u>

1) Les enfants notent les renseignements qu'ils reçoivent de manière très différente.

Voici quelques exemples de notations qui ont été utilisées :

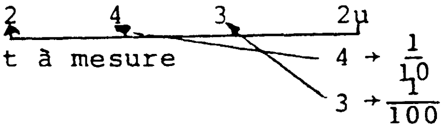
baguettes de 1 → 2
baguettes de 1/10 → 4
baguettes de 1/100 → 3

ou encore : 2 u
4 dixièmes
3 centièmes.

ou encore : 2
4/10
3/100

ou encore :

l'enfant écrivait à mesure
dans l'ordre



2) L'enseignant n'intervient pas dans ce jeu. Ce sont les enfants qui, de leur place protestent si les réponses données ne sont pas correctes ou si l'enfant qui cherche la fraction se trompe.

3) Le jeu peut recommencer deux ou trois fois, les enfants ne se lassent pas. C'est généralement l'heure qui arrête l'activité.

4) Il est intéressant de changer l'ordre dans lequel les renseignements sont demandés (combien de millièmes ? combien de centièmes ? combien d'unités ? ...) afin que les enfants s'aperçoivent que cela n'empêche pas de trouver la fraction.

5) Les fractions choisies par les enfants au cours de cette activité seront relevées par l'enseignant car elles seront utilisées dans l'activité suivante.

5.3.5. Résultats

Les enfants ont appris à placer des fractions sur une droite graduée. Beaucoup savent les placer vite et sûrement. Quelques uns ont encore des difficultés.

Ils ont pris conscience que certaines ne pouvaient pas être placées sur une droite graduée en 1/10, 1/100, 1/1000 ...

A la fin de cette activité, ils savent tous décomposer une fraction et donner le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes...

III. LA LEÇON SUIVANTE (MODULE 5 - ACTIVITE 4 SEANCE 24)

5.4 - PASSAGE DE L'ÉCRITURE EN FRACTION DES RATIONNELS DÉCIMAUX A L'ÉCRITURE DECIMALE

5.4.1. : Reprise du jeu de l'activité précédente (15 minutes)

a) Consigne : la même consigne est reprise.
b) Déroulement :

Un enfant sort, ses camarades choisissent une fraction qu'il devra trouver en posant les mêmes questions que lors de l'activité précédente.

Mais alors l'enseignant propose de marquer les renseignements demandés dans le tableau suivant (tableau A) qui servira pour chaque jeu.

Valeurs des intervalles	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000}$	
	0	2	3	9	→	$\frac{239}{1000}$

(Tableau A)

Par exemple, si la fraction choisie est $\frac{239}{1000}$ l'enfant qui demande le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes, de millièmes etc. place 0 dans la colonne 1 , 2 dans la colonne $\frac{1}{10}$, 3 dans la colonne $\frac{1}{100}$, 9 dans la colonne $\frac{1}{1000}$ et il marque la fraction trouvée en face.

Un ou deux autres enfants peuvent jouer encore et inscrire les renseignements et la fraction dans le tableau A.

5.4.2. Ecriture des fractions dans le tableau A (15 minutes)

a) Consigne : "Nous allons marquer dans ce tableau les fractions que vous aviez choisies et devinées dans l'activité précédente et que j'ai relevées".

b) Déroulement

1) L'enseignant envoie plusieurs enfants au tableau, à tour de rôle, afin d'inscrire les fractions du jeu précédent dans le tableau A.

Il fait ensuite marquer d'autres fractions choisies soit par les enfants, soit par lui-même (par exemple

$$\frac{325}{100} ; \frac{1240}{10} ; \frac{85}{10000} \text{ etc.}$$

Remarque. Cette phase est collective. Tous les enfants participent, soit en venant au tableau, soit en faisant des remarques, soit en protestant si une erreur est faite par celui qui vient inscrire les fractions.

Elle doit se dérouler rapidement, comme un jeu.

2) D'autres exemples sont ensuite faits individuellement. L'enseignant dicte les fractions suivantes que les enfants placent dans le tableau qu'ils ont fait sur leur cahier de brouillon.

$$\frac{7345}{100} ; \frac{7345}{10} ; \frac{7345}{10000} ; \frac{7345}{1000}$$

5.4.3. Passage à l'écriture décimale (15 minutes)

a) apport d'information : L'enseignant écrit sur le tableau (en dehors du tableau A)

7345
7345
7345
7345

et demande aux enfants s'il s'agit du même nombre. Les enfants répondent que, écrits ainsi hors du tableau A, il s'agit bien du même nombre, alors qu'écrits dans le tableau A, ce sont des nombres différents.

Après discussion avec les enfants sur les moyens possibles de savoir distinguer ces nombres, l'enseignant introduit la virgule.

73,45 - 734,5 - 0,7345 - 7,345

Ils remarquent immédiatement qu'elle est toujours placée après les unités (intervalles de 1).

b) Lecture de ces nombres :

L'enseignant dit aux enfants comment se lisent ces nombres :
« 73 virgule 45 » ou « 73 unités 45 centièmes », et en fait lire plusieurs.

c) Exercices individuels de contrôle et d'entraînement (20 minutes).

L'enseignant propose les exercices suivants qui sont faits individuellement par les enfants et corrigés aussitôt. Il peut repérer ainsi tout de suite les enfants qui ont encore des difficultés et les aider.

l°) Ecrire les fractions suivantes sous forme de nombres à virgule:

$$\frac{245}{100} = \quad ; \frac{48}{1000} = \quad ; \frac{2}{100} = \quad ; \frac{7259}{10} =$$

2°) Ecrire sous forme de fractions :

2,5 = 154,75 = 13,525 = 3, 7425 =

0,1 = 0,01 =

5.4.4. - Résultats

Presque tous les enfants ont compris et savent écrire les fractions sous forme de nombres à virgule et inversement. Lorsque le nombre est écrit sous la forme d'écriture à virgule, ils savent dire le nombre d'unités, de dixièmes, de centièmes, etc.

Cette activité ne présente guère de difficultés pour eux.

IV. LE CONTROLE (MODULE 5 - ACTIVITE 5 SEANCE 25)

5.5. CONTROLE DES CONNAISSANCES

1) Ecris sous forme d'un nombre décimal

$\frac{175}{100} =$ $\qquad$ $\frac{26}{100} =$

$\frac{2}{5} =$ $\qquad$ $\frac{4325}{10} =$

$\frac{17}{20} =$ $\qquad$ $\frac{17}{2} =$

2) Ecris sous forme d'une fraction :

4,7 = $\qquad$ 154,75 =

13,525 = $\qquad$ 0,1 =

0,02 = $\qquad$ 12,5 =

3) Ecris les nombres suivants sous forme de 2 fractions égales

2 = ___ = ___

15 = ___ = ___

4) Place sur une droite les fractions suivantes :

$\frac{25}{10}$; $\frac{28}{50}$; $\frac{75}{50}$

ETUDE DE LA LEÇON 5-3

RATIONNELS & DECIMAUX

Résultats

1 LES DOCUMENTS POUR L'ETUDE DES RESULTATS

La séance 5-5 est consacrée à des exercices. Il ne s'agit que d'exercices « ordinaire » qui permettent au professeur et aux élèves de faire le point.

Dans ces exercices de contrôles ordinaires, le professeur pose aux élèves des questions

- Sur des points qu'il a enseignés et institutionnalisés
- Qui lui paraissent indispensables ou au moins importants pour le bon déroulement de la suite
- Et qui figurent au programme.

Il ne faut pas les confondre avec les réponses aux questions ou avec les exercices qui ponctuent l'avancement des leçons

Nous présentons dans l'annexe 1, les réponses qu'un élève moyen écrit sur son cahier[1] (visé par les parents). Les corrections collectives ont lieu sur le champ, et les élèves doivent écrire les corrections sur leur cahier.

La façon dont le professeur analyse ensuite les réponses de ses élèves est visible sur l'annexe 2 :

- Tout d'abord, il code les caractères des réponses qui lui semblent importants (voir le tableau 2 manuscrit)

Par exemple réserve un colonne (103) pour noter si le placement de la fraction 25/10 est entre 2 et 3, et une autre (104) pour noter si le placement est « exact » c'est-à-dire justifié par l'indication de 5/10 entre 2 et 3

- Ensuite il relève ces comportements pour chaque élève et pour chaque question. L'ordinateur traite cette matrice et fournit les résultats par élève et par question (annexe 3). Les « moyennes » et les écarts types. Ces renseignements n'ont de sens que parce que le professeur n'a choisi que des comportements qu'il considère comme des indices positifs d'apprentissage. Mais il est clair qu'il n'attribue pas à ces informations la signification d'une note classique. Comme les comportements qu'il a notés ne sont pas d'importance didactique équivalente, la somme de leurs indices ne peut être interprétée qu'occasionnellement et avec précaution. Souvent les professeurs codaient aussi de la même façon des erreurs caractéristiques et les traitaient à part.
- L'ordinateur fournit aussi des histogrammes d'élèves et des histogrammes de question
- Pour vous permettre de placer ce travail dans l'activité de la classe j'ai extrait du « Bilan de ce niveau » les distributions de résultats des contrôles d'acquisitions scolaires de cette année là (annexe 4 : CAS). Ces Bilans étaient accessibles aux parents mais les codages des enfants autres que les leurs n'étaient pas communiqués, de sorte qu'il ne vous est pas possible de comparer ces résultats enfant par enfant. (par parenthèse ces CAS peuvent être assimilés à des « notes », examiner les valeurs attribuées et leur distribution.

II. LES RESULTATS

Nous délaissons les préambules sur les effectifs des classes. Les deux distributions des élèves semblent un peu différentes mais en fait elles sont très voisines comme le montreraient les fonctions de répartition des élèves. C'est l'élève KAL qui fait la différence.

---

[1] Ces documents sont extraits du dossier 1985-1986 CM2, des archives du COREM. Les dossiers des années suivantes contiennent aussi le même questionnaire te les mêmes traitements

Discrimination de deux groupes d'exercices

Les deux distributions des questions montrent la même discrimination entre d'une part, les questions 1 (cotes 88 à 96) et 2 (97 à 102) et d'autre part les questions 3 (103 à 110) et 4 (111 à 114). La répétition des expériences avec deux groupes de 20 élèves est plus probante qu'une expérience unique avec 40.

Les questions 1 et 2 contrôlent l'objet de la leçon 5- 4 qui concluait le module 5, la question 3 contrôlait l'objet des leçons 5-1 et 5-2. La leçon 5-3, décomposition d'une fractions décimale ne fait pas l'objet d'un contrôle parce que ce contrôle a eu lieu le 31 janvier (voir annexe 5).

Il faut observer que le même élève qui, avait réussi les 3 décompositions de fractions et place deux fractions sur trois sur la droite le 31 Janvier n'a échoué qu'à la moitié de la recherche d'écritures différentes de mêmes fractions le 6 février et a réussi les trois placements.

La question 4 contrôle une connaissance qui a été introduite dès la première leçon sur les fractions et qui a servi sans cesse depuis (pour comparer, pour additionner, pour soustraire etc.) c'est la donnée de fractions égales avec des dénominateurs différents. L'usage est familier pourtant la question 111 n'obtient que 50% (puis 40%, 45%, 35%) de réussite dans la classe A, et 41%, 41%, 35%, 23% dans la classe B. Cette technique a toujours été utilisée « à propos » mais n'a pas fait l'objet d'une institutionnalisation formelle. On peut penser qu'en dehors de toute situation cette technique n'a pas accédé au rang de « tâche » pour tous les élèves.

Les questions les moins bien réussies forment une population bien distincte, beaucoup plus dispersée que les questions réussies (groupées entre 85% et 100%). mais la distribution est « homogène » au sens des statistiques puisque la distribution résiduelle est monomodale.

Il est probable que si la réussite aux questions 1 et 2 (dernière leçon) est liée à la réussite aux deux dernières nos effectifs seront trop faibles pour montrer cette dépendance. Nous dirons que l'influence empirique des leçons 5-1, 5-2 et 5-3 sur 5-4 n'est pas établie. Il est vraisemblable que l'apprentissage de la transformation des rationnels décimaux en nombres décimaux et réciproquement aurait pu se passer des trois leçons précédentes.

Discrimination de dépendances

Ces deux groupes correspondent à des leçons et à des connaissances qui ont des statuts scolaires différents. Les situations présentées comme a-didactiques 5-1 et 5-2 ont des résultats autour de 50% les deux autres 5-3 et 5-4 autour de 90%

Que faut-il en conclure ?

Les leçons a-didactiques forment une suite à faible dépendance empirique, mais cette suite engendre au fur et à mesure de son déroulement des algorithmes qui peuvent être appris rapidement et bien.

Cela inclinerait à penser qu'il existe bien au moins trois types de dépendances : entre les connaissances :

- l'une articule les connaissances par la compréhension de leur rôle (soit dans une topogenèse soit dans une épistémogenèse)
- la seconde articule la connaissance et l'usage des algorithmes avec ces connaissances plus théoriques
- la troisième articulerait l'apprentissage des algorithmes entre eux, indépendamment de la compréhension plus générale.

III - COMPOSITION DE LA LEÇON

En première approche, la leçon 5-3 (séance 23) se décompose en trois « jeux » successifs : (5.3.1), (5.3.3) et (5.3.4.) dont le premier comprend 2 phases (5.3.1 et 5.3.2.). Ces quatre phases ont la même structure didactique :

- une consigne d'un jeu a-didactique,
- une partie ou deux effectuées sous la conduite du professeur,
- puis quelques parties où les décisions sont prises par les élèves qui peuvent éventuellement faire part à leurs camarades ou au maître de leurs remarques.

Le professeur ne fait pas d'observations aux élèves au sujet de ce qu'ils ont appris ou qu'ils devraient apprendre et ne tire pas de conclusions avec eux. Le fait de constater que les évènements se réalisent comme ils sont prévus dans sa fiche lui suffit. Son contrôle se borne à faire respecter la consigne qu'il a donnée.

La modélisation en termes de « situations » fait apparaître a priori :

1. Quatre réalisations d'un même modèle « didactique » : le professeur enseigne à ses élèves à « jouer » à un jeu a-didactique. Pour cela il dispose d'un temps de consigne décomposé en deux temps :

a) une communication orale des règles
b) une ou deux parties en exemple comme dévolution de la situation a-didactique

2. En principe on devrait trouver quatre réalisations d'un même modèle a-didactique incluses dans les situations didactiques évoquées ci-dessus (et donc identifier 12 Unités d'enseignement) :

Mais trois seulement sont déclarées être des « jeux ». La première (5.3.1. comprend les 3 u. e.). Elle est suivie d'une situation similaire (5.3.2.) mais qui n'est pas déclarée être un « jeu » (seulement 2 u. e.). Le second « jeu » (5.3.3.a) aussi n'a que 2 u.e : (consigne, jeu collectif). Il est suivi d'une activité (5.3.3. b) qui est simplement un exercice individuel. Le dernier « jeu » consiste en fait à une « mis en scène » d'un exercice, qui constitue une forme d'institutionnalisation (2 u. e.).

Nous pouvons donc considérer que ce curriculum comprend.10 « unités d'enseignement ».

Donc les matrices de dépendance entre unités d'enseignement seront triangulaires de 10lignes et 9 colonnes.

IV - COMMENTAIRES DIDACTIQUES

Les jeux de ce chapitre sont dérivés de la situation fondamentale introduite au début du chapitre 5 (encadrement des rationnels par des rationnels) et comparable dans sa structure à la recherche d'un nombre entier caché, par encadrements successifs avec des entiers.

Quand les élèves connaissent le but du jeu (par exemple attraper une fraction ou obtenir le plus vite possible l'intervalle le plus petit) ils essaient quelques stratégies qu'ils peuvent imaginer et qui sont publiques ou formulées mais non pas discutées et institutionnalisées.

Au début, dans la phase des exemples la recherche des « coups » est individuelle mais les propositions sont recueillies par le professeur et choisies avec lui dans un traitement collectif. Autrement dit les coups sont individuels mais la partie est collective. (5.3.1.)

Ensuite la partie devrait se dérouler plus librement

Les interventions du professeur dans ces phases a-didactiques sont minimales mais ne sont pas inexistantes. Nous pourrons en étudier la stratégie, à part. Elle n'est possible que parce que le milieu de la situation renvoie directement et simplement aux élèves les conséquences de leurs choix

Mais suivant les phases, l'ouverture des situations évolue et les modalités de la dévolution aussi. Ainsi le premier jeu est suivi d'une situation 5.3.2., qui n'a d'un jeu que l'apparence. Il faut placer une fraction sur une droite graduée. Il s'agit en fait d'un problème et non d'un jeu car la question est « comment faire pour… » et les décisions inadéquates n'apporteront à l'élève aucune information sur la qualité de ses choix. Elles ne l'orienteront pas vers une voie plus féconde. Et lorsque la méthode sera trouvée, les réplications de la situation seront des exercices, c'est-à-dire des occasions d'effectuer une tâche, d'appliquer une suite de décisions convenues.

Il s'agissait dans la situation fondamentale d'imaginer des méthodes pour approcher une fraction, et dans la seconde leçon de préférer des découpages décimaux.

Dans la leçon 5-3, il s'agit pour les élèves, d'utiliser les méthodes établies dans le jeu précédent et d'extraire successivement les unités, les dixièmes, les centièmes… Le professeur traite ce prolongement sur le mode de l'évidence : Indiquer sur une droite graduée, la position correspondant à une fraction donnée, va conduire à prolonger la stratégie sur l'ensemble des nombres et exiger implicitement la décomposition de cette fraction encadrée en fractions décimales considérées comme représentant de longueurs en unités, dixièmes, centièmes.

A aucun moment les élèves ne jouent effectivement individuellement au jeu fondamental. Le jeu est ici un modèle symbolique. Les élèves proposent des décisions, et les discutent publiquement sous la responsabilité du professeur. Leur valeur est établie par référence au jeu mais grâce à une analyse rationnelle, pas par des expériences heureuses ou malheureuses.

La fiction utilisée dans les jeux symboliques n'est utilisable pour ce genre de réflexions que si les jeux véritables sont suffisamment, familiers donc nombreux, et intéressants pour les enfants. Cette condition est remplie au cours des phases précédentes (équipe contre équipe dans la 5.1, jeux individuels dans la 5.2.) dès qu'ils utilisent les fractions décimales, les élèves réclament de poursuivre les jeux et s'excitent pour savoir s'ils vont attraper la fraction des concurrents.

La leçon suivante 5.4 consistera à changer d'écriture et suivra un schéma plus fortement didactique.

Remarquons que l'utilisation de la droite graduée n'est pas une innovation totale, mais ce qui est nouveau c'est son « intergraduation », ou plutôt la dénomination de son intergraduation en termes de 1/10 1/100 etc. car ces droite n'est pas un double décimètre mais une baguette de longueur quelconque que les élèves ont étudié à la fin du module 3.

Il faut remarquer aussi que les situations appartiennent au modèle du mesurage. Mais à un seul de ses aspects : celui de la réalisation d'un segment de longueur donnée. L'autre aspect, l'assignation d'une longueur à un segment donné aurait pu être traitée aussi. La méthode aurait été le même mais les critères de choix auraient étés différents

S'il s'agissait de mesurer un ruban l'opération serait un peu plus complexe mais de même nature. Il s'agirait d'encadrer non pas une fraction explicite mais la longueur non connue d'un morceau de ruban. Ce serait la même procédure, sauf que les enfants devraient comparer matériellement les positions des points. Le terme « mesurer » qui n'est pas prononcé ici par la maîtresse, serait vraisemblablement utilisé dans la consigne, et serait le moyen nécessaire de rendre « évidente » la référence au jeu précédent et à la stratégie des élèves : chercher la mesure entière (encadrer avec des naturels) puis raccourcir l'intervalle d'incertitude.

Cette situation serait issue du même jeu, mais la chose encadrée serait différente. Dans ce cas le questionneur, au lieu de *décomposer* une fraction connue, devrait concevoir successivement des longueurs correspondant à des fractions possibles et comparer le résultat à la longueur effective : il *composerait* explicitement une longueur avec des longueurs décimales fractionnaires. Cette situation est plus complexe que la précédente.

Avec les fractions rationnelles il est infiniment plus facile de réaliser 3/5 d'une tarte que d'assigner une fraction comme mesure d'un morceau de tarte. C'est cette deuxième opération que permet le choix standard des découpages en 10, 100 etc.

Il est important de noter enfin qu'au cours de cette leçon et dans tout le module, le passage d'une phase à l'autre n'est pas commandé par l'évaluation des « apprentissages individuels » effectués. Mais que ces évaluations existent (5.3.3.b) discrètement, au service du professeur. Entre l'exercice-évaluation 5.3.3. b et l'évaluation officielle 5.5, le professeur pourra au cours de la leçon 5.4 rendre plus familières les pratiques nécessaires (pas toutes) avec tous les élèves.

V - INVENTAIRE DE CONNAISSANCES

Après avoir décrit à grands traits ce que les élèves faisaient ensemble, nous allons nous intéresser à des productions plus précises, en les classant dans les formes de connaissances exposées dans le cours 2 (associées aux différentes sortes de situations).

- Dans la *première phase*, les élèves
    - considèrent des fractions décimales (une trentaine) et leur ordre,

- Ils expriment des intervalles semi ouverts (12 « collectivement »). Ils ne connaissent pas le terme « semi-ouvert » mais il les utilisent depuis la leçon 4.4 et la signification des crochets « [» et «] » est connue. Il n'est pas sûr qu'ils interprèteraient tous correctement «] [» ou «]]» qui n'ont été employés qu'une fois.

Ils n'écrivent plus au cours de cette leçon et des suivantes, que des fractions décimales, et « pire » la fraction à encadrer est décimale. Ce qui va permettre de « l'attraper » et de la décomposer. Ils retrouveront des rationnels non décimaux dans le module 7, ce qui les conduira à « poursuivre » la décomposition décimale.

Ces questions ont été abordées dans la leçon précédente : 5.2..

Pour l'instant il s'agit de s'installer dans le confort des décimaux et de préparer la leçon suivante où on les transcrira. (L'étude de leurs opérations fera l'objet du module 6, suivant le même plan que pour les fractions)..

- Les élèves qui choisissent directement de multiplier le dénominateur (dénombreur) et le numérateur (mesureur) par 1000, ramènent les stratégies d'encadrement dans les naturels : méthode économique mais peu porteuse de nouveautés.

Le professeur « utilise » donc élèves qui « hésitent » et qui ne s'aventurent que pas à pas, pour expliciter à plusieurs reprises la méthode qui consiste à cherche successivement combien de 1/10, de 1/100 etc. peuvent être extraits de la fraction.

- Sous la conduite du professeur les élèves
  - écrivent un entier (1 ou 2) sous forme de fraction, en particulier des expression de 1 (10/10, 100/100 etc. (2 fois dans la 1ère phase, 4 fois dans les suivantes), Il s'agit là d'une connaissance qui devient très familière
  - trouvent des fractions équivalentes à une fraction donnée (2 fois)
  - comparer deux fractions (plus de 12 fois)
  - intercaler une fraction dans un intervalle (4 fois)

- Dans la *deuxième phase* (5.3.2) le travail de la première est « plongé » dans un univers plus large : il ne s'agit plus de localiser un point mais de déterminer les extrémités d'un segment. Les mêmes nombres et les mêmes découpages vont être réutilisés mais dans une tâche différente, qui elle n'est plus incluse dans le jeu fondamental.

Cette tâche consiste en la décomposition additive d'une fraction décimale exprimée (avec une puissance de dix au dénominateur) en unités, dixièmes, centièmes…

Il s'agit donc d'une phase proprement didactique. Les élèves répondent à un problème simple et identifient le projet didactique du professeur qui leur a « montré » comment décomposer une fraction en une somme de fractions décimales.

- La *troisième phase* (5.3.3) a pour premier objet de « jouer » à la localisation d'une nouvelle fraction 995/1000. En fait chaque élève est invité à trouver et à écrire individuellement la décomposition montrée précédemment. La vérification s'effectue en faisant au tableau la somme des fractions proposées.

Immédiatement après, le « jeu » devient un exercice individuel. Cette décomposition est alors immédiatement appliquée aux fractions Les élèves doivent reprendre des fractions qui avaient fait l'objet d'études des leçons 5.1 et 5.2 précédentes. (choisies par les élèves). Les élèves avaient fait 4 parties en équipes puis individuellement (1 contre 1) 2 ou 3 parties. Ils choisissent donc des fractions parmi une quarantaine. Quelques célébrités : en particulier à la fraction 83/9 qui n'avait pas été attrapée même au 10 000ème ont un certain succès.

Le professeur jette un coup d'œil pour voir le résultat ou examine après la classe ce que les élèves ont su faire.

- La *quatrième phase* (5.3.4) est encore une phase didactique : il s'agit de « trouver des fractions décimales déterminées par leur décomposition canonique et l'inverse (le terme n'est évidemment pas prononcé) 243/100 = 2 + 4/10 + 3/100

Cette phase est un simple exercice, mais il est une remise en scène sous une forme un peu différente de la situation fondamentale :
« un élève sort de la classe les autres choisissent un fraction. L'élève revient et pose des questions pour deviner ou localiser la fraction il doit décomposer (localiser l'entier, puis interroger sur les dixièmes etc. puis additionner les résultats pour recomposer la fraction (écrite au dos du tableau).
Trois élèves seulement ont le temps de passer « à la devinette ». Mais tous les autres guettent avec intérêt ses réponses, ses erreurs et son succès etc. Ce genre d'activité transforme le rapport des élèves aux connaissances enseignées, il leur plaît et fait remonter leur « motivation » à suivre les méandres du processus et leur confiance d'y trouver du plaisir après des difficultés. Il socialise et institutionnalise les savoirs et les savoirs faire qui s'y sont investis.

Commentaire : Il est relativement aisé, à posteriori, de prendre chaque décision des élèves dans les conditions a-didactiques ou dans les exercices, de les décrire sommairement en négligeant les conditions particulières où elles sont apparues, puis de rechercher des « comportements » ou des réponses similaires, et de les considérer comme des réponses à une même question répétée. Ces réponses deviennent alors des indices d'un même « savoir » plus ou moins maîtrisé. Les suites de comportements ainsi amalgamés, adéquats ou non, apparaissent alors comme des « étapes » dans un cheminement d'apprentissage unique, une aventure qui ne dépend que de l'élève. Mais l'agrégation de ces réponses et leur assimilation à des connaissances, qui devraient être identiques, à des questions différentes pose des problèmes qui doivent rester présents à l'esprit.

En conclusion voici un premier inventaire de connaissances et une des matrices d'ordre logique dont il peut être doté. Nous dresserons ensuite une liste des formes sous lesquelles ces connaissances peuvent être traitées et une des matrices qui en découlent.

4. STATUT SCOLAIRE DES CONNAISSANCES

Il reste a examiner les rapports de ces connaissances avec les leçons qui suivent et en particulier avec le contrôle 5.5.
Il est évident que ce contrôle ne peut pas porter sur tout ce que les élèves ont vu, reconnu, appris, ou appris à décrire. Le professeur vise à rendre possible le déroulement de toutes les leçons suivantes. Beaucoup des connaissances qu'ils fait apparaître ne seront pas « fixées » avec beaucoup d'élèves, elles ne serviront au mieux qu'a permettre la construction d'autres connaissances, qui, elles, seront comprises et fixées grâce à cet environnement
Le professeur contrôle ce dont il a besoin de pouvoir exiger pour réussir, faire se dérouler les leçons suivantes. Mais l'apprentissage est le sous-produit de la fréquentation des connaissances que ces leçons ou situations établiront.
Il peut accepter que seulement quelques élèves se souviennent ou sache ce dont il aura besoin s'il sait qu'il pourra faire appel au souvenir de ces quelques élèves, et que les autres conviendront la légitimité de ces rappels et en tireront parti pour apprendre.
Il est clair que le statut scolaire des connaissances joue un rôle important dans ce type de curriculum.
Vouloir contrôler la connaissance de tout ce qui a été montré et a fortiori seulement visité au cours du processus gonflerait excessivement les contrôles. Vouloir limiter l'enseignement à ce qui est contrôlable enferme dans un rapport aux connaissances très éloigné de leur emploi réel.

Observons maintenant les connaissances qui font l'objet du contrôle du professeur (Séquence 5.5.).
Directement reliée à cette leçon, on trouve :
La question 3 : Ecrire des entiers sous forme de fractions (4 question) :

- deux sont directement des réplications des ce qui a été fait au cours de cette leçon (5.3.1) puisque 2 était borne de l'intervalle à couper

- deux sont à extrapoler car « 15 » n'a pas été envisagé les dénominateurs peuvent être exprimées par des puissances de 10 ou non.

La question « 4 » demande exactement de faire ce qui est l'objet de la leçon 5.3. : la mise en ordre et le placement sur une droite graduée de trois fractions ; La décomposition des fractions données en 1/10 et en 1/100 intervient implicitement ainsi que la transformation pour obtenir une puissance de 10 au dénominateur (2 fois)

Les questions 1 et 2 « évaluent » les résultats de la leçon 5.4. Celle-ci utilise d'ailleurs à nouveau certaines « connaissances » du module 5.

Considérations Générales

Nous pouvons déjà distinguer deux et même trois statuts scolaires différents. Mais il faut remarquer que les conditions qui rendent ou non possible l'entrée de la classe et du professeur dans un processus ou dans une situation didactique, concernent les connaissances des élèves mais aussi celles du professeur, et notamment les connaissances communes qui sont nées du déroulement des séances antérieures, qui sont spécifiques à cette communauté didactique qu'est la classe. Ces connaissances communes d'un passé commun sont très souvent indispensables pour permettre le succès des phases d'enseignement les plus efficaces et les plus rapides.

: Nous distinguerons donc

1. Les connaissances nécessaires pour le professeur et pour les élèves, pour aborder les situations mathématiques envisagées :
   a) Pour exprimer les consignes (prof) et les utiliser (élèves), puis pour envisager les stratégies de bases et les buts des situations a-didactiques (élève et prof) :
      i. Concevoir des modèles implicites d'action (élèves), les percevoir et les utiliser (prof)
      ii. Assurer aux élèves un modèle *implicite* pour une formulation projetée
      iii. Des références, même folkloriques, pour repérer et exprimer les propriétés à analyser et à démontrer
   b) pour rassembler les conditions des institutionnalisations
      i. légitimer les choix retenus dans un environnement d'alternatives,
      ii. présenter et faire utiliser les formulations et les définitions standard
      iii. présenter et pouvoir enseigner les références et leur justification
      iv. exposer, faire comprendre et enseigner l'organisation topogénétique de ces savoirs et les connaissances (méta) nécessaires
   c) pour faire s'approprier les objets enseignés
      i. connaître un champ d'usages
      ii. fréquenter suffisamment ces usages pour rendre familières les connaissances, techniques, et technologies enseignées

et les connaissances que ces situations ont pour objet de développer

VI - CURRICULUM BASIQUE

Le curriculum basique est celui que l'on obtient en ne considérant que l'organisation topogénétique des savoirs enseignés et considérés comme appris aussitôt.

Chaque unité d'enseignement est supposée n'utiliser que des savoirs (des connaissances établies, sues, convocables) qui sont supposés organisables aussitôt en nouveaux savoirs suivant des procédés déjà acquis.

Les connaissances contrôlées dans l'activité 5 étaient à l'époque (1975) des « objectifs » de l'enseignement des fractions à l'école primaire : Ecrire des fractions décimales sous forme d'un nombre décimal. Mais quelques années avant ces opérations se présentaient ainsi :

« Pour écrire le décimal correspondant à une fraction à dénominateur 10, 100, 1000
- écrire le numérateur
- considérer qu'il est suivi d'une virgule
-décaler la virgule d'autant de rang vers la gauche qu'il y a de zéro au dénominateur

Cette méthode était enseignée en calcul rapide ou en calcul mental.

Mais que le dénominateur soit 10, 100, ou 1000, ou non, les élèves pouvaient chercher cette écriture dans tous les cas, en interprétant les fractions comme des divisions et en « poussant » formellement l'algorithme d'Euclide. Si la division s'arrêtait le nombre était décimal, si on ne la voyait pas s'arrêter, l'élève ne savait pas (elle aurait pu s'arrêter plus loin) car l'inventaire des restes n'appartenait pas au répertoire de l'école primaire.

De sorte que les deux types d'exercices ne relevaient pas du tout des mêmes connaissances. Les curriculums cette époque déduisaient de ces objectifs des enseignements les visant directement et séparément. Leur parenté faisait partie des explications.

Le seul moyen possible à ce moment là pour les élèves de l'école Michelet est celui qui est déduit de la leçon 5-3 dans la leçon 5-4. C'est la décomposition et l'écriture successive des unités, dixièmes, … Trois fractions s'écrivent directement (175/100, 26/100 et 4325/10 avec des virgules à divers endroits. La dernière serait insolite dans des classes ordinaires.

- Pour les trois autres : 2/5, 17/20, 17/2, il faut d'abord leur trouver une expression égale avec une puissance de 10 au dénominateur : Les deux dernières constituent un distracteur.

Construisons un curriculum basique pour les connaissances nécessaires à ces deux exercices :

1 U.E. Le professeur distingue les fractions selon leurs dénominateurs : puissance de 10 ? ou non ?

Il demande à quelques élèves de classer des fractions

Il indique formellement pour le premier cas, la méthode permettant d'obtenir le nombre décimal correspondant. Il montre deux ou trois exemples et les fait imiter au tableau en deux ou trois exercices. Au besoin, il demande que les élèves récitent formellement la méthode, en la mettant en œuvre.

Il donne quelques exercices individuels sur l'ardoise en contrôlant rapidement les réponses par le procédé Lamartinière.

Il passe alors à l'exercice inverse et peut demander à certains élèves de dire comment ils feraient l'inverse : trouver « la » fraction à dénominateur une puissance de 10 qui correspond à une écriture décimale. S'il a du temps il demandera si des élèves peuvent lui en donner plusieurs. Deux ou trois se mettront en évidence mais les autres oublieront vite ces perversions ou même protesteront : une question ne doit avoir qu'une réponse.

S'il a un peu de temps, le justifiera les méthodes, 437/100, prendre 437 centièmes c'est diviser 437 par 100 (c'est diviser 1 par cent puis multiplier par 437) effectuez la division vous trouvez bien 4,37. Ou bien il fera multiplier 4,37 par 100.

S'il a un peu plus de temps, il essaiera d'expliquer la méthode, (en fait l'illustrer) ce qui soulagera la mémoire de ceux qui pourront comprendre. Et pour cela il va concrétiser la fraction comme mesure dans le système décimal 437/100, c'est 437 centimètres, c'est-à-dire 4 mètres et 3 décimètres et 7 centimètres : 4,37

Remarque : En invoquant les grandeurs il introduit une idée fausse : les élèves pensent que 4,37 et 437 sont la même chose (le même nombre) parce que c'est peut être la même longueur exprimée avec des unités différentes… Cette idée fausse a des conséquences indésirables

Commentaires

En interprétant les connaissances comme des collections de savoirs isolés la méthode basique ouvre la porte à un univers d'interprétations locales souvent mathématiquement douteuses, acceptées par les mathématiciens et par le public par tradition. Les conséquences de ces principes ne peuvent pas être imaginées, surtout si on les généralise et si on en généralise l'application à de nouveaux projets non tempérés par la culture et par des pratiques attentives.

La seule alternative qui m'a paru possible a été de leur opposer d'autres méthodes didactiques où la signification mathématique des connaissances élémentaires est mieux maîtrisée, tout en étant réalisables.

On peut conclure de cette étude que dans un schéma classique les réponses aux questions 1 et 2 seraient liées, mais indépendantes des questions 3 et 4. La connaissance ou la compréhension des unes ne sert pas dans les autres.

Dans la leçon que nous analysons au contraire, 3 a servi à élaborer 1 et 2, et 4 est la base de toutes les autres (historiquement). Le questionnaire pose les questions en commençant par celles qui sont les plus classiques, les plus « importantes » du point de vue extérieur.

Et il ne contrôle qu'après, celles qui sont importantes pour le déroulement du processus (3 et 4)..

Les deux premières questions vont être rencontrées sous des formes différentes, le rapport avec la division sera repris des dizaines de fois avant la fin de l'année dans touts sortes de conditions et de circonstances. Il peut être révélateur pour d'autres raisons, mais il n'est pas essentiel que quelques élèves aient des hésitations ou fassent des erreurs… pas plus que les chutes d'un bébé qui apprend à marcher.

J'ai conscience d'avoir tout fait pour lasser mes lecteurs mais il est essentiel de comprendre que la conception d'un curriculum ne s'obtient pas par un découpage à priori des connaissances visées, et par conséquent ne s'évalue pas sottement au jour le jour, comme la longueur du tissage de Pénélope.

VII - LES DEPENDANCES INTERNES A LA LEÇON

Dépendances internes aux curriculums

Ainsi chaque unité d'enseignement est un moyen d'exploiter les précédentes et de rendre possibles les suivantes.

Aussi les questions qu'il convient de poser sont les suivantes sur la nécessité

Que *fallait-il* faire pour achever ce qui avait été entrepris dans les leçons précédentes

Que *fallait-il* faire pour pouvoir faire les leçons suivantes ?

Et sur les possibilités : Que ne *pouvait*-on pas faire avant la leçon 5-3, mais que l'on pourra faire après ? Qu'est ce qu'elle a rendu *possible*, qui ne l'était pas ?

Nous laisserons de côté ici les questions suivantes, propres à exciter les imaginations en des discussions infinies : Qu'aurait-on pu faire d'autre après les leçons précédentes. Qu'aurait-on pu faire par la suite si la leçon 5-3 avait été différente, et que ne pourra-t- on plus faire après ?

Dépendances internes dans la leçon 5.3

Nous avons étudié précédemment les dépendances internes au module 5. Nous allons maintenant appliquer ces questions à l'intérieur de la leçon 5.3. entre les 10 unités d'enseignement que nous avons relevées plus haut.

Nous avons vu plus haut qu'il y a deux ordres de dépendances au moins,

- celle qui indique que la situation S1 est nécessaire pour rendre possible la présentation de S2 (son déroulement et son succès) mais qui est telle que le succès de S2 ne dépend pas du taux de succès individuels de S1. (Dépendance des situations : Ds)
- et celle qui indique que le déroulement de S2 dépend assez étroitement des résultats individuels résultant de S1(Dépendance d'apprentissages Da).

La distinction est d'importance puisque les premières laissent le passage d'une U.E. à une autre à la discrétion du professeur et ne dépendent que de sa préparation de la leçon, alors que les secondes commandent le passage à l'U.E. suivante en fonction du déroulement et du résultat obtenu. Le professeur se plie alors à la contingence. Les dépendances observées sont généralement composites. Un processus qui ne présenterait que des dépendances Ds serait un contrat très faiblement didactique tandis qu'un processus uniquement basé sur les acquisitions des élèves (trop fortement didactique) serait très fermé discriminant et angoissant.

La phase finale consiste à montrer qu' « on » sait décomposer une fraction décimale

243/100 = 2 + 4/10 + 3/100, et la recomposer. En fait ce genre d'exercice sera revisité plusieurs fois encore.

Il n'est qu'une répétition et une institutionnalisation de ce qui a été fait dans la phase précédente. Mais si on le supprimait il *faudrait* que le professeur tire les conclusions d'institutionnalisation lui-même : qu'il fasse corriger publiquement les erreurs dans les exercices du 5.3.3b par exemple.

D'autre part cette phase finale n'est possible que parce que ces exercices ont été proposés préalablement. Mais le succès de 5.3.4. ne dépend pas beaucoup de la qualité des réponses individuelles à 5.3.3b. (exemple de dépendance Ds mais pas Da)

1. Les consignes des situations a-didactiques ne dépendent théoriquement que des situations antérieures (Ds) : la capacité des élèves à comprendre les termes utilisés, de disposer du milieu, d'envisager des stratégies de base. Mais l'exécution du jeu dépend fortement du succès de la phase de consigne : la plupart du temps le professeur est obligé de répéter, de reformuler les consignes publiquement et individuellement, de les exemplifier c'est-à-dire de faire exécuter collectivement une ou deux parties avant que les élèves se hasardent à jouer seuls. Lorsque le jeu est « compris » son effet naturel didactique attendu est une amélioration de la stratégie de base, son remplacement par un autre et sa justification par un énoncé. La phase de conclusion et de formulation est très fortement dépendante du succès du jeu, de sa répétition, et de ses qualités suggestives. (Dépendance Ds). Mais tous les élèves n'ont pas besoin de trouver eux même la solution pour en voir l'intérêt s'ils l'ont cherchée, pour la comprendre et pour l'adopter, *s'ils en ont le temps*. Ces évènements ne dépendent que des situations, de leur nombre, de leur intérêt… Cet effet des situations sur les modifications des comportements et des connaissances est très lent. L'enseignement a pour objet de remplacer ces processus d'apprentissages spontanés par d'autres où l'apprentissage est plus ou moins « forcé ».

Commentaire

Après la présentation de situations strictement a-didactiques (comme le serait la pose d'un problème difficile, nouveau, et à résoudre sur table)

On trouve d'abord les méthodes où les professeurs proposent des situations a-didactiques propices à l'évolution des connaissances mais organisent la diffusion rapide des solutions trouvées par quelques élèves seulement auprès de ceux qui en ont besoin pour répondre adéquatement à ces situations.

Ensuite celles où le professeur remplace une partie de ce processus par des procédés didactiques tels que

- le remplacement « des parties » effectives par une « recherche intellectuelle » de la solution
    - plus ou moins guidée
    - voire montrée

La situation sert à valider les procédures et à motiver les réflexions et les tentatives

- le remplacement des parties par des explications où la situation sert de décor.

L'efficacité de l'explication se mesure à l'économie de temps d'apprentissage par répétition qu'elle procure

Ensuite se présentent les méthodes ou le rôle de la situation s'estompe et change. C'est le discours qui organise et présente l'instrument des adaptations de l'élève : le savoir. Les situations « a-didactiques » sont seulement décrites ou évoquées (comme exemples, illustrations) à l'intérieur d'un discours qui est la chose à apprendre ou bien elles sont utilisées dans des conditions étroitement conditionnées par le discours (exercices et problèmes). Dans ces conditions les situations sont subordonnées au discours. Elles ne peuvent se dérouler heureusement – en principe - que si l'élève a appris et compris dans le discours précédent ce qui est indispensable au discours actuel. .

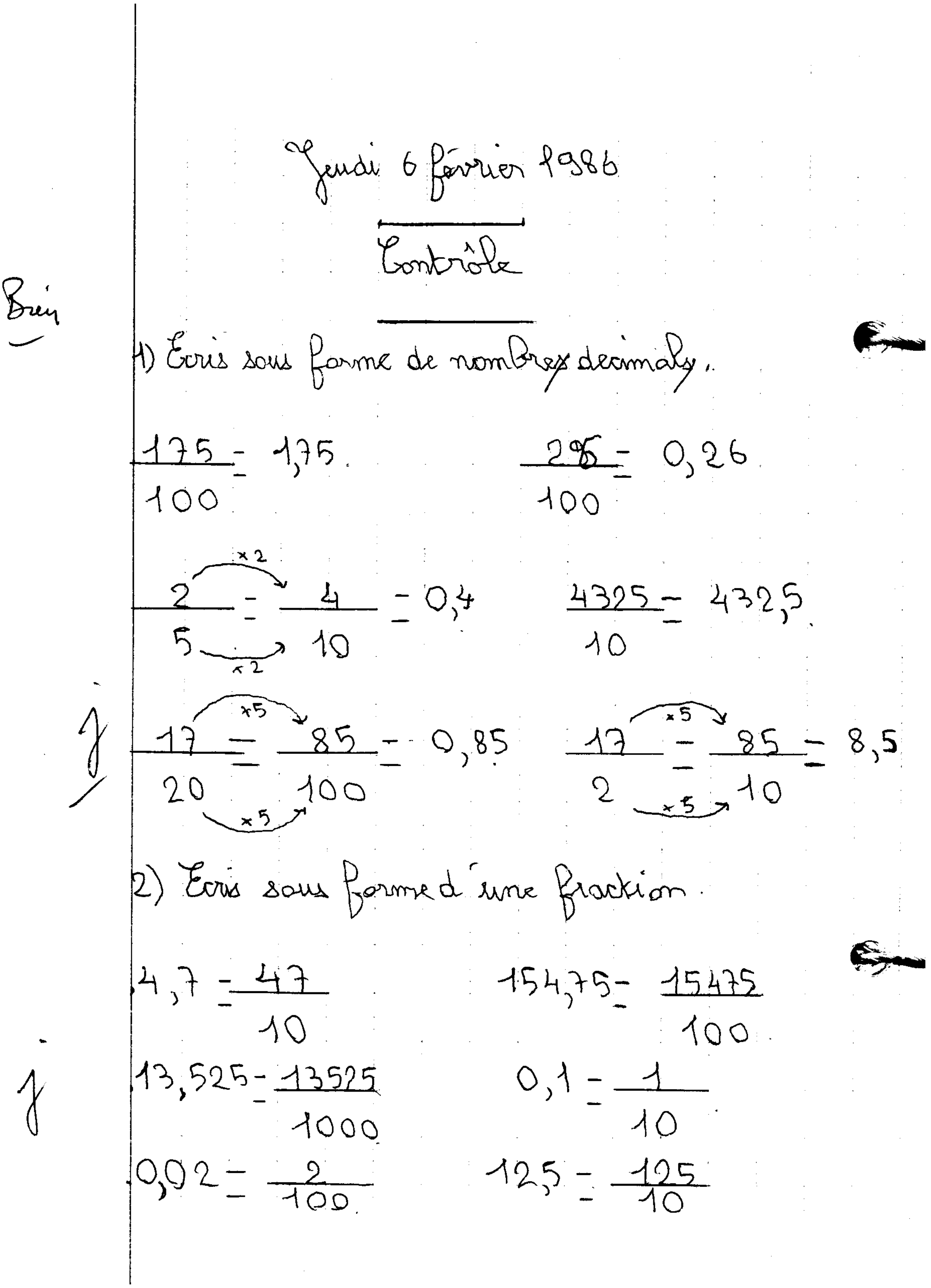
Le module 5 est organisé par un discours mathématique et méta mathématique:

1. Pour avoir à disposition une mesure, c'est-à-dire des nombres correspondant à n'importe quelle quantité d'une grandeur il a fallu utiliser des fractions.

2. Le repérage, la réalisation, la comparaison et la somme des grandeurs, nécessaires dans leurs manipulations, sont un peu compliqués mais surtout très lourds avec des fractions. Si on se

restreint aux fractions décimales elles deviennent aisées. On peut écrire les fractions décimales comme des nombres entiers, en indiquant avec un point le dénominateur.
Ce discours n’est pas formulé par la maîtresse.

Annexe 1
Résultats du module 5



Jeudi 6 février 1986

Contrôle

Bien

1) Ecris sous forme de nombres decimaux.

$\frac{175}{100} = 1,75$ $\qquad$ $\frac{26}{100} = 0,26$

$\frac{2}{5} \overset{\times 2}{=} \frac{4}{10} = 0,4$ $\qquad$ $\frac{4325}{10} = 432,5$

j

$\frac{17}{20} \overset{\times 5}{=} \frac{85}{100} = 0,85$ $\qquad$ $\frac{17}{2} \overset{\times 5}{=} \frac{85}{10} = 8,5$

2) Ecris sous forme d'une fraction.

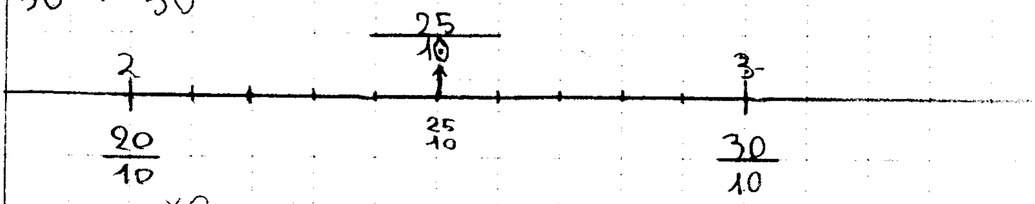
$4,7 = \frac{47}{10}$ $\qquad$ $154,75 = \frac{15475}{100}$

j

$13,525 = \frac{13525}{1000}$ $\qquad$ $0,1 = \frac{1}{10}$

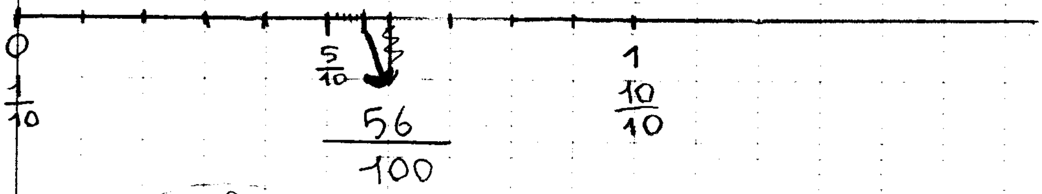
$0,02 = \frac{2}{100}$ $\qquad$ $12,5 = \frac{125}{10}$

3) Place sur la droite les fraction suivantes : $\frac{25}{10}$; $\frac{28}{50}$; $\frac{75}{50}$



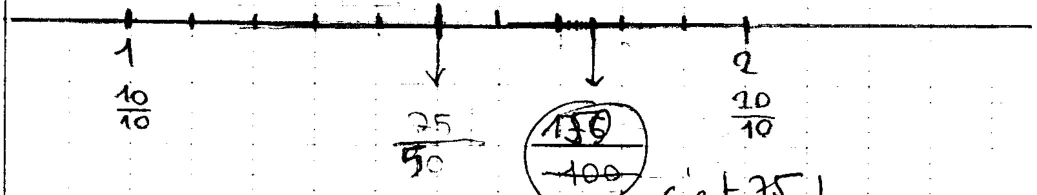
j

$$\underset{\times 2}{\overset{\times 2}{\frac{28}{50}}} \cancel{\times 2} = \frac{56}{100}$$



j

$$\underset{\times 2}{\overset{\times 2}{\frac{75}{50}}} \cancel{\times 2} = \frac{150}{100}$$



c'est $\frac{75}{50}$!

f

4) Ecris les nombres suivants sous forme de fractions

2 = $\frac{20}{10}$ = ~~$\frac{25}{10}$~~ f $\frac{200}{100}$

15 = $\frac{30}{2}$ = ~~$\frac{34}{2}$~~ f. $\frac{300}{20}$

Annexe II Résultats du module 5

6 février 1986

Fractions

① Ecris sous forme d'un nombre décimal :

88 $\frac{175}{100}$ =

89 $\frac{26}{100}$ =

90 $\frac{4325}{10}$ =

$\frac{2}{5}$ = 91 ↓ transformation 92 ↓ nombre décimal

$\frac{17}{20}$ = 93 ↓ transformation 94 ↓ nombre décimal

$\frac{17}{2}$ = 95 ↓ transformation 96 ↓ nombre décimal

② Ecris sous forme d'une fraction

97 4,7 =

98 13,525 =

99 0,02 =

100 154,75 =

101 0,1 =

102 12,5 =

③ Place sur la droite les fractions suivantes :

103 : entre 2 et 3
104 : placée exactement
$\frac{25}{10}$

$\frac{28}{50}$ ↓ 105 $\frac{56}{100}$
106 entre 0 et 1
107 placée exactement

$\frac{75}{50}$ ↓ $\frac{150}{100}$ 108
109 : entre 1 et 2
110 : placée exactement

④ Ecris les nombres suivants sous forme de 2 fractions :

111 112 2 = ___ = ___

15 = ___ = ___ 113 - 114

ANNEXE III

P0A07   6.02.1986   CM2 A

```
   CLASSE     PAVE  CASS:P0A07  RESULTATS ELEVES

NU!NOM!ECH!REU!0/0!*NU!NOM!ECH!REU!0/0!*NU!NOM!ECH!REU!0/0!*NU!NOM!ECH!REU!0/0!!
--|---|---|---|---|*--|---|---|---|---|*--|---|---|---|---|*--|---|---|---|---||
 1!ARM!  6! 21! 77!* 6!CSE! 10! 17! 62!*11!POI!  6! 21! 77!*16!TEX! 12! 15! 55!!
 2!CMD!  4! 23! 85!* 7!DAA!  4! 23! 85!*12!POD!  7! 20! 74!*17!THS!  4! 23! 85!!
 3!BEB! 12! 15! 55!* 8!LAF!  0! 27!100!*13!RIB!  9! 18! 66!*18!VIG!  0! 27!100!!
 4!BEZ!  0! 27!100!* 9!LAI!  4! 23! 85!*14!ROY! 11! 16! 59!*19!VEZ!  4! 23! 85!
 5!COS!  1! 26! 96!*10!NOL!  9! 18! 66!*15!CMC! 12! 15! 55!*20!CMR!  0! 27!100!

MOYENNE  : 78.35  VARIANCE  :263.83  ECART-TYPE  : 16.24



   CLASSE     PAVE  CASS:P0A07  RESULTATS COLONNES

NU!COL!ECH!REU!0/0!*NU!COL!ECH!REU!0/0!*NU!COL!ECH!REU!0/0!*NU!COL!ECH!REU!0/0!
--|---|---|---|---|*--|---|---|---|---|*--|---|---|---|---|*--|---|---|---|---|
 1!088!  0! 20!100!* 8!095!  5! 15! 75!*15!102!  0! 20!100!*22!109!  7! 13! 65!
 2!089!  0! 20!100!* 9!096!  2! 18! 90!*16!103!  0! 20!100!*23!110! 11!  9! 45!
 3!090!  0! 20!100!*10!097!  0! 20!100!*17!104!  6! 14! 70!*24!111! 10! 10! 50!
 4!091!  1! 19! 95!*11!098!  0! 20!100!*18!105!  7! 13! 65!*25!112! 12!  8! 40!
 5!092!  1! 19! 95!*12!099!  1! 19! 95!*19!106!  4! 16! 80!*26!113! 11!  9! 45!
 6!093!  3! 17! 85!*13!100!  0! 20!100!*20!107!  9! 11! 55!*27!114! 13!  7! 35!
 7!094!  3! 17! 85!*14!101!  0! 20!100!*21!108!  9! 11! 55!*

MOYENNE  : 78.70  VARIANCE  :506.91  ECART-TYPE  : 22.51



HISTOGRAMME DES ELEVES


 55  61  67  74  80  87  93  100
|---|---|---|---|---|---|---|
|BEB|CSE|   |ARM|CMD|   |BEZ|
|ROY|NOL|   |POI|DAA|   |COS|
|CMC|RIB|   |POD|LAI|   |LAF|
|TEX|   |   |   |THS|   |VIG|
|   |   |   |   |VEZ|   |CMR|


HISTOGRAMME DES QUESTIONS


 35  44  53  62  72  81  90  100
|---|---|---|---|---|---|---|
|112|110|107|104|095|093|088|
|114|111|108|105|106|094|089|
|   |113|   |109|   |   |090|
|   |   |   |   |   |   |091|
|   |   |   |   |   |   |092|
|   |   |   |   |   |   |096|
|   |   |   |   |   |   |097|
|   |   |   |   |   |   |098|
|   |   |   |   |   |   |099|
|   |   |   |   |   |   |100|
|   |   |   |   |   |   |101|
|   |   |   |   |   |   |102|
|   |   |   |   |   |   |103|
```

P0B07 6.02.1986 cm2B

```
   CLASSE     PAVE  CASS:P0B07  RESULTATS ELEVES

NU!NOM!ECH!REU!0/0!*NU!NOM!ECH!REU!0/0!*NU!NOM!ECH!REU!0/0!*NU!NOM!ECH!REU!0/0!*
--!---!---!---!---!*--!---!---!---!---!*--!---!---!---!---!*--!---!---!---!---!*
 1!BOU!  1! 26! 96!* 6!CMJ!  7! 20! 74!*11!MAC!  7! 20! 74!*16!VIA! 12! 15! 55!*
 2!CAA!  5! 22! 81!* 7!GEF!  6! 21! 77!*12!CMG!  2! 25! 92!*17!CNA!  2! 25! 92!*
 3!DEG!  3! 24! 88!* 8!GRU!  1! 26! 96!*13!SAC!  8! 19! 70!*
 4!DOS! 15! 12! 44!* 9!KAL! 25!  2!  7!*14!SPI!  3! 24! 88!*
 5!FEG! 10! 17! 62!*10!KOU!  4! 23! 85!*15!VIJ! 12! 15! 55!*

MOYENNE  : 72.71  VARIANCE  :526.85  ECART-TYPE  : 22.95
```

```
   CLASSE     PAVE  CASS:P0B07  RESULTATS COLONNES

NU!COL!ECH!REU!0/0!*NU!COL!ECH!REU!0/0!*NU!COL!ECH!REU!0/0!*NU!COL!ECH!REU!0/0!*
--!---!---!---!---!*--!---!---!---!---!*--!---!---!---!---!*--!---!---!---!---!*
 1!088!  1! 16! 94!* 8!095!  1! 16! 94!*15!102!  2! 15! 88!*22!109!  6! 11! 64!*
 2!089!  1! 16! 94!* 9!096!  1! 16! 94!*16!103!  3! 14! 82!*23!110!  8!  9! 52!*
 3!090!  1! 16! 94!*10!097!  0! 17!100!*17!104!  6! 11! 64!*24!111! 10!  7! 41!*
 4!091!  1! 16! 94!*11!098!  3! 14! 82!*18!105!  6! 11! 64!*25!112! 10!  7! 41!*
 5!092!  1! 16! 94!*12!099!  3! 14! 82!*19!106!  9!  8! 47!*26!113! 11!  6! 35!*
 6!093!  3! 14! 82!*13!100!  3! 14! 82!*20!107! 10!  7! 41!*27!114! 13!  4! 23!*
 7!094!  3! 14! 82!*14!101!  1! 16! 94!*21!108!  6! 11! 64!*

MOYENNE  : 72.89  VARIANCE  :516.34  ECART-TYPE  : 22.72
```

```
HISTOGRAMME DES ELEVES


 7  19  32  45  57  70  83  96
!---!---!---!---!---!---!---!
!KAL!   !DOS!VIJ!FEG!CAA!BOU!
!   !   !   !VIA!   !CMJ!DEG!
!   !   !   !   !   !GEF!GRU!
!   !   !   !   !   !MAC!KOU!
!   !   !   !   !   !SAC!CMG!
!   !   !   !   !   !   !SPI!
!   !   !   !   !   !   !CNA!
```

```
 HISTOGRAMME DES QUESTIONS


 23  34  45  56  67  78  89  100
 !---!---!---!---!---!---!---!
 !114!107!106!104!   !093!088!
 !   !111!110!105!   !094!089!
 !   !112!   !108!   !098!090!
 !   !113!   !109!   !099!091!
 !   !   !   !   !   !100!092!
 !   !   !   !   !   !102!095!
 !   !   !   !   !   !103!096!
 !   !   !   !   !   !   !097!
 !   !   !   !   !   !   !101!
```

Annexe IV
Résultats du Module 5

CAS de mathématiques CM2 A Juin 1984

calcul rapide (10) numération opérations (35) situation (20)
problème (10) système métrique (15) géométrie (10)

n°

																23		14		
													17	25		16	21	4		
													5	24		9	20	3		
								19	12	15	26		2	6	10	7	8	1	13	11
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

CAS de français

vocabulaire (15) grammaire (30) ponctuation (5) conjugaison (25) orthographe (25)

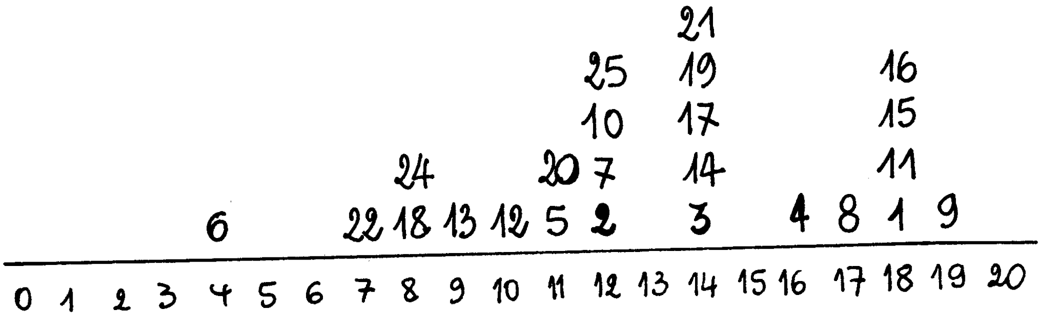
															14	24				
															8	16				
														25	7	10		13		
												12		23	6	9	21	11		
										12	19	5	20	2	1	3	17	4		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

CAS de mathēmatiques - JUIN 1984

calcul rapide(10) numēration(35) situations (sens)(20) problēme(10) CM2 B

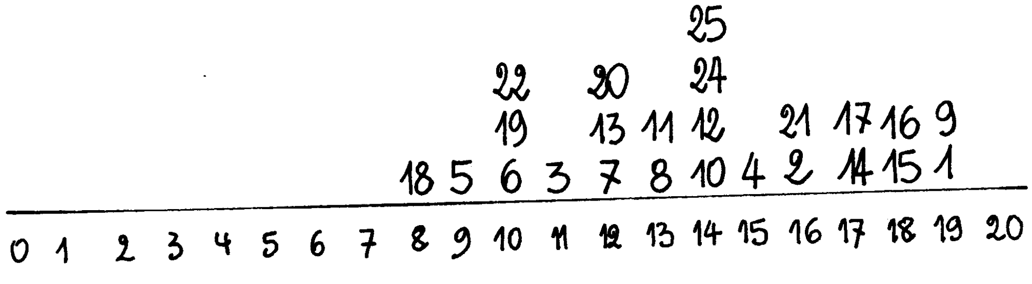
géométrie(10) systēme mētrique (15)

N° ____



CAS de français

vocabulaire(15) grammaire(30) ponctuation(5) conjugaison(25) orthographe(25)



Annexe V
Résultats du Module 5

Vendredi 31 janvier 1980

Exercice

ABrei

1) Décompose les fractions suivantes :

$$\frac{25}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

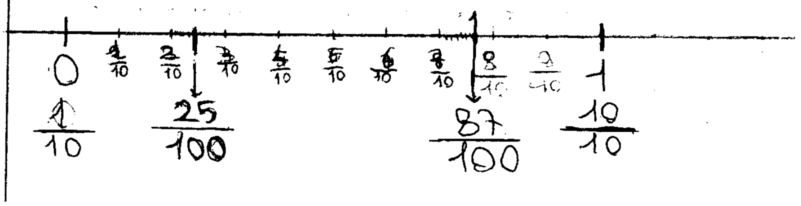
juste mais inachevé.

$$\frac{132}{100} = \frac{100}{100} + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$$

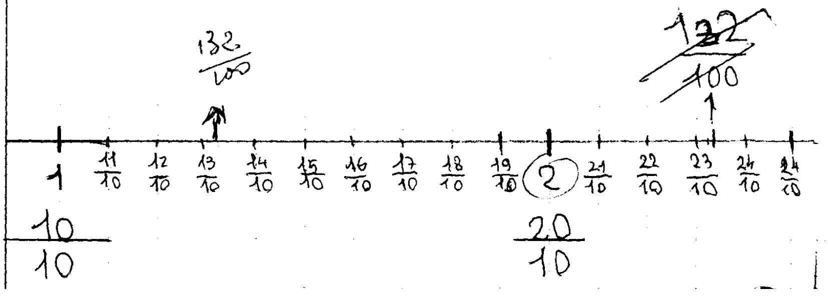
$$\frac{1}{1} + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$$

$$\frac{87}{100} = \frac{8}{10} + \frac{7}{100}$$

2) Place ces 3 fractions sur des droites



faux



ATELIER IV : ANALYSE DES CURRICULUMS ET DES PROCESSUS

Introduction : Les curriculums, Exemple introductif

Un Curriculum de Base très réduit

Considérons

- un champ de connaissances mathématiques à enseigner composé
    - d'une définition : « A est : *formulation ancienne* »
    - et de deux théorèmes : « A implique B » et « C »
- Un ensemble de comportements {manifestation qu'on connaît - ou qu'on sait -, manifestation qu'on ignore}
- Un ensemble de situations d'apprentissage {compréhension, répétition}
- Un générateur de situations didactiques {présentation, démonstration, exercices, récitation}

Supposons que l'on veuille ordonner les situations d'enseignement en fonction des situations d'apprentissage et des connaissances (Ce projet est rendu possible par le fait qu'on ne considère qu'un comportement binaire : sait, ne sait pas).

1. Il est possible d'ordonner l'ensemble des savoirs de 6 façons différentes

Si on ne considère comme moyen d'apprentissage qu'un procédé formel comme la répétition, cet ordre importe peu, puisque la compréhension n'est pas sensée intervenir. La séquence : [<1. présentation de A implique B> ; <2. présentation de C >; <3. mais qu'est ce que A ?, présentation de la définition de A >] n'est pas impensable.

Si on considère la compréhension comme un moyen d'apprentissage, les trois séquences qui placent la situation <définition de A> avant l'étude du théorème < A implique B> (et C n'importe où) paraîtront à certains les plus raisonnables : la définition de A doit précéder l'usage de A.

On obtient par exemple: [<définition de A> ; <démonstration de A implique B> ; <C>]

Mais les trois séquences qui placent l'étude de <A implique B> avant la <définition de A> sont loin d'être absurdes si elles signifient qu'on cherche un ensemble de conditions suffisantes de B qui justifie qu'on les résume et les définisse (par A).

Chacune des permutations envisagées constitue un curriculum de base ou canevas que le concepteur va augmenter, compléter et travailler.

Curriculums et canevas

Dans un processus réel, les connaissances à enseigner sont regroupées et ordonnées au cours d'études à la fois mathématiques, épistémologiques et didactiques qui produisent un canevas pour des curriculums plus précis.

Les méthodes que nous exposons ici sont illustrées par deux curriculums, celui qui correspond à l'expérience d'enseignement des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire et celui qui correspond à l'expérience d'enseignement des statistiques et des probabilités. Ils sont contemporains. Quoiqu'ils soient établis à l'aide des mêmes méthodes, leurs curriculum canevas sont profondément différents : Pour les rationnels et les décimaux, la construction axiomatique est bien apparente, bien que fort différente des curriculum classiques, car les études épistémologiques collaient à cette présentation. Au contraire, les études didactiques et épistémologiques ont conduit à une critique radicale de l'axiomatique classique de Kolmogorov et abouti à un curriculum de structure totalement différente. Du point de vue pédagogique, les courtes séances successives du « fil rouge » de l'étude aboutissant au test d'hypothèse n'ont rien à voir avec les situations a-didactiques fondamentales des rationnels ou des décimaux.

Adjonction de situations

Autour de la définition

Le curriculum canevas est ordinairement, du moins en didactique des mathématiques, une collection partiellement ordonnée d'objets de savoirs transformés en *objets d'enseignement*, par l'effet de quelques idées générales épistémologiques, didactiques et mathématiques, qui peuvent d'ailleurs être remises en questions au cours de la réalisation du curriculum. Ce curriculum canevas est ensuite repris du point de vue suivant : les situations didactiques envisagées permettront-elles aux situations d'apprentissage correspondantes de produire les comportements envisagés ?

Reprenons notre exemple introductif.
La présentation de la définition peut être une simple déclaration. Elle pourra ne prendre que le temps de l'énoncer ou de l'écrire pour le professeur et cela suffira à un étudiant autonome avancé qui saura qu'il lui faut l'« étudier » : repérer les conditions, rechercher des exemples et surtout des contre exemples pour vérifier l'utilité et la fonction de chacune de ces conditions, s'exercer à l'utiliser, à la reproduire, à la reconnaître, tout en dosant ses efforts suivant l'importance qu'il lui semble convenir d'apporter à cet objet. Après quoi il pourra affronter des problèmes où il découvrira que la connaissance de l'objet qu'il avait déduite de la présentation reçue et de sa propre méthode d'étude, était totalement insuffisante pour lui faire « maîtriser » l'objet défini (maîtrise qui sera remise en question dans le problème suivant proposé ensuite par un professeur avisé. Cet exemple précis montre qu'il peut être parfaitement suffisant d'enseigner une connaissance en se bornant à la communiquer comme une information, sans accompagnement didactique d'aucune sorte.
Avec des élèves très jeunes le professeur devra souvent – mais pas toujours- prendre à son compte une part plus ou moins importante des tâches de l'étude énumérées ci-dessus. La tradition fournit une énorme variété de techniques didactiques « universelles » c'est-à-dire indépendantes de la connaissance visée : par exemple répéter la définition, l'interroger formellement (de quoi s'agit-il ? la retourner, y supprimer des éléments et les rétablir comme dans les tests de « closure »), décrire un exemplaire de l'objet, présenter des exemples différents de l'objet défini, établir un théorème d'existence, un théorème d'unicité, etc.
Remarquons que le procédé qui consiste à présenter une relation que seul l'objet A satisfait sous forme d'un problème, s'apparente à (en fait est !) la présentation de la situation <A implique B> avant celle <définition de A >.
(Nous voyons que la distinction entre compréhension et répétition devient un peu floue mais claire quand elle s'incarne dans un curriculum).
Nous adjoignons donc à la situation <définition de A> une ou des situations réalisant certaines des nouvelles modalités issues du croisement des situations didactiques et d'apprentissage. La question essentielle devient : « quelle est l'adjonction minimale nécessaire pour obtenir les comportements souhaités ? ».
Ce problème renvoie alors à un type de questions très importantes pour la création des curriculums, mais que nous n'étudierons pas ici : quels sont les comportements souhaités ? Sont-ils compatibles avec au moins un curriculum effectif réalisable. A défaut d'obtenir toutes les connaissances souhaitées avec tous les élèves, quelle proportion d'entre eux est-il raisonnable d'exiger (ou d'accepter) etc.

Autour du théorème
Il est aussi intéressant d'examiner l'enseignement de <A implique B>. il existe un pendant à la présentation formelle. Elle consiste à obtenir, par psittacisme si nécessaire, que l'élève puisse énoncer le théorème sans erreur, charge à lui d'utiliser ce savoir à bon escient.
Nous pouvons décider que la compréhension du théorème consiste à pouvoir le reformuler en d'autres termes, à le distinguer d'un autre voisin, l'appliquer à la demande et à vérifier son application, à en donner une démonstration, à lui en trouver une autre, à l'utiliser opportunément dans une situation inattendue, à le prolonger par un corollaire, à établir son équivalence avec un autre théorème, etc. L'activité mathématique présente une variété non finie par définition de possibilités de combinaisons des connaissances qui la composent.
Il est clair que lorsqu'il s'agit d'un enseignement contractuel entre une société et les enseignants professionnels, cette décision ne peut pas être laissée à l'appréciation libre des contractants. Il est lamentable de voir comment, profitant de l'insuffisance des connaissances didactiques nécessaires, le public utilise n'importe quel de ces indices (de connaissance ou de compréhension) pour augmenter ses exigences et ses critiques à l'égard du système d'enseignement. Les conséquences de ce harcèlement sont peut être favorables à certaines institutions, y compris pour des institutions scientifiques, elles sont catastrophiques pour l'éducation.

La résolution d'une implication en situations didactiques est l'objet principal de nombreuses études de didactique. Mais dans l'exemple simplifié et théorique qui nous occupe nous pouvons nous satisfaire d'une réponse sommaire : Le sujet doit produire la démonstration de <A implique B>.
La question est alors : dans quelle situation la tâche : <démontrez ce théorème> paraît-elle réalisable par l'élève.

> Commentaire : Remarquons qu'il semble possible d'absorber la notion de situation dans celle de tâche (<démontrer ce théorème dans telles et telles conditions>) mais ce n'est pas possible si les conditions ne peuvent pas être énoncées au sujet avant le début de l'action, si elles ont un caractère historique, ou incertain etc. Ce qui est toujours le cas lors des premières productions de l'élève. Elles ne sont alors des exécutions de la tâche, au mieux, que pour le professeur. Les déterminants de la situations ont généralement pour objet d'indiquer quel parti l'élève pourra tirer du dispositif suivant son action pour trouver des raisons objectives de réaliser le but déclaré.

Nous donnerons des exemples de recherches de telles situations plus loin.

Une solution très employée consiste à répéter la question dans des conditions similaires, entrecoupées de présentations de la solution. La difficulté pour l'élève consiste plus à reconnaître des conditions analogues puis à reproduire la démonstration qu'à établir cette démonstration.

Une autre solution consiste à couper la démonstration trop complexe en lemmes successifs jusqu'à rencontrer pour chacun d'eux une situation favorable.

curriculums dérivés

Ces processus produisent donc des suites de situations qui viennent s'adjoindre aux situations initiales. Les différentes méthodes peuvent d'ailleurs se superposer et les situations de démonstration se superposer ou s'agrémenter de situations de de répétition. Nous obtenons alors un « curriculum dérivé »

Le curriculum réel pourra être d'ailleurs être constituer d'éléments des leçons par exemple qui regroupent plusieurs types de situations.

Ou bien des situations pourront reprendre plusieurs connaissances parvenues à divers stades et les progresser en même temps

1. Objet

Il s'agit

- de résoudre l'objet d'enseignement, «rationnels et décimaux» en une suite de projets didactiques (A.D),
- et indépendamment, de décrire la suite des leçons d'une réalisation effective d'un processus d'enseignement (A.A.).

Dans les deux cas, l'objet de l'analyse est

- de mettre en évidence l'articulation des réalisations ou des projets de « leçons » successifs
- et d'interroger cette articulation pour comprendre comment chaque étape prépare et permet les suivantes, leurs réussites et leurs échecs.

L'articulation concerne particulièrement

- l'évolution des δ-connaissances et des savoirs des élèves, non pas seulement ceux qui constituent les objectifs d'enseignement mais tous ceux qui interviennent dans le déroulement du processus
- les conditions de l'apparition ou de l'évolution de ces connaissances, c'est-à-dire l'évolution des situations qui servent de support aux connaissances des élèves mais aussi celles qui jouent un rôle dans la stratégie du professeur.

Il conviendra donc pour analyser un processus de concevoir les interdépendances entre les formes différentes d'un même savoir, ou de savoirs différents, ou entre des différentes sortes de situations et d'en noter les occurrences au cours de l'observation ou d'en justifier l'usage dans la conception d'un processus. Cette justification est exactement l'objet des recherches scientifiques et techniques en didactiques. Le résultat des analyses est donc un ensemble de matrices de dépendance ou de succession entre les situations, les connaissances ou les comportements, établies soit a priori soit a posteriori qui peuvent être confrontées les unes comme modèle les autres comme contingence.

Il conviendra donc au cours de nos travaux de noter les raisons invoquées au cours de la création d'un processus ou au cours de l'analyse de sa réalisation pour les soumettre à une étude indépendante.

L'analyse commence par celle de l'objet mathématique de l'enseignement projeté. Elle a pour but de l'identifier, de le définir puis de trouver et choisir les conditions de sa « définition.

Il n'est pas possible de retracer ici l'histoire des fractions et celle des décimaux mais nous nous réservons de puiser dans cette histoire trois fois millénaire les éléments et les leçons qui nous seront

nécessaires. Il en est de même pour les diverses pratiques d'enseignement relatives aux fractions différentes époques
Pour connaître cette histoire et ces pratiques il est nécessaire de se doter d'abord de l'instrument d'analyse mathématique le plus fin, le plus discriminant dont nous disposons, c'est-à-dire le plus récent. Ainsi nous – les observateurs - pourrons distinguer les fractions des rationnels, les rationnels décimaux parmi les rationnels, les rationnels scalaires et les rationnels mesure, les rationnels et leur groupe linéaire... par des définitions catégoriques, c'est-à-dire qui identifient l'objet lui-même, exactement, sans recours à des figures de rhétorique.
Nous n'allons d'abord donner le résultat de l'étude puis esquisser les raisonnements qui m'ont conduit à concevoir l'introduction des décimaux que nous étudions. Nous essaierons ensuite d'en abstraire les principes et les méthodes.

2. Structure du processus Rationnels & Décimaux

Vocabulaire de l'Analyse constructive :
Parties
Module : projet
Activités (ordre fixé mais durée variable), Suite d'activités
Processus (se rapporter au plan de l'ouvrage, document 3)

Vocabulaire de l'analyse inductive
Séquences
Séances
Phases
Note Le terme « leçon » est ambigu. Il désigne tantôt

- Un objet d'enseignement, un sujet d'étude
- Un enseignement,
- Une période réservée à un enseignement

Ces sens correspondent à des pratiques didactiques où projets et séances doivent coïncider et être déterminés à l'avance.
La didactique par les situations oblige à séparer ces deux concepts

3. Une analyse constructive sommaire de l'objet "rationnels et décimaux"

Les principes de l'ingénierie du processus

Nous avons pensé devoir enseigner différents aspects des rationnels et des décimaux de façon spécifique.
A. Décomposer vs compléter et corriger

1. Les rationnels (donc les décimaux) « s'opposent » aux nombres naturels essentiellement
   a. par leurs propriétés topologiques : les premiers réalisent un ordre dense qui promet de pouvoir attribuer une mesure à toute quantité d'une grandeur.
   b. Par leurs propriétés algébriques : tout rationnel non nul possède dans Q (mais pas dans D) un inverse pour la multiplication : toute équation linéaire a = bx (b non nul) y a une solution unique.

On peut alors choisir
- Soit de prolonger les pratiques et les concepts des entiers en minimisant ou en cachant les différences, pour « bénéficier » au mieux des apprentissages antérieurs
- Soit au contraire de créer un objet nouveau approprié à la résolution d'un problème non résolu et effectuer ensuite les comparaisons, les plongements, les « raccordements » et les synthèses utiles. Ce dernier choix tend à consacrer une genèse propre à chaque connaissance ou à chaque objet et à chaque propriété.

J'ai choisi cette deuxième solution, non pas parce qu'elle est meilleure a priori pour l'enseignement (car il faudra bien limiter l'éparpillement des apprentissages) dans mais afin de mieux étudier les conditions propres à la meilleure compréhension de chacune des connaissances visée et d'étudier ensuite, indépendamment les moyens et les raisons de regrouper et d'articuler ces apprentissages. Le principe de notre recherche était de « mettre à plat » les problèmes d'enseignement des décimaux. Il nous conduit évidemment à ne pas se soumettre *a priori* aux usages traditionnels, mais à les retrouver éventuellement comme conclusion de nos recherches en les opposants aux autres possibilités.

Il s'agit là de deux « principes d'ingénierie » (ou plutôt de phénoménotechniques) opposés que nous pourrions appeler, le premier : « principe de regroupement d'apprentissages indépendants », le second : « principe de correction progressive d'apprentissages ». En fait tout processus didactique réel doit à la fin conjuguer et violer ces des deux principes : les conséquences de l'émiettement qui résultent de la décomposition des apprentissages en petits projets indépendants sont bien connues C'est la réponse classique aux exigences sociales d'évaluation : les évaluateurs décomposent la connaissance visée en une multitude de réponses à des situations diverses, chacune devient un objectif d'enseignement indépendant, le tou est finalement écrasant et fort peu efficaces.

Il est donc indispensable de ne décomposer les connaissances qu'en des parties qui ont une signification importante pour la compréhension et l'usage de ces connaissances et de les rassembler autour d'une genèse très « cohérente », tant du point de vue de l'organisation logique que de celui de la problématique et de l'usage. Le choix de la TSM de considérer les connaissances sous l'angle de leur rôle dans des situations conduit naturellement à différencier d'abord les objets par leur nature mathématique, par leur structure et par la généralité de leurs propriétés et à associer à ces point essentiels des problèmes « fondamentaux ».

E n conclusion nous étudierons séparément les structures (naturels, rationnels et décimaux) et leurs propriétés (algébriques et topologiques)

Ces premiers principes nous conduisent à ne pas nous restreindrons aux aspects traditionnels des fractions, Nous devrons étudier l'ordre d'ensemble et la topologie des rationnels et des décimaux.

2. Les rationnels et les décimaux sont deux réponses différentes et presque indépendantes à un même problème : faire apparaître des nombres pour mesurer des quantités « continues », ce que les naturels ne font que d'une façon discrète et grossière. Les décimaux sont une catégorie de rationnels, ils peuvent *représenter* les fractions voisines dans les calculs, et ainsi remplacer les pénibles opérations sur les fractions par des calculs simples « comme » avec les naturels.

Ces remarques ouvrent une alternative

B. Commencer par la structure « la plus facile » et la plus puissante (les décimaux) ou suivre l'ordre historique et didactique classique ?

1. Il n'est pas nécessaire d'apprendre les fractions pour *apprendre* les décimaux, bien au contraire ces derniers sont compris en même temps que la numération décimale soutenue par le système décimal de mesure et permettent de résoudre tous les problèmes pratiques beaucoup plus facilement. C'est la solution qu'il convient de préconiser pour l'enseignement.
2. Mais pour *inventer et comprendre* les décimaux il est utile d'avoir à simplifier le calcul des fractions apprises précédemment. Les mathématiques sont comprises et utilisées comme un moyen de simplification et de contrôle. Compte tenu des buts de l'expérience il convient de suivre cette voie

En deuxième conclusion nous essaierons d'enseigner d'abord les rationnels pour faire découvrir ensuite l'intérêt des décimaux. Les étapes de l'étude établiront et feront évoluer les rapports entre ces trois structures : les naturels, les rationnels et les décimaux

C. Les rationnels se présentent usuellement sous la forme de fractions mais ils sont conçus dans des rôles distincts, comme des concepts mathématiquement différents.

1. Les *fractions mesures* : une unité étant déterminée, la mesure m/n d'une quantité donnée est obtenue par le partage de cette unité en n parts égales (autant qu'on veut) puis en reportant autant de parts m que nécessaire pour égaler la quantité donnée. Cette définition classique ne détermine en fait aucune solution pratique au problème de la mesure ou on ne sait pas trouver au hasard un sous multiple exact de l'unité et de la quantité à mesurer. Par contre la définition suivante est opératoire : le nombre de reports n de l'unité qui coïncident avec m reports de la quantité à mesurer détermine la mesure m/n de cette quantité avec cette unité. On peut omettre

l'écriture de l'unité si elle ne change pas. Mais la conception de cette fraction reste celle d'une valeur d'une mesure, un nombre « concret ».

2. Les fractions *applications linéaires* : (c'est la structure duale de la précédente, c'est-à-dire les automorphismes multiplicatifs de l'ensemble des fractions mesures définies précédemment). L'image de la somme de deux fractions mesures est la somme des images de ces deux mesures. Alors l'application 7/8 kg/l est l'application linéaire qui fait correspondre la valeur 8 litres à la valeur 7 kg (elle peut exprimer le poids spécifique d'un liquide, ou bien une quantité de graines - mesurée en litres- à mélanger à une quantité d'autres graines (au poids) qui se dira « 7 pour 8 ». La valeur image de l'unité 1 l est 7/8 kg. On peut omettre les unités, la « dimension » mais à condition de ne pas l'oublier
3. Les *fractions rapports* : leur usage le plus fréquent est celui de *rapport scalaire*, un nombre sans dimension (un nombre abstrait), qui exprime « le nombre (rationnel) de fois », qu'un nombre m est contenu dans un autre : n. Ces nombres m et n peuvent être eux même un naturel ou une fraction, tous les deux abstraits ou concrets (mais alors mesurés avec la même unité). La fraction peut exprimer un rapport « externe » : le nombre 8 d'un certain ensemble correspond au nombre d'un autre 7. Dans ce cas elle exprime un couple unique, sous entendu d'une fonction linéaire, et elle doit conserver les dimensions, si elles sont différentes.

Les écritures et les calcul formels de ces trois sortes d'objets mathématiques s sont les mêmes, exactement si on se restreint aux expressions numérique. Mais il est clair qu'on ne conçoit pas la somme de deux applications linéaires, ni même la somme de deux rapports, aussi facilement que la somme de deux fractions mesures. Les sous entendus ne sont pas les mêmes. Il semble donc utile d'étudier les facilités ou les difficultés de définir dans chacune des conceptions, les fractions, leurs opérations et leur topologie puis d'homogénéiser explicitement ces trois point de vue. C'est une des options principales de l'expérience.

L'enseignement traditionnel introduit les trois conceptions conjointement, de façon à les affirmer sans cesse comme « naturellement équivalentes. Mais il n'utilise en fait dans chaque exemple que la conception qui se prête le mieux à une illustration de ce qui est présenté. Et cette conception change d'un exemple à l'autre sans que le lien soit fait. L'équivalence est affirmée, elle n'est ni montrée ni justifiée de sorte qu'elle soutient la compréhension métaphorique des solutions connues sans donner de moyen efficace de contrôler l'usage des fractions dans les situations incertaines.

L'enseignement traditionnel, axé sur l'apprentissage des algorithmes à coup de répétitions et d'analogies ne favorise pas le fonctionnement normal des connaissances mathématiques comme moyen d'invention et de contrôle des décisions.

En troisième conclusion nous essaierons d'enseigner distinctement et successivement les deux premières conceptions :

Par contre les rapports resteront longtemps des rapports naturels, ou un suite de deux « rapports » naturels conçus plutôt comme deux opération successives mais distinctes. L'identification formelle de ces suites d'opérations avec des rationnels se fera après l'étude des applications linéaires. Le maniement des rapports sera familier et fondamental mais implicite.

Les grandes étapes du processus

Ces considérations permettent de dessiner déjà la structure du projet d'enseignement :

Les fractions mesures seront étudiées d'abord (chapitres 1 à 7), ensuite les fractions applications linéaires (chapitres 8 à 11), enfin, après l'étude de la composition et de la décomposition des applications linéaires les rationnels viendra l'homogénéisation consciente et justifiée des trois conceptions (chapitres 12 à 15).

1. La première traite de nombres, rationnels puis décimaux, utilisés comme **mesures de grandeurs** (longueurs, poids, capacités) dans les fonctions distinctes de mesures et de repères). Les opérations internes qui y sont définies sont l'addition et la soustraction. Les nombres naturels opèrent sur ces nombres comme sur les entiers naturels ce qui donne un sens à la multiplication et à la division des rationnels par des nombres entiers. Les naturels fonctionnent donc comme des rapports entre certains rationnels.

2. La seconde partie traite des **applications linéaires** (rationnelles puis décimales) entre des ensembles de nombres rationnels ou décimaux qui représentent des mesures (de mêmes grandeurs ou de grandeurs différentes).

L'application ¾ est celle qui fait correspondre la mesure 3 à la mesure 4. Ce peut être par exemple 4 l ou 4 personnes et 3 dag ou 3kg. La correspondance peut être Dans le chapitre introductif les applications linéaires sont représentées par des similitudes géométriques et des homothéties numériques : par exemple à toute longueur de l'objet représenté l'application qui fait correspondre une longueur 3 à une longueur 4 est l'application ¾ .

Remarque. Dans des méthodes plus anciennes les rapports entiers étaient utilisés pour définir les fractions. Les quantités étaient représentées par une matière non mesurée, mais sur laquelle des opérations de somme, de différence, de multiplication et de partage étaient supposées conçues. La fraction était le moyen d'assigner une mesure à une partie de cette matière. Elle était fractionnée en parties égales et un certain nombre de cette « nouvelle unité » étaient additionnées pour réaliser la quantité voulue. Cette définition présente des avantages mais aussi des inconvénients : les élèves ont du mal à concevoir des fractions plus grandes que l'unité car il faut replacer la totalité initiale comme unité dans une nouvelle mesure.

Ici les élèves peuvent éventuellement effectuer successivement par exemple une division par un nombre naturel (3), puis une multiplication par un nombre naturel : (5). On pourrait croire que, puisque ces deux opérations équivalent à une multiplication par un rationnel (5/3), le produit de deux fraction est facile à introduire. Ce serait une erreur car en fait cette définition se raccorderait très mal avec les fractions mesure. De sorte que ce sens de la fraction « rapport » vont rester implicites dans les deux premières parties du cours.

Dans chacune de ces conceptions, il s'agira de passer de l'usage des rationnels à celui des décimaux, pour des raisons ergonomiques claires, la compréhension issue de l'étude précédente étayant et contrôlant la facilité des écritures décimales. La définition des objets sera suivie de l'étude de leurs propriétés, de leur ordre, et des opérations faciles à concevoir dans cette structure.

3. La troisième partie explicite **l'homogénéisation** de l'ensemble des rationnels (meures ou scalaires) et de son dual (rapportes et applications linéaires). Elle est en particulier nécessaire pour permettre aux élèves de compléter l'ensemble des significations de la division des rationnels et des décimaux.

Considérer que tous ces objets introduits et connus comme différents puissent être en fait un seul et même objet sera l'objet de la dernière partie du processus. Cette conception n'aura pas été proposée aux élèves comme une réalité intangible ni même comme une évidence mais comme le résultat d'une opération particulière, une interrogation spécifique.

4. La connaissance mathématique des rationnels et des décimaux ne peut être construite uniquement comme collection de pratiques, de techniques, et de connaissances théoriques comme celles que nous avons enseignées dans ce cours. Tous les éléments ont été introduits avec une signification correcte tant du point de nue de l'adéquation aux situations que de la conformité aux définitions mathématiques actuelles, mais les élèves ne savent pas ce qu'ils connaissent. Il est nécessaire de reprendre ces connaissances comme objet d'études indépendant. Une activité mathématique de reconnaissance et de disposition des objets mathématiques – une théorie - est nécessaire. Ce rôle était tenu au dix neuvième siècle par la « théorie des rapports et proportions » ou par la théorie des fractions »

Pour achever le cours il faudrait donc un cours sur le cours. Cette conclusion du processus n'est qu'amorcée dans notre ouvrage, il devait se poursuivre au collège. Tous les objets mathématiques nécessaires étaient connus sous une forme adaptée à la dernière étape : l'institutionnalisation des définitions dans une construction mathématique des structures numériques, standard mais fortement signifiante. La transition de cette arithmétique vers l'algèbre a été en partie poursuivie jusqu'à la thèse de Dominique Broin. Elle aurait entre autre absorbé et remis à sa place la théorie des proportions, objet didactique en voie de disparition mais transitoirement utile dans une mathématique de la scolarité obligatoire.

D'un point de vue scientifique, la question de savoir si une mathématique spécifique à la scolarité obligatoire est indispensable, est tranchée à mes yeux : c'est oui. Nous avons le choix entre chercher à gérer les transpositions culturelles indispensables par l'exercice d'une science du didactique ou les laisser errer au gré des idéologies et des intérêts du moment. L'illusion qu'un bras invisible corrigera toujours notre ignorance des phénomènes didactiques et culturels a des effets dévastateurs. Après avoir été postulée dans les années 60, la volonté de nier la nécessité de cultures et d'institutions appropriées à l'enseignement « obligatoire » persiste aujourd'hui, pour toutes sortes de raisons, longtemps après le reflux de la réforme des mathématiques modernes qui en avait été l'argument principal.

3. Principes et méthode

Ainsi organiser un processus consiste

a) à *décomposer* l'objet de l'enseignement en différentes *connaissances* afin d'en retenir certaines et d'en rejeter d'autres,
b) et conjointement à *regrouper* les produits de cette décomposition et à confondre des objets suffisamment voisins,
c) puis à trouver les *situations* d'introduction ou de définition de ces connaissances
d) enfin à les ordonner de façon à satisfaire au mieux les contraintes d'une origogenèse compatible (ordonnancement des situations en fonction des questions qu'elles posent et résolvent, c'est-à-dire par des relation de causalité) pas trop éloignée d'une topogenèse compatible avec l'organisation « standard » des connaissances (ordonnancement des situations en fonction des relations « logiques » des connaissances.

a et b revient à les *définir* de façon catégorique (indépendamment de leurs conditions d'usage)
c et d revient à les définir de façon opératoire et explicative

Ce processus permet de définir les praxéologies attachées aux connaissances visées. En fait il est conçu pour permettre de construire des praxéologies didactiques transposées et adaptées. Par contre il ne me semble pas possible d'emprunter ces praxéologies directement aux pratiques mathématiques ou didactiques usuelles, ni même de les construire directement sans référence aux situations et à la genèse didactique associée.

Les questions associées à ce processus sont naturellement du genre :
Quelles raisons de choisir une décomposition d'un objet déterminé?
Quelles raisons de ne pas le faire ou de regrouper plusieurs objets dans un même projet ?
Exemple

Les modes de définition

Les deux modes principaux de définition catégorique d'une classe d'objets sont

- la définition par les propriétés caractéristiques (dite parfois « définition en **compréhension** »)
- l'énumération des éléments de cette classe (définition en **extension**[1])
- **l'ostension**

Il arrive souvent dans l'enseignement qu'il semble impossible d'utiliser aucune de ces deux définitions. Définir de façon catégorique un rationnel exige la définition d'une structure entière et énumérer effectivement un ensemble infini (toutes les fractions) n'est pas possible.

Un procédé courant consiste à présenter un élément (une fraction par exemple) en situation, d'énumérer ceux de ses caractères qui sont communs à la classe (définition descriptive) qu'on veut définir pour essayer de faire de cet élément l'élément générique de la classe visée. Ce procédé, dit de **définition descriptive**, relève de la métonymie puisqu'il définit un objet par une de ses parties. Il relève aussi de la métaphore puisqu'il repose sur une analogie et sur un détournement de signifiant (43/17 est une fraction tout « comme » 2/3 sauf que…). En fait la métaphore est dans l'intention : la fraction 2/3 devrait être aux rationnels comme 43/17 mais l'analogie est fausse pour l'élève s'il veut s'en servir de façon pratique et la chose définie par 2/3 n'est pas la même que celle définie par 43/17. Il y a détournement de signifié.

Mais cette forme de connaissance « descriptive » des objets mathématiques n'est pas sans inconvénients.

Elle se conjugue avec un autre procédé didactique qui consiste à faire coexister des définitions différentes et à les présenter comme « équivalentes » du fait de leur coprésence dans un même objet alors qu'en fait elles relèvent de traitements et de raisonnements très différents. Nous les avons

---

[1] Jean Jacques Robrieux , éléments de rhétorique et d'argumentation, Dunod, p. 98-101

identifié sous le nom d'***ostension*** et nous avons montré les inconvénients de leur abus et les limites de leur usage dans l'enseignement.

Exemple

Il est d'usage dans l'enseignement de définir les fractions, par exemple 2/3 à un moment, puis 4/6 à un autre… de façon à rester proche d'une utilisation ou apparaissent des tiers ou des sixièmes, puis de déclarer plus tard que ces deux fractions sont « égales » , qu'elles ne sont que deux aspects d'un même objet. Confondre les éléments (ici les fractions) et les classes (ici les rationnels) est une pratique très courante - et apparemment anodine - très utilisée dans l'enseignement pour introduire des objets mathématiques.

Il est fréquent de relever les malentendus, les erreurs et les difficultés qui découlent de ces formes didactiques de définition. (Exemple : Il est facile de présenter un quart de tarte, un dix-septième de tarte c'est moins sûr, quarante trois dix-septième encore moins, mais comment faire pour « mesurer » un morceau de tarte déjà là avec des fractions ?)

Cette simulation de définition est une transposition didactique classique. Elle trouve une justification dans les heuristiques utilisées par les chercheurs. Par la suite, Bernard Sarrazy a fortement tempéré nos critiques en montrant qu'une part d'ostension était universelle, inévitable et constitutive de la connaissance.

Le mode de définition envisagé dans la Théorie des situations inclut en fait une certaine ostension, mais il la place dans un processus de définition plus vaste, fondé aussi sur la définition opératoire et sur la définition explicative.

La **définition opératoire** consiste à remplacer les propriétés constitutives de l'objet par ses effets symptomatiques (Un acide est ce qui fait virer la couleur d'un révélateur au tournesol). L'objet est « ce qui sert à », ce qui produit tel effet etc.

La théorie des situations permet de ramener cette définition à la définition mathématique : au lieu de satisfaire une relation simple, l'objet est tenu de satisfaire (résoudre) un modèle mathématique de la situation.

Dans le cas des fractions, il faut trouver une situation assez générale pour rendre nécessaire l'expression d'une fraction à l'aide de nombres naturels AVANT qu'on ait eu besoin d'enseigner aucune expression de cette sorte. (Principe de non circularité d'une définition)

La **définition explicative** a pour but de faire « accéder à l'essence de l'objet à définir » [Robrieux]. C'est celle qui permettra d'accéder le plus précisément mais aussi le plus rapidement et le plus économiquement à ce qui peut distinguer l'objet de ses voisins.

A défaut de disposer de la possibilité de définir un objet à l'aide des procédés précédents, il reste la **définition conventionnelle**, qui consiste à résumer, à remplacer un objet ou une propriété déjà là par une autre. La définition déclare l'équivalence des deux signifiés. Assez souvent elle cache un détournement de sens.

Exemple : un vecteur est un segment de droite orienté.

5 - Les Dépendances dans un ensemble de situations

La programmation d'un curriculum conduit :

a) à considérer divers ensembles d'objets:
- ensembles de textes, ou de connaissances à enseigner
- ensembles de situations d'enseignement, d'exercices ou de leçons
- ensemble de comportements, de résultats
- etc.

b) à attribuer un rang à chacun de ces objets. Il fixera l'ordre dans lequel ces connaissances et ces enseignements devront être présentés ou l'ordre dans lequel ces comportements ont été observés (ordre chronologique)

L'attribution d'un rang se fait en tenant compte de certains nécessités, de certaines règles qui indiquent qu'un

c) à envisager dans ces ensembles que certaines relations « synchroniques vont devoir être traduites par des relations diachroniques dans la chronologie du curriculum envisagé : par exemple : « T1 $\Rightarrow$ T2 », relation intemporelle, peut être interprété par : « l'énoncé de T1 doit précéder ce lui de T2, qui doit lui-même précéder la démonstration de T1 $\Rightarrow$ T2. Ou bien « la définition d'un objet doit précéder son usage… » Sous entendu l'élève et/ou le professeur aura plus de difficulté si tel évènement se produit avant tel autre que l'inverse, ou tel évènement scolaire sera heureusement influencé s'il est précédé de tel autre.

Ces principes d'ordonnancement sont souvent plus ou moins arbitraires, mais ils tendent tous à établir un certain ordre partiel dans les éléments du curriculum. Certaines sont imposés ou acceptés *a priori* par le créateur du curriculum mais lors de ses recherches empiriques il essaiera de vérifier la réalité de cette influence. seront au contraire de sa part l'objet d'une recherches *a posteriori* (par exemple, il s'agira de savoir empiriquement si telle session (ou telle caractéristique d'une session), influe sur une autre (ou sur telle caractéristique d'une autre). Que l'on applique ou que l'on cherche des relations d'ordre la structure est la même.

Nous donnerons le nom très général de *dépendances* à ces relations d'ordres temporels partiels entre des évènements ou des variables scolaires.
La variable « Y dépend de la variable X » X → Y
- si X précède Y dans l'ordre chronologique
- si la réalisation de Y varie suivant les valeurs de la variable X

à envisager sur ces ensembles, en même temps, divers types de relations d'ordre dans ces ensembles: ordre axiomatique entre des théorèmes, ordre chronologique, ordre didactique.
On peut déjà distinguer le cas de l'application d'un

Nous appellerons dépendances, ou règles de dépendance
s problèmes auquel nous voulons appliquer

Considérons deux théorèmes t1 et t2 appartenant à un même exposé axiomatique d'une même théorie mathématique.

1. On peut distinguer les cas suivants :
   a) Soit la démonstration de t2 fait explicitement appel à t1,
   b) soit la démonstration de t1 fait appel à t2
   c) soit ni l'un ni l'autre

2. Considérons une définition d et un théorème t, alors
   a) Soit la démonstration de t fait explicitement appel à l'objet défini par d,
   b) soit la définition d de fait appel à t (par exemple t est un théorème d'existence, ou d'unicité)
   c) soit ni l'un ni l'autre
3. De même deux définitions d1 et d2 peuvent être telles que
   a) Soit d1 fait explicitement mention de l'objet défini par d2
   b) soit l'inverse
   c) soit ni l'un ni l'autre

5-1. Ordres et dépendances dans une théorie

a) Une même théorie peut être décrite par le moyen de textes ou de suites de formules très différents par leur formulation et par leur organisation. Mais deux suites composées du même ensemble de formules, peuvent être l'une une théorie formelle l'autre non, suivant l'ordre dans lequel ces formules sont placées.

Une théorie formelle *T* est une suite totalement ordonnée de triplets composés :
- d'un nombre indiquant le rang de l'énoncé dans la théorie,
- d'une formule vraie (un théorème ou une définition)
- et d'une référence à un axiome (ou schéma d'axiome) ou à un théorème déjà démontré justifiant la validité de la formule.

Soit O(*T*) l'ordre total original d'une Théorie bien constituée : Il détermine le rang occupé par chaque triplet de *T* (C'est un cas particulier d'ordre topogénétique).

b) Une relation de *dépendance* dans cette théorie, est une relation qui détermine un ordre partiel dans *T* . Cette relation peut porter sur les écritures ou sur leur sens des formules.
Soit D une telle relation. Nous noterons X → Y un arc de cette relation que nous lirons « Y dépend de X » ou « X domine Y ».
D est compatible avec O si tout arc satisfaisant D satisfait aussi O. Les deux ordres sont incompatibles ans le cas contraire

Considérons par exemple comme relation D, la dépendance mathématique suivante :
« la formule Y n'est vraie que si X l'est » c'est-à-dire que « X figure parmi les conditions de Y c'est-à-dire si (X ;… ; Z) ⇒ Y
Cette relation est antisymétrique : car si X ? Y et si X ⇒ Y alors Y <?> X
Si X est une des conditions de Y, Y ne peut pas être une condition de X, sauf si X ⇔ Y.
On peut convenir que si X ⇒ Y alors X doit être placé avant Y dans la théorie *T* . L'ordre de la théorie sera celui des conditions nécessaires aux suffisantes. Mais on peut aussi convenir de placer Y avant X

Il existe un grand nombre de raisons très diverses, formelles ou sémantiques d'assigner à des théorèmes ou à leurs écritures un ordre déterminé.

Si une même formule n'a pas de raison de figurer à plusieurs rang différents, elle peut entrer comme partie dans plusieurs formules distinctes de cette théorie (ou un même terme dans diverses définitions) et/ou dans plusieurs références. Chaque apparition du même énoncé est une *occurrence* différente de cet énoncé te formule la même formule.
La première occurrence d'une formule est accompagnée d'une démonstration qui prouve sa validité et elle est désignée comme « théorème » dans toutes les occurrences ultérieures où elle apparaîtrait.
Nous supposerons que parmi toute les démonstrations possibles d'un théorème une seule a été choisie et figure dans la théorie.
Dans cette théorie la relation de succession des énoncés est un ordre total. Un couple de théorèmes y détermine un *intervalle* : c'est la suite totalement ordonnée des théorèmes qui suivent l'un et précèdent l'autre.

Supposons toutes les formules exprimées sous la forme X ⇒ Y où X et Y sont des formules (Les définitions sont de la forme m ⇔ T (où T est un terme et m un mot).

Ce *rapport de dépendance* que
Cette relation exprime que certains couples (X,Y) de théorèmes doivent nécessairement se trouver placés
Considérons maintenant une autre relation d'ordre entre ces énoncés,
mais dont les arcs, compatible
compatible avec l'ordre original des théorèmes de la théorie.
Par exemple les arcs, X → Y peuvent représenter le fait que
« la formule X *figure* dans la démonstration de Y (soit comme argument explicite (X.. Z) ⇒ Y, soit comme référence ».
En fait cette relation exprime

- que X précède Y dans la théorie
- et que X est utilisé dans la démonstration de Y.

Si la théorie est axiomatique et formelle, cette relation est antisymétrique (Si X sert à établir Y, Y ne sert pas à établir X, et transitive : si X figure dans la démonstration de Y, et Y dans la démonstration de Z, alors X figure explicitement ou implicitement dans la démonstration de Z (nous interprétons cette relation comme : Dans *T* Y n'est pas vraie si X ne l'est pas, ou X est une condition de Y, X est « nécessaire » à la démonstration de Y…) et nous dirons X est un antécédent de Y dans *T*. On pourrait admettre que la relation → est réflexive c'est-à-dire que pour tout X, X → X, si on comprend l'ordre des naturels au sens large, et puisque l'implication admet X⇒X.

→ est une relation d'ordre partiel sur T, compatible avec le rang dans T.

Les antécédents d'un théorème t pour la relation → sont toutes les formules qui sont nécessaires à sa démonstration. Elles forment un arbre dont le tronc est t. Les formules qui utilisent t forment un autre arbre, qui n'a en commun avec le premier que t (il n'y a pas de cycle) du premier. Ces deux arbres sont une partie du graphe de la relation →
Les formules sans antécédents sont les axiomes de la théorie, les formules sans descendants sont ses conclusions.
Les occurrences d'une même formule forment une chaîne d'occurrences
Deux occurrences successives O_i (e) et O_{i+1}(e) d'une même formule forment un *intervalle* [e_i ;e_{i+1}]. Les formules de l'intervalle

compatible avec cet ordre total qui

Considérons E une sélection d'énoncés mathématiques : {A, B, C, … L} (vrais) extraits d'une telle théorie.

Dans E la relation Y fait explicitement appel à X (X et Y sont des théorèmes ou des définitions), définie comme plus haut, est transitive et antisymétrique. C'est une relation d'ordre réflexif partiel sur E. Nous la nommerons *relation de dépendance axiomatique* et nous la notons e1 → e2 (pour e1 précède e2, ou e2 dépend de e1) Nous admettons que pour tout e, e → e. Soit M la matrice de cette relation d'ordre.
Les énoncés qui ne font appel à aucun autre énoncé de E, sont dits *axiomes* ou *hypothèses dans E*. Les énoncés auxquels il n'est pas fait appel pour la construction d'aucun autre énoncé de E sont des *énoncés terminaux* dans E.

Une *composante connexe* Ei est un ensemble d'énoncés de E qui contient tous les ascendants et tous les descendants de chacun de ses éléments.
E se décompose en composantes connexes disjointes.

Une chaîne est une suite d'éléments de E totalement ordonnée. E étant discret et fini, toute chaîne dans E possède un premier et un dernier élément.

Les énoncés qui sont intercalés entre deux occurrences O_i (e) et O_{i+1}(e) d'une même formule seront désignés par l'*intervalle* [e_i ;e_{i+1}]

Ce sont tous, soit des définitions, soit des axiomes (ou des schémas d'axiomes), soit des hypothèses explicitement désignées comme telles, soit des théorèmes ou des suites de théorèmes constituant une démonstration. Supposons ces énoncés extraits d'un même secteur ou d'une même théorie des mathématiques et donc ordonnés en une présentation axiomatique.
E est totalement ordonnée par l'ordre total déterminé par la théorie.

Considérons maintenant, D une des relations d'ordre induites dans cet ensemble par une présentation axiomatique de ce secteur.
Cette relation satisfait les conditions suivantes :

1. X D Y ssi
2.
3. aucun énoncé n'est utilisé qui n'ait été explicitement démontré ou admis précédemment

6 – Dépendances dans les processus

6-1. Généralités

Pour élaborer des processus d'enseignement les professeurs ordonnent leurs projets d'enseignement, à tous les niveaux : les parties, les modules, les activités, les situations. Les raisons d'ordonner ces projets didactiques sont des « *dépendances didactiques* »

Exemples :
1 La dépendance logique prend en compte une relation entre deux énoncés, du genre $A \Rightarrow B$ ou encore une définition A R(C1, C2, C3,)
Elle les traduit par une relation temporelle du genre…

a) L'étude de A précède celle de B et B est recherché comme condition nécessaire de A
b) L'étude de B précède celle de A et A est cherché comme condition suffisante de B
c) L'étude de A et de B précède celle de l'implication $A \Rightarrow B$

De même le professeur peut penser que

a) pour définir A il lui faut disposer d'un moyen de décrire les conditions C1n C2n et C3, et la relation R pour définir l'objet nouveau A
b) ou bien qu'il peut étudier le rôle d'une certaine entité qui satisfait certaines conditions F avant de la définir dans le système de conditions C1, C2, C3 .

2. Une dépendance entre situations ou entre connaissances peut conduire à établir une chaîne comme par exemple

a) Une situation de rencontre du milieu de s(A) (une situation pour la connaissance A) doit précéder une situation ou A apparaît comme modèle implicite.
b) laquelle situation doit précéder une situation de formulation de A
c) la formulation précède la preuve de A (en référence à C1, C2, C3
d) la preuve précède l'institutionnalisation
e) l'institutionnalisation précède la familiarisation, l'apprentissage « formel » la « folklorisation »)

Mais il ne manque pas d'exemples où l'ordre inverse s'impose ou se choisit avec fruit.

3. Des dépendances entre des formes de connaissances : telle notion ne pourra être enseignée que si telle connaissance est suffisamment familière[2].
Ce sont donc des « théories » ou des connaissances de didactique, ou des considérations ergonomiques ou techniques qui donnent des raisons de choisir un ordre ou son inverse.

Origogenèses
Remarquons qu'il convient de distinguer l'ordre *chronologique* qui manifeste une simple succession temporelle entre deux activités, qui peuvent n'avoir aucune relation d'aucune autre sorte entre elles, et l'ordre « origogénétique » qui établit entre les deux activités une relation de dépendance justifiée par une certaine « genèse » des connaissances. La *topogenèse* est une des origogenèses possibles. L'histoire des mathématiques met à jour l'origine des problèmes et de leurs solutions qui en constitue une *genèse historique*. L'ordre des énoncés dans une *théorie mathématique* constitue une forme d'origogenèse, éventuellement différente de celle propre à une autre. La comparaison de genèses diverses fait apparaître des différences plus ou moins profondes qui peuvent être importantes pour leur usage didactique.

6 – 2 Les significations des dépendances didactiques

Les raisons que peut avoir un professeur de vouloir présenter une activité avant une autre peuvent être de plusieurs ordres :
L'ordre de la construction culturellement admise des savoirs, la topogenèse, s'impose pour des raisons culturelles et sociales : les élèves doivent se comprendre entre eux et comprendre les connaissances des générations précédentes, ce qui implique une communauté de référence assez étroite et qui limite le droit à des écarts irréductibles ou simplement importants. Les genèses didactiques ne sont permises que dans la mesure où leur résultat est une organisation topogénétique des savoirs acceptable.

---

[2] « maîtrisée » disent cavalièrement les officiers supérieurs du ministère de l'éducation.

Mais en amont de cette organisation l’enseignement gère une zone de connaissances en cours d’acquisition et de construction dont la genèse ne peut pas suivre à la lettre la règle topogénétique. Pendant cette phase la simulation de l’activité mathématique productrice des connaissances est plus importante que les savoirs eux-mêmes. C’est cette zone que l’analyse des dépendances didactiques doit explorer et éclairer.

La dépendance peut signifier que le professeur ne peut pas « enseigner » B avant A, c'est-à-dire présenter son propos même à un élève bien doué, ou que l’élève ne peut pas tirer le meilleur profit de cet enseignement. Le premier cas ne peut pas être observée autrement que dans un système ou un ordre proposé par une autorité est refusé par un enseignant.

Le second établit un rapport entre la décision d’obéir à une règle de dépendance et des évènements scolaires observables, en particulier des résultats des élèves. et de ce fait les dépendances peuvent être soumises à divers types d’études empiriques. Nous exposons ci-après une telle expérience. Des études expérimentales, sont possibles, l’hypothèse à tester étant du genre « il vaut mieux enseigne A avant B que le contraire ».

L’analyse implicative est née de ces recherches.

6 – 3 Une analyse des dépendances dans un processus

Nous avons obtenu qu’une soixantaine de professeurs de cours préparatoires enseignent dans le même ordre et à peu près de la même manière une suite d’une vingtaine de leçons et qu’ils nous communiquent au moins les pourcentages de réussites qu’ils avaient obtenus aux exercices quotidiens proposés (Ils avaient hélas refusé de communiquer les résultats de chaque élève, même anonyme !!)

Nous avions alors pour chacun des exercices une distribution des taux de réussite sur l’ensemble des classes. Cela nous a permis de dresser une matrice (triangulaire) de corrélations de vingt lignes sur vingt colonnes entre ces exercices.

Nous avions d’autre part dressé a priori une matrice de dépendance pour chaque type de dépendance envisagé

Nous avons pu alors superposer les deux matrices et nous interroger sur le caractère plus ou moins étonnant des écarts entre les corrélations sélectionnées correspondant à la dépendance envisagée, et les autres.

Il ne s’agit là que d’une des méthodes d’étude des dépendances. L’analyse implicative en a donné de nouvelles. Et les rapports avec les résultats scolaires ne sont pas les seuls indices à considérer.

6 – 4 Généralités sur les Matrices de dépendances

- Ainsi l’organisation des parties, des modules et des activités repose sur diverses hypothèses sur des « dépendances ». et nous avons vu que ces dépendances sont très diverses :

a) dépendances intra – catégorielles. Les catégories d’objets sont des connaissances (que l’on peut examiner en praxéologies, des situations mathématiques, des apprentissages, des types de situations didactiques, etc.

- entre les situations,
- entre les connaissances,
- entre les apprentissages,
- entre les possibilités d’enseignement.

b) dépendances extra - catégorielles

- entre situations et connaissances
- entre connaissances et apprentissages etc.

Elles peuvent être plus ou moins « spécifiques » ou « générales », c'est-à-dire porter sur des objets ou sur des classes d’objets

a) de même catégorie

- entre des connaissances (spécifique) ou des formes de connaissances (générales)
- entre des situations spécifiques ou des types de situations
- entre des apprentissages et des formes d’apprentissages

b) ou de catégories différentes.

-

Exemples

Les dépendances peuvent être *intra - catégorielles*
Ex. : telle connaissance doit précéder telle autre
Telle forme de connaissances (quelle qu'elle soit) doit précéder telle autre. Ex. le modèle implicite précède la formulation ou l'inverse.
(Ex. telle formulation précède ou doit précéder telle autre)
Tel type de situation doit précéder tel autre
Ou *extra – catégorielles*

2. Ces dépendances peuvent être

- spécifiques c'est-à-dire définies seulement sur des connaissances ou sur une circonstances précises dans le cadre d'une didactique déterminée,

Exemples…

- ou plus ou moins générales, c'est-à-dire indiquer des dépendances entre des formes de connaissances, des types de situations des enseignements quelles que soient les connaissances

Le repérage de ces dépendances est extrêmement complexe.

6 – 4 Les dépendances entre les formes de connaissances

L'ensemble de formes n'est qu'un exemple, celui que j'ai utilisé pour l processus d'enseignement des rationnels et des décimaux. Chaque didactique évoque un certain nombre de formes de connaissances suivant son pouvoir d'organisation et ses conceptions des apprentissages

1. Connaissance d'un milieu (implicite)
2. Connaissance implicite d'une situation caractéristique
3. modèle implicite d'action schème, théorème en acte (connaissance « contextualisée »)
4. reconnaissance explicite d'une situation et de sa solution évocable (tâche ?), pas nécessairement reproductible sans faute, ou connue dans le détail (décontextualisable)
5. Connaissance raisonnée d'une connaissances et de situations qu'elle résout
6. Connaissance familière, exécutable sûrement et « folklorisée »
7. savoir scolaire institutionnalisé (praxéologies)

Cet ensemble de formes peut être structuré par des relations de dépendance qui indiquent soit des conditions d'acquisition, soit des moyens didactiques de provoquer l'évolution d'une forme « a » d'une même connaissance C vers une autre, « b ».
Chaque relation est du type la forme « b » d'une connaissance C ne peut être apprise, ou comprise, ou formulée ou expliquée etc., si C n'a pas été *précédemment* rencontrée sous la forme « a » (apprise, comprise etc.).
Une telle relation ne peut se présenter sous la forme d'une matrice de dépendance. Mais à ma connaissance il serait illusoire de croire qu'il existe une loi générale qui fixerait une hiérarchie unique et universelle entre les formes de connaissances, quelles que soient ces connaissances. Le rôle de ces matrices est d'interroger les possibilités d'évolution des connaissances en regard des moyens déployés pour les enseigner. C'est un moyen de suggestion et de contrôle de la consistance didactique d'un processus plutôt qu'une sorte de loi des apprentissages bien que certaines dépendances aient pu être mises en évidence expérimentalement par des moyens statistiques.
Exemple :
Il apparaît qu'il est nécessaire que l'élève ait à sa disposition un modèle implicite d'action à associer à un terme nouveau qui lui est proposé. La forme la plus simple consiste à accompagner la définition de l'objet nouveau d'exemples et de contre exemples. Mais la règle n'est pas absolue.
D'ailleurs un modèle implicite qui n'est pas rapidement soutenu par une formulation et une analyse se folklorise ou disparaît.
Il semble au moins raisonnable de justifier la définition d'un nouvel objet par des activités qui en montrent la nécessité ou au moins l'intérêt. Dans les recherches scientifiques les définitions sont le fruit d'étude et d'un travail d'élucidation, elles apparaissent donc en général après la rencontre des solutions et non avant.

Les définitions de travail et les dénominations provisoires précèdent souvent le choix de la bonne expression et du bon concept. En didactique aussi, elles le peuvent, mais un usage trop intense ou trop long d'un concept transitoire, mal établi, - une formulation d'élève, heureuse peut être à un moment donné mais fausse au fond - peut rendre très difficile l'acquisition de la connaissance correcte par la suite.
Certaines matrices de dépendance sont provisoires. Elles peuvent évoluer avec le temps scolaire.

6 - 5 Dépendances dans le processus « Rationnels et Décimaux »

Lire le texte de l'article reproduit dans le livre R & D pages 445-551

7- Matrices d'ordres pour un curriculum

7-1 Curriculums et connaissances

1. Considérons un curriculum, c'est-à-dire un ensemble totalement ordonné d'unités d'enseignement. Nommons le < E, O >

a) Connaissances et unités d'enseignement
Chaque unité d'enseignement (chapitre, leçon, exercice,…) est formée d'une situation simple ou composite ou d'une étape d'une situation qui court sur plusieurs unités d'enseignement (ex. fil rouge).
Chaque unité d'enseignement met en jeu certaines connaissances.
La relation « telle connaissance est mise en jeu dans telle unité d'enseignement » peut être matérialisée par une matrice dont les colonnes représentent les unités d'enseignement et les lignes les connaissances impliquées dans ces unités. La valeur 1 dans la cellule (i,j) indique la mise en jeu de la connaissance i dans l'activité j. La valeur 0 indique que la connaissance i n'intervient pas dans l'unité j.

Cette matrice[3] permet de visualiser rapidement toutes les occurrences d'une connaissance dans le curriculum et de calculer des paramètres tels que le nombre d'apparitions total, ou avant ou après telle unité d'enseignement, ou la longueur des intervalles entre ces occurrences, leur densité etc.

b) Formes de connaissances dans un curriculum
L'effet des unités d'enseignement est de changer le statut didactique de ces connaissances. Il faut donc prendre en compte diverses formes de mise en jeu.
Par exemple
F_1 : {connaissance nouvelle, connaissance à l'étude, connaissance acquise}
La visualisation matricielle de la même relation
La relation « telle connaissance est mise en jeu sous tel de ses états, dans telle unité d'enseignement peut être matérialisée elle aussi par une matrice dont les colonnes représentent les unités d'enseignement et les lignes les connaissances impliquées sous chacune de leurs formes dans ces unités. Le nombre de lignes est multiplié par le nombre de formes considérées. La valeur 1 dans la cellule (if,j) indique la mise en jeu de la connaissance i sous la forme f, dans l'activité j.

Ainsi chaque unité d'enseignement :
- met en jeu un certain nombre de connaissances qui se trouvent dans un certain des états gérés
- en modifie l'état
- fait apparaître de nouvelles connaissances sous une des formes
- en modifie ou remplace d'autres par de nouvelles.

Nous devons donc considérer
- une liste des connaissances identifiées comme étant mises en jeu dans au moins une des unités d'enseignement
- une liste d'états possibles de ces connaissances

---

[3] C étant l'ensemble des connaissances en jeu. Cette matrice est une application de E X C dans {0, 1} Nous pouvons la désigner par R1

Voici par exemple quelques ensembles d'états d'une connaissance quelconque, gérés par des conceptions pédagogiques diverses. :
F_2 : {connaissance jamais rencontrée, connaissance acquise}
F_3 : {connaissance présentée, connaissance en cours d'apprentissage, connaissance acquise, connaissance maîtrisée}
F_4 : Connaissance

- non rencontrée
- Rencontrée,
- Utilisée implicitement,
- Identifiée et formulable
- Justifiée ou démontrée en situation
- Rattachée à, et placée dans, la topogenèse institutionnelle
- Familière

Remarquons que certains de ces ensembles d'états ne concernent que l'activité didactique (F_4, F_1), tandis que d'autres prennent en compte ses effets (F_2 et F_3). Il conviendra de décomposer ces derniers lors de l'analyse détaillée du déroulement de l'action didactique.
Exercice : Imaginer quelques premières utilisations de la matrice correspondante E X (C X F) dans {0,1}

7 - 2. Ordres dans les types de connaissances

a) Ordres entre les connaissances
Les connaissances peuvent être ordonnées suivant de nombreuses règles :

- par exemple suivant un des ordres axiomatiques de la théorie,
- ou suivant la complexité des algorithmes qui leur sont associés,
- suivant certaines classifications de connaissances (par théories, par domaines d'applications… par ex.)
- et suivant diverses stratégies de visite de ces classes : «succession entre les classes » ou « en spirale »…
- en suivant le fil d'une construction «épistémologique » ou celui d'une situation originelle pour utiliser des relations d'adéquation et d'adaptation

Ce sont autant de relations d'ordres qui structurent l'ensemble des connaissances.

b) ordres dans l'ensemble des formes de connaissances
Les formes ou les états de connaissances sont généralement conçus dans l'idée de représenter des étapes dans un plan d'apprentissage plus général, elles sont donc associées à des relations d'ordre du genre : « telle forme de connaissance doit se présenter dans le curriculum avant telle autre (quelles que soient ces connaissances) », ou encore « telle unité d'enseignement transforme tel statut en tel autre ». Les statuts de connaissances sont ordonnés au moins partiellement.

c) Ordres dans l'ensemble des connaissances sous leurs différentes formes
A priori, l'ensemble produit de C et de F peut être ordonné de façon à satisfaire à la fois l'ordre des connaissances et celui des formes de connaissances puisque ces deux ordres sont compatibles.

Dans un curriculum réel il est rare que les principes ordonnateurs généraux puissent être utilisés sans exceptions. L'aménagement précis et la nécessité de compacter les curriculums conduit à préférer parfois certaines inversions.

8 - Une étude des dépendances dans un curriculum au CP

Les parties de matrice triangulaire présentées ci-dessous sont extraites du DEA de Marie Pierre Franchi-Zanettachi (1978). Il s'agissait d'étudier certaines relations entre les réussites observées aux diverses étapes d'un apprentissage des connaissances mathématiques au cours préparatoire.

Sous la conduite de Gérard Déramecourt une trentaine de classes de Périgueux expérimentait dans les années 70- 74, un ouvrage « Le livre du CP », publié par l'IREM de Bordeaux à cette époque.
Les exercices retenus ici sont ceux qui avaient été proposés dans toutes les classes, mais les professeurs n'avaient accepté de donner que les pourcentages de réussites dans leur classe pour chaque exercice et non les réussites par individus, même codés. Nous avons ainsi recueilli un tableau des pourcentages de 30 classes sur 50 exercices (aujourd'hui disparu).
Nous avons observé que les pourcentages de réussite étaient moyennement fluctuants et moins corrélés que nous e l'espérions. Nous nous intéressons ici à la matrice des coefficients de corrélations entre les taux de réussite dans ces trente classes. C'est une variable très difficile à interpréter et très peu informative.
Exemple : la case à l'intersection de la $4^{\text{ième}}$ ligne, qui correspond au quatrième exercice intitulé C2B avec la $2^{\text{ième}}$ colonne qui correspond au deuxième exercice intitulé C1A indique un coefficient de corrélation de 0,793. Les corrélations entourées sont significatives à .05.
Une forte corrélation indique que les classes se sont rangées dans un même ordre de réussite pour les deux leçons.
Les exercices sont rangés dans l'ordre chronologique. Considérons un code d'exercice situé sur la diagonale, par exemple C2B ($4^{\text{ième}}$ ligne, $5^{\text{ième}}$ colonne). Les coefficients de sa ligne représentent les corrélations ses avec tous les exercices qui l'ont précédé, et ceux de sa colonne les corrélations avec tous ceux qui l'ont suivi.
Supposons que l'exercice porte principalement sur une connaissance.
Repérons un autre exercice qui porte principalement sur cette même connaissance. On pourrait s'attendre à ce que leurs résultats soient corrélés, surtout s'il n'y avait aucun acte d'enseignement entre les deux (comme dans un même test : les résultats resteraient bons dans les classes où ils l'étaient déjà, et les moins bons resteraient moins bons. Mais on peut évidemment penser que l'apprentissage annulera les écarts ou brouillera l'ordre des réussites.

Compléments :

Les curriculums, ordre dans un ensemble, dépendances

Résumé : Ce texte tente de préciser les propriétés mathématiques utilisées dans l'usage de ces matrices. Dans un premier temps nous rappelons le vocabulaire des ordres partiels discrets sur un ensemble fini et en particulier la construction de chaînes d'ordres partiels. Nous appliquons ensuite ce vocabulaire à l'étude de divers types de dépendances qu'il convient de considérer dans l'étude d'un curriculum : dépendance entre savoirs, entre connaissances de diverses formes, entre situations, entre connaissances et situations etc. Ensuite nous envisagerons l'application de ces principes et de ces types de dépendance à leur mise en œuvre simultanée dans la programmation des curriculums sous forme de techniques

Nous évoquerons ensuite rapidement diverses méthodes d'analyses statistiques a priori et a posteriori des dépendances en didactique
Enfin nous pouvons entreprendre l'étude des conséquences didactiques et pédagogiques des procédés classiques de programmations fondés sur des théories sommaires de l'apprentissage et de l'enseignement

1. Définitions

a) Considérons E, un ensemble fini d'objets, et une « *énumération* » O(e) de cet ensemble, c'est-à-dire une suite formée des noms de ces objets : tous les objets sont nommés dans la liste et ne le sont qu'une fois. Cette suite de mots étant ordonnée, détermine une relation *d'ordre total*[4] sur E.

Un ensemble totalement ordonné fini constitue une chaîne[5] unique; Une chaîne possède dans ce cas un *élément initial* et un *élément terminal*. L'ensemble des éléments strictement compris entre deux éléments a et b constitue *l'intervalle ouvert*]a, b[, leur nombre est la distance de a à b.

b) Un *ordre* O sur E qui n'est pas total est dit *partiel*[6]. (Il existe des couples x, y d'éléments de E qui ne sont ni xOy ni yOx. La notion d'ordre partiel est plus générale que celle d'ordre total.

Un ordre peut être représenté par un graphe, c'est-à-dire par une liste de couples tels que xOy, où x et y sont des éléments de E, et que nous lirons «Dans E, selon O, x précède y ». Le graphe lui-même peut être décrit par une matrice ou par un dessin constitué de sommets (les éléments de E) et de flèches (les couples). Le *graphe complet* d'une relation d'ordre peut être représenté par un *graphe réduit* : dans ce cas les seules flèches représentées sont celles qui joignent un élément à ses successeurs immédiats. Les flèches qui unissent un élément à ses autres descendants se déduisent de celles-ci par transitivité. Elles ne sont pas représentées dans le graphe réduit.

Nous dirons que deux ordres partiels définis sur un même ensemble sont compatibles si aucun couple du graphe de l'un n'est l'inverse d'un couple du graphe de l'autre.

Nous dirons qu'un ordre O implique l'ordre P (ou qu'il est dominé par P) si tout couple du graphe de O figure dans le graphe de P. Tout ordre partiel est dominé par un ensemble d'ordres totaux compatibles avec lui.

c) Opérations dans les ordres partiels

Soient deux relations d'ordre partiels O et P, compatibles sur E.

- La relation Q déterminée par : « xQy si et seulement si, soit xOy, soit xPy » est une relation d'ordre partiel. Cet ordre est total si O et P sont complémentaires (si pour tout couple x, y, soit xOy, soit xPy).

Q est désignée par O $\cup$ P.ou disjonction de O et P

- La relation Q' déterminée par « xQ'y si et seulement si, xOy et xPy » est la conjonction de O et de P désignée par O $\cap$ P

d) Un ensemble C d'objets, qui contient tous les antécédents et tous les descendants de chacun de ses éléments est une *composante connexe* du graphe (d'une relation d'ordre partiel). Les composantes connexes d'un graphe sont disjointes.

Chaque composante connexe possède nécessairement des éléments minimaux (qui n'ont pas d'antécédent) et des éléments maximaux (qui n'ont pas de successeurs). Un élément maximum (minimum) d'une composante connexe est un élément – s'il existe - dont tous les éléments de la composante sont des prédécesseurs (resp. successeurs).

L'ensemble des antécédents d'un élément x, un sous graphe dont le *maximum* est x. L'ensemble des successeurs de x forme un sous graphe dont le *minimum* est aussi x. Les deux sous graphes n'ont pas d'autre intersection que x et sont donc « opposés ». Attention, en général un élément x n'est pas l'unique descendant de ses antécédents.

Un élément qui n'a ni descendant ni ascendant est un *élément isolé*

---

[4] Ordre : relation antisymétrique (si x précède y alors y ne précède pas x), transitive (si x précède y, et si y précède z, alors x précède z) et on peut la considérer comme antiréflexive (x ne précède pas x). Ordre total : pour tout couple x, y, soit x précède y, soit y précède x). Il existe n ! énumérations d'un ensemble de n objets.

[5] Une chaîne discrète est une suite (a, b, c, … i) d'éléments de E tels que a<b<c<…<i. Une chaîne est maximale si aucun élément ne peut lui être ajouté.

[6] ordre partiel : relation antisymétrique et transitive, réflexive ou non, un ordre partiel n'est pas défini sur certains couples certains couples

e) Considérons maintenant un ensemble E muni d'une ordre partiel O et une de ses parties strictes A. La *trace* de O dans A est le graphe formé des couples de A (les deux éléments sont dans A) qui figurent dans le graphe de O dans E. (remarque : la réunion de la trace de O dans A avec celle de O dans E\A ne reconstitue pas en général la trace de O dans E). Deux relations d'ordres compatibles sur E le restent évidemment sur A mais l'inverse n'est pas vrai.
Considérons deux parties A et B de E munies chacune d'un ordre partiel Oa et
Ob compatibles sur l'intersection de A et de B. La réunion de A et de B peut être munie d'ordres partiels différents, néanmoins compatibles avec Oa et avec Ob, puisqu'il apparaît des couples qui ne figuraient ni dans A^2 ni dans B^2. Les ordres partiels compatibles sont très nombreux[7]

2. Les dépendances dans un ensemble de connaissances

Nous nous bornerons d'abord à étudier les connaissances mathématiques sous la forme la plus réduite, celle de théorie formelle axiomatisée.
a) Plusieurs théories formelles, différentes en particulier par l'ordre dans lequel sont énoncés les théorèmes qui les composent peuvent être mathématiquement équivalentes si tout théorème de l'une est un théorème de l'autre et réciproquement. Elles sont alors des expressions formellement différentes d'une même théorie mathématique au sens moderne. Nous étudions ici les théories aux sens ancien c'est-à-dire les suites d'énoncés explicitement ordonnées

b) Une théorie formelle T est une suite totalement ordonnée de triplets composés :

- d'un nombre indiquant le rang de la formule dans la théorie,
- d'une formule vraie (un théorème ou une définition)
- et d'une référence à un axiome (ou schéma d'axiome) ou à un théorème déjà démontré justifiant la validité de la formule.

Soit O(T) l'ordre total original dans lequel sont présentées les formules d'une théorie bien constituée : Il détermine le rang occupé par chaque triplet de T (C'est un cas particulier d'ordre topogénétique).
D'autre part, toute formule occupant un rang doit être

- soit une définition
- soit justifiée par une règle de dérivation légitime appliquée à un agencement de formules de rang inférieur (axiomes ou théorèmes)

Exemple : (rj ; B ; A (ri), A $\Rightarrow$ B (ri') avec ri et ri' < rj
C'est-à-dire au rang j, la formule B est vraie, parce qu'au rang i <j figure le théorème A et qu'au rang i' figure le théorème A $\Rightarrow$ B
Sémantiquement, dans le cas de formules propositionnelles, B(x) n'est vraie que si A l'est (si A est fausse on ne sait pas).
Nous nommons une telle relation *dépendance axiomatique*

c) Une *dépendance axiomatique*, si elle est compatible avec l'ordre originel, instaure entre les formules un *ordre partiel*. L'ordre est partiel parce que toutes les formules ne sont pas liées par une implication.
En général, la dépendance axiomatique dans un ensemble de formule ne détermine pas un ordre total. Elle ne détermine pas la place de chaque formule par rapport à toutes les autres. Remarquons qu'il en résulte qu'une même théorie peut être décrite par le moyen de textes ou de suites de formules très différents par leur formulation et par leur organisation. Mais que

---

[7] Le nombre de ces ordres partiels compatibles est 2^m avec m = cardinal [E \ A$\cup$B]

deux suites composées du même ensemble de formules, peuvent être l'une une théorie (formelle) l'autre non, suivant l'ordre dans lequel ces formules sont placées.

d) nous examinerons plus d'autres dépendances qui toutes seront des ordres partiels sur un ensemble

3. *ordres totaux compatibles avec un ordre partiel.*

a) Imbrications

Revenons maintenant à la théorie des ordres du premier paragraphe.

Il existe des ordres totaux compatibles avec un ordre strictement partiel sur un ensemble E.

E se décompose en composantes connexes (dont certaines sont peut être réduites à des éléments isolés), en dehors desquelles il n'y a pas dépendance.

Considérons une de ces composantes connexes selon D. dans cette ensemble réduit tous les éléments sont liés à au moins un autre, mais pas tous à tous les autres. L'ordre selon D dans cette composante peut donc rester partiel.

Considérons O, un des ordres totaux compatibles avec cet ordre partiel.

Il en existe. En effet, soient a et b deux éléments non comparables selon D, b peut être déclaré successeur immédiat de a selon O sans affecter l'ordre selon D (toutes choses égales par ailleurs). Le procédé appelé *imbrication* se poursuit par récurrence finie jusqu'à obtenir un ordre total. Il en existe plusieurs, puisqu'on peut préférer déclarer a successeur immédiat de b selon O'. O et O' diffèrent par au moins un couple. Donc toute composante connexe d'un ordre partiel strict peut être ordonnée selon plusieurs ordres totaux distincts.

Les ordres totaux arbitraires ainsi construits sur les diverses composantes connexes d'une même relation d'ordre partiel peuvent être eux-mêmes fondus en divers ordres totaux sur E, en ordonnant les composantes connexes (et en les permutant ou en les imbriquant par le procédés décrits ci-dessus).

d) Représentation matricielle

Un ordre partiel D sur un ensemble E est représenté par une matrice M telle que $a \in E$, $b \in E$ $M(a,b) = 1$ ssi $a < b$

Autrement dit la matrice comporte 1 dans la case intersection de la ligne a avec la colonne b si et seulement si a< b.

Les éléments de E étant rangés dans les lignes et les colonnes suivant l'ordre O le sous ensemble F des éléments de E liés par D est lui aussi rangé puisque D est compatible avec O.

Soit M_D La matrice de D extraite de M. Les matrices des ordres totaux compatibles avec l'ordre D sont obtenues en intercalant de toutes les façons possibles les colonnes déterminées par E\F entre les colonnes de M_D.

E étant rangé suivant un ordre total compatible avec D, es éléments de M peuvent être rangés dans une matrice triangulaire

La ligne « a » présente, dans l'ordre, jusqu'à la colonne « a », tous les éléments « b » qui précèdent « a », puis dans la colonne « a » et au dessous de la ligne « a », la liste des éléments « b » qui succèdent à « a ».

c) Segments libres d'un ordre partiel plongé dans un ordre total compatible

Les suites de « 0 » intercalés entre les « 1 », horizontalement ou verticalement représentent les *segments libres* arbitraires de l'ordre partiel dans E, O.

Il est possible de générer des ordres totaux compatibles avec l'ordre partiel, en modifiant à volonté la longueur de ces segments libres, par glissement ou en intercalant des colonnes ou des lignes de E\F, à la condition de ne déplacer ou de n'intercaler que des lignes entières ou des colonnes entières sans intervertir les colonnes ni les lignes de M_D. Ces opérations correspondent à l'imbrication.

4. Imbrication de deux ordres partiels.

a) *Disjonction et conjonction de deux ordre partiels*. Si deux ordres partiels sont compatibles avec le même ordre total sur E, ils sont compatibles entre eux. Inversement si deux ordres partiels D1 et D2 sur E sont compatibles entre eux il est possible de construire un ordre partiel nouveau appelé *disjonction* de D1 et de D2, en posant :

a (D1 ou D2) b ssi a D1 b ou a D2 b

En l'absence d'un ordre total déterminé, il existe divers ordres totaux compatibles avec (D1 ou D2) obtenus par les diverses imbrications possibles restantes

Les matrices correspondantes, perdent une partie de ses segments libres par rapport à MD1 et à MD2

Deux dépendances sont compatibles si leurs ordres partiels correspondant le sont. Et l'opération de *disjonction* consiste à satisfaire au oins l'une des deux dépendances.

Parallèlement, la *conjonction* de deux ordres est un ordre qui n'est satisfait que sur les couples d'objets rangés par les deux ordres en même temps

a (D1 et D2) b ssi a D1 b et a D2 b

La relation D1 $\subset$ D2 (lire D2 contient D1) ssi a D2 b $\Rightarrow$ a D1 b

Que l'on peut dire

- « D1 implique D2 » ou « D2 domine D1». Autrement dit
- si tout couple lié par D1 l'est nécessairement par D2
- ou encore si b dépend de a suivant la dépendance D1 il dépend de a suivant la dépendance D2.
- D1 est plus restrictif que D2 etc.

Ainsi la conjonction est contenue dans la disjonction (D1 et D2) $\subset$ (D1 ou D2)

(D1 et D2) $\subset$ D1 ; (D1 et D2) $\subset$ D2 ; D1 $\subset$ (D1 ou D2) ; D2 $\subset$ (D1 ou D2)

c) Tout ensemble d'ordres partiels compatibles est dominé par des n ! ordres totaux définissables sur E et comprend des chaînes d'ordres partiels compatibles.

Plus précisément dans l'ensemble D des ordres partiels compatibles définis sur E, la relation $\subset$ est une relation d'ordre partiel.

Mais D n'est pas structuré en treillis par la relation d'ordre partiel d'inclusion.

5. Ordres partiels sur une hiérarchie

Jusqu'à présent nous avons considéré un ensemble unique E d'objets à ordonner. Nous allons considérer maintenant diverses structurations ou modifications de E et leurs relations avec des ordres partiels : partition de E, plongement de E dans un ensemble F etc. Le but de cette étude est de décrire les conditions de la compatibilité de ces opérations avec les dépendances établies ou envisagées.