GUY BROUSSEAU

LES REPRESENTATIONS
ETUDE en THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Cet article rassemble des *Notes sur les représentations* écrites à l'occasion d'une rencontre avec Gérald GOLDIN, Athanasios GAGATSIS et Erik DE CORTE. Elles avaient pour objet de montrer comment la théorie des situations aborde ce concept par ses moyens propres, et elles ne faisaient donc pas encore référence aux publications antérieures sur le sujet, en particulier à l'ouvrage du groupe de travail de la commission Psychology of Mathematic Education dans deux volumes du numéro spécial de JMB édités en 1998 par GOLDIN et JANVIER. Le but était seulement de nous informer en préparation de quelques échanges sur diverses approches de l'enseignement des mathématiques qui tendent à s'ignorer. L'article, lui, ambitionne de donner le cadre théorique et un résumé des travaux de quelques didacticiens. Il serait plutôt un écho à l'article de Gisèle LEMOYNE et de Marie-Jane HAGUEL [1999] mais il fait encore que peu de place aux références. Si une confrontation devait avoir lieu, il n'en serait que le prélude. La question serait plutôt, pourquoi les différentes approches des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage sont-elles si difficiles à rapprocher entre elles ?
Je remercie très vivement Gisèle LEMOYNE pour les excellentes suggestions et les bons encouragements qu'elles m'a prodigués au fil de plusieurs relectures.

1. INTRODUCTION

Le terme de « représentation » désigne l'action de « rendre présent à nouveau » et son résultat. Son usage est très répandu dans de très nombreuses branches de l'activité humaine, avec des sens parfois très différents. Mais il est aujourd'hui un concept important de la psychologie cognitive et de la psychologie sociale, d'où il diffuse vers tous les secteurs de l'analyse des connaissances, notamment vers le secteur de l'éducation et donc vers celui de l'éducation mathématique. A première vue il semble naturel d'importer le concept de représentation du domaine de la psychologie dans celui de la didactique, ce qui explique l'absence d'études théoriques sur la légitimité de cet emprunt.
Les mathématiques sont par nature une source permanente de « représentations » de toutes sortes. A cause peut être du caractère « abstrait » et « formel » des mathématiques, ces représentations, et en particulier les représentations iconiques, intéressent beaucoup les éducateurs et les enseignants. De sorte que l'on a pu voir apparaître un certain nombre d'études sur les propriétés de diverses représentations par rapport à l'apprentissage des concepts mathématiques formels représentés. En général ces études sont accompagnées de suggestions pédagogiques. Les résultats de la mise en expérience de ces suggestions servent d'argument aussi bien pour valoriser le dispositif didactique que l'hypothèse générale du caractère bénéfique de l'usage de représentations appropriées.
Dans la plupart de ces travaux le terme « représentation » est utilisé tantôt avec un de ses sens communs, tantôt avec un de ses sens scientifiques, comme s'il était transparent. Cette importation est-elle légitime ? Est-elle sans inconvénients ? Par exemple, les sens de ce terme en mathématiques et en psychologie sont assez différents, quels risques y a-t-il à les confondre ? Avec le temps, le terme de représentation est devenu un mot - clé en didactique, un moyen de repérer et donc d'ignorer certains travaux, un drapeau pour rassembler des recherches ayant en commun cet objet d'étude, mais aussi, implicitement au moins, un vocabulaire, une position épistémologique, des hypothèses et même des méthodes de travail particulières.

L'introduction de ce concept en didactique des mathématiques aurait exigé une étude préalable. La meilleure tentative est celle présentée par VERGNAUD [1998] qui fait entrer en scène le rôle des situations[1]. Mais il passe très vite au rôle des professeurs comme metteurs en scènes de situations constructivistes, dont rien ne dit pourquoi elles seraient porteuses ou non de représentations, ces dernières simplement identifiées à des homomorphismes. Le présent article a pour objet de saisir la main ainsi tendue par la psychologie et de montrer l'aspect de la question du point de vue de la didactique.

Il est important d'établir ou de rétablir cette relation. Nous en sommes parvenus à un point où l'occultation des références à la didactique est devenue une sorte d'obligation pour les jeunes chercheurs qui publient dans les revues de psychologie et d'éducation mathématique, même lorsqu'il y a un emprunt évident et nécessaire[2]. Le jeune auteur doit alors démarquer les concepts initiaux par des termes voisins. Cette pratique a pour effet de gommer les débats et les travaux qui ont donné leur consistance et leurs limites à ces concepts et finalement d'en permettre un usage relâché, favorable à la diffusion « culturelle » mais néfaste à l'avancement de la science.

Il est vrai que ni la théorie des situations, ni la théorie anthropologique du didactique, ne font de la « représentation » un concept fondamental. Mais rien de ce qui intéresse l'enseignement des mathématiques ne leur est a priori étranger. Il s'agit donc ici, d'abord de repérer et de *définir*, dans au moins un de ces domaines, les différentes acceptions et usages du terme « représentation » en psychologie, en mathématique et en général, puis dans les situations à usage didactique. Nous examinerons ensuite un processus presque a-didactique, effectivement mis en œuvre avec des enfants de cinq ans pour leur faire construire des représentations d'objets, de collections et de propriétés. Nous entamerons ensuite l'étude des rôles des représentations dans les situations didactiques elles-mêmes.

Cet article s'appuie sur de nombreuses recherches menées entre 1979 et 2002. La plupart n'ont pas été identifiées comme des travaux sur les représentations. Elles n'ont pas été proposées comme des recherches sur les représentations et elles n'ont pas été reconnues comme telles par les chercheurs spécialisés dans ce domaine, non pas à cause de leur nature ou de leur contenu, ou de leur manque d'intérêt pour ce sujet, mais à cause des différences de présupposés théoriques et de langage. Elles se plaçaient par rapport à des questions et à priorités différentes, avec un vocabulaire différent. Mais elles montrent de façon précise, le rôle de la représentation dans la construction et l'apprentissage des mathématiques

Il ne nous sera possible que de les évoquer succinctement en annexe.

Peut être cet article contribuera-t-il malgré cela à faciliter dans l'avenir les échanges entre les groupes de chercheurs qui en ayant choisi des voies d'accès différentes, travaillent sur les mêmes objets.

---

[1] Malencontreusement, probablement par suite d'une erreur, la bibliographie de cet article commence à la lettre O et ne comporte aucune référence à la didactique ni à la théorie des situations.

[2] par exemple l'article de Ana LOBO MESQUITA « On conceptual Obstacles linked with external representation in Geometrie » JMB 17 (2) 183-195 utilise manifestement le concept d'obstacle du à Bachelard [1936], repris et modifié en didactique des mathématiques par G. Brousseau [1976, 198] sans y référer, et bien qu'une publication de ce dernier, sur le sujet traité par Ana Mesquita (géométrie) ne soit pas plus ancienne que 1995.

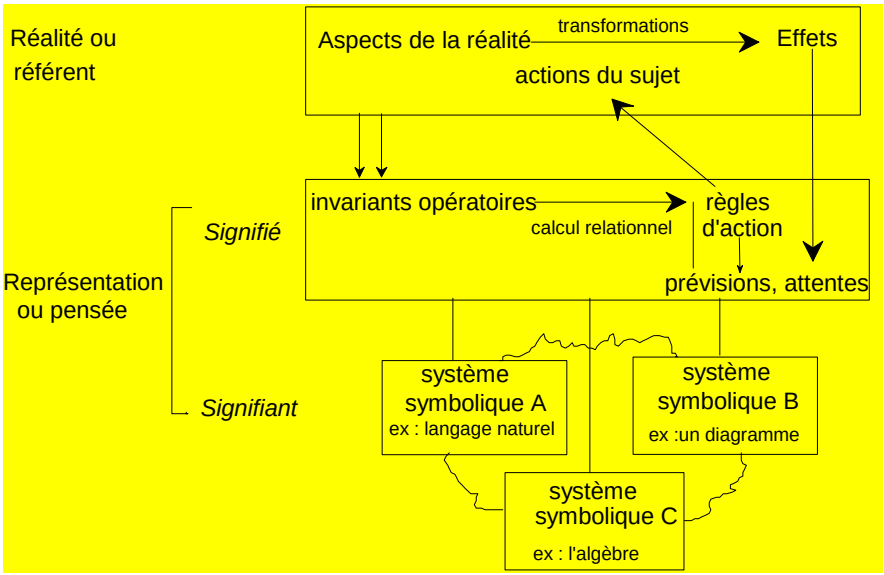
2.

3. 1. LE CONCEPT DE REPRESENTATION

La représentation en Psychologie.

Le terme « représentation » ne figure qu'accompagné d'adjectifs : la représentation mentale en sciences cognitives, la représentation sociale en psychologie sociale[3].
a) la *représentation mentale* est une « entité de nature cognitive reflétant dans le système mental d'un individu, une fraction de l'univers extérieur à ce système » [M. DENIS p.667]
Le schéma suivant, dû à VERGNAUD [1985] illustre parfaitement ce point de vue[4].

Rapports entre représentation et réel d'après G. Vergnaud (1985, 249)



b) la *représentation sociale*, est « une forme de connaissance courante dite de sens commun,… socialement élaborée…à visée pratique… et qui concourt à l'établissement d'une vision de la réalité commune à un ensemble social » [D. JODELET 1996 p. 668].
Le schéma d'ensemble est le même qu'en psychologie, sauf qu'il s'agit cette fois d'un ensemble social et non plus d'un sujet, face à une réalité plus restreinte.
On pourrait être tenté de rapprocher ce concept de celui de « connaissance », dans son sens premier, la gnosis qui naît avec l'action, ce dont on prend connaissance, que l'on apprend comme une nouvelle, par expérience, par les yeux. Dans une perspective platonicienne, les connaissances sont des représentations mentales (et sociales) de « la » réalité. Mais le concept de connaissance est lui même trop précis, trop détaillé et surtout trop contaminé par sa référence au savoir culturel, pour tenir le rôle plus général qu'on veut lui faire tenir [J.F. RICHARD 1 p.36]. La science pourrait bien être une forme de représentation de la réalité, si

---

[3] La place du concept de « représentation » en psychologie varie beaucoup d'un auteur à un autre : cf WEIL BARRAIS A. (1993), EHRLICH S. 1985, et RICHARD JF 1992

[4] G. VERGNAUD définit un concept comme un triplet de trois ensembles : **Concept = (S, I, *S*)**
S = ensemble des situations de référence qui donnent du sens au concept ; I = ensemble des invariants opératoires de différents niveaux qui sont constitutifs du concept (propriétés) ; *S* = ensemble des signifiants (systèmes symboliques) qui permettent de symboliser le concept, ses propriétés, et les situations qu'il permet de traiter.]

elle n'avait depuis longtemps rejeté les bases philosophiques et épistémologiques de la métaphore du reflet.
L'utilisation du terme « représentation » au lieu de celui de « connaissance » évite un grand inconvénient : celui d'utiliser le même terme pour désigner les connaissances attribuées au sujet et celles établies par l'humanité, au risque de les confondre ou de leur attribuer le même statut. Le terme de « connaissance » a tendance à prendre une valeur absolue. Il désigne souvent le savoir, les acquisitions cognitives de l'humanité, les connaissances « vraies », scientifiques, universelles et uniques. Dans ce sens une connaissance fausse ne serait pas une connaissance. De sorte que les sujets ne pourraient que, soit connaître, c'est à dire partager les connaissances universelles, soit ignorer, leur activité mentale ne produisant que des erreurs, des bribes erratiques. Pour postuler l'objet de son étude, la psychologie a besoin d'un terme qui laisse « en blanc » le reflet de la réalité. Il lui est donc nécessaire de reconnaître aux sujets un répertoire de possibilités qui fonctionnent dans leur activité mentale comme des connaissances et qui sont parfois différentes ou inconnues dans celles de l'humanité. Le terme « représentation » laisse une place à ces possibilités et laisse penser que le reflet devrait ressembler davantage à son modèle réel. On ne pourrait pas parler de croyances car les croyances sont structurées comme les connaissances.
La difficulté d'utiliser cette notion en didactique, vient de ce que l'enseignant travaille avec et sur les connaissances des élèves, et s'accommode comme il peut des « représentations » incontrôlées individuelles ou collectives mobilisées par ses élèves. Il ne doit donc pas assimiler, confondre les unes et les autres, alors que l'intrusion de la psychologie dans son domaine et la culture générale l'incite à le faire.

La représentation en général

Jean Ladrière donne au concept de représentation une base beaucoup plus générale car il évoque des représentants, des représentés et des correspondances (entre objets ou humains).

> « Le concept de représentation, tel qu'il est utilisé dans la théorie de la connaissance, repose sur une double métaphore, celle de la représentation théâtrale et celle de la représentation diplomatique. La première suggère l'idée de la « mise en présence » : la représentation expose devant le spectateur, sous une forme concrète, une situation signifiante, des figures évocatrices, des enchaînements d'actions exemplaires ; et elle rend ainsi présents le destin, la vie, le cours du monde, dans ce qu'ils ont de visible, mais aussi dans leurs significations invisibles. La seconde métaphore suggère l'idée de « vicariance » : la représentation est cette sorte de transfert d'attribution en vertu duquel une personne peut agir en nom et place d'une autre, servir de tenant-lieu à la personne qu'elle représente. » (Jean LADRIERE, Encyclopaedia Universalis 1995)

a) Il distingue le cas de la diplomatie où le représentant est créé et choisi dans l'univers du représenté, pour satisfaire ses besoins et exercer au loin son pouvoir, tandis qu'au contraire, dans le cas du théâtre, la représentation est créée dans et pour les besoins de l'univers du représentant, celui des spectateurs. Les *deux fonctions sont évidemment assez différentes*, et même a priori, inverses en un certain sens. Dans le premier cas, le représentant est assujetti au représenté et sert son action, alors que dans le second sa fonction est beaucoup plus symbolique, le représenté est assujetti à la satisfaction du spectateur. Evidemment dans les cas d'interactions véritables les deux univers sont impliqués dans la création et les deux fonctions sont présentes.

b) En général le représenté apparaît comme relevant d'une « réalité » imposée, déjà là : la vie pour le théâtre, celui qui a le pouvoir pour la diplomatie, tandis que *le représentant est un artefact*, une copie, quelque chose fait de main d'homme, par une libre décision. *Le représentant n'est qu'un reflet, il n'emprunte donc en général à son représenté qu'un petit*

nombre de caractères. Dans le cas du théâtre pourtant, c'est la représentation, la pièce, les acteurs qui sont réels et non pas les représentés : on n'égorge pas des acteurs Curiaces dans les coulisses. Mais la fiction l'emporte sur la réalité et inverse les rôles, le théâtre représente autre chose que ce qu'il est.

c) L'image et l'objet appartiennent en principe à des univers différents et non symétriques comme une ligne sur le mur d'une grotte et l'attitude familière d'un animal ; mais un sujet les convoque en *même temps* pour faire quelque chose, pour pouvoir, tantôt les confondre, tantôt les distinguer à son gré, et pour faire avec l'une ce qu'il désirerait faire avec l'autre alors qu'il ne le peut pas.

On peut au moins en inférer qu'en général pour définir une représentation il faudra évoquer désormais la représentation *pour quelqu'un*, de *quelque chose*, par *autre chose, dans certaines circonstances*.

La représentation en mathématiques

En mathématiques, le terme « représentation » est très utilisé, parfois formellement, mais alors presque toujours avec une spécification : représentation graphique, paramétrique, algébrique, conforme, asymptotique, linéaire[5], etc.. et plus souvent de façon informelle, par exemple dans des expressions comme « x est un représentant de la classe X ». Ces acceptions en feraient un terme métamathématique, mais sa polysémie est telle que chaque étude sérieuse lui a prudemment substitué des termes techniques. De sorte que, pour rende compte de ces usages, para-mathématiques[6], nous devons assumer une définition « originale ».
Une structure de représentation est un triplet <S, f, S'> où S et S' sont deux structures mathématiques, et où f est une correspondance (en fait un morphisme) qui associe à *tous* les composants de S : éléments x_i et relations R_j (propriétés ou opérations), certains des éléments de S' : f (x_i), f(R_j). La correspondance étant telle que

$$f[R_j (x_{i1}, x_{i2},\ldots)] = f(R_j)[f (x_{i1}), f(x_{i2}),\ldots)]. \qquad (1)$$

f (x_i), f(R_j) sont les représentants de x_1, de R etc.. et x_1 , x_2, R sont les représentés[7].

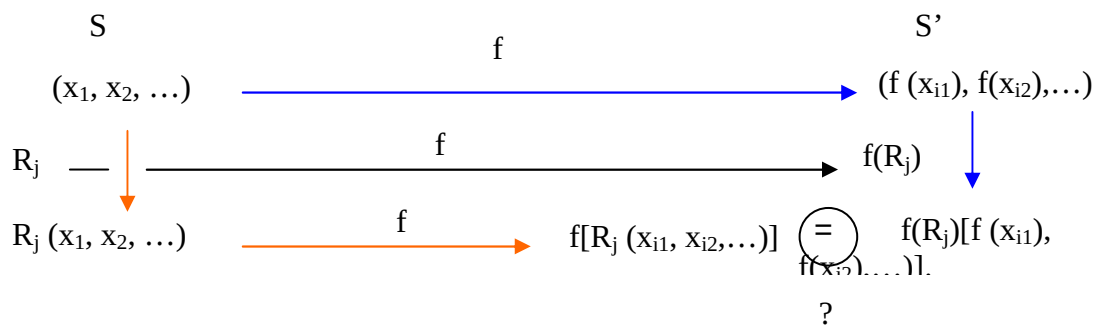
L'ensemble des objets de S' qui sont mis en correspondance avec ceux de S constitue un structure S" = fS qui peut être une sous structure de S'. S est la structure **représentée**, S" la structure **représentante** et f est la **représentation**. Par un abus de langage presque systématique on emploie souvent le terme « représentation » pour désigner aussi bien le « représentant » que la correspondance ou que la structure elles même (le triplet).

La propriété 1 est fondamentale, elle exprime une certaine commutativité : on trouve le même résultat si l'on prend l'image par f d'une certaine relation entre divers objets ou si l'on considère d'abord les images de ces divers objets et si on leur applique la relation image. Dans le cadre des mathématiques classiques, où les définitions semblent établies librement, elle peut paraître superflue. La suite montrera qu'au contraire elle joue un rôle essentiel, mais il faudra pour cela envisager les situations où on veut utiliser la représentation.

---

[5] On en trouvera un court mais excellent inventaire dans James J. KAPUT 1987 p 23-25
[6] Au sens de la théorie des situations : BROUSSEAU (1998) p. 95
[7] Définition à rapprocher de celle de BOURBAKI : « Eléments de Mathématiques, Algèbre (1956) I, §4 p. 48

Le schéma (commutatif) ci-dessous représente la propriété fondamentale d'une représentation.



SCHEMA 1

Voici deux exemples très élémentaires :

a) Le premier exemple est celui de la représentation d'une grandeur par une autre : le volume de liquide dans une réserve peut être représenté par la position d'un curseur sur une jauge. S est une partie de R+ : les mesures des volumes possibles, S' est l'ensemble des points et des segments d'une droite, S" ceux d'un segment particulier (la jauge)[8]. f associe à chaque niveau du liquide, le point de la jauge où se trouve le curseur.

Envisageons maintenant l'association de chaque point de la jauge à un nombre réel qui sera écrit sur la jauge. Il s'agit d'une nouvelle représentation dont le nouveau S, S_1 est l'ensemble des points de la jauge, et où S'_1 est une partie des réels[9]. Si la jauge est une règle graduée ordinaire, S''_1 est l'ensemble des nombres indiqués sur la jauge munis de leurs opérations arithmétiques car la fonction f_1 est linéaire : si l'index se déplace d'une distance double la différence entre les nombres indiqués est double.

Mais si la réserve n'est pas cylindrique, f n'est pas linéaire, et le déplacement de l'index n'est pas proportionnel aux variations du volume de liquide. Dans ces conditions, la composée de f suivie de f_1 est une représentation pour les valeurs, pour l'ordre, mais elle ne transporte pas les sommes, les différences ni les rapports de valeurs (elle n'est pas linéaire). Au contraire, avec une graduation directe indiquant sur la jauge les volumes de liquides, f sera une fonction linéaire, mais les différences devront être calculées et non mesurées.

b) Le second exemple est celui de la « représentation » des prédicats « par » les cercles d'Euler. Elle fit un temps le succès populaire et mondain des mathématiques modernes.

Chaque prédicat peut être représenté par un disque qui est sensé « contenir » tous les objets qui rendent vrai ce prédicat. Le cercle qui ferme le disque ne représente rien.

Du côté des représentés, avec deux prédicats A et B, les connecteurs logiques (non, et, ou…) permettent de définir seize nouveaux prédicats

Du côté des représentants, les cercles qui représentent A et B ménagent en général par intersections quatre zones élémentaires dans le plan : les objets qui réalisent à la fois A et B, ceux qui réalisent A mais pas B, ceux qui vérifient B mais pas A, ceux qui ne satisfont ni A ni

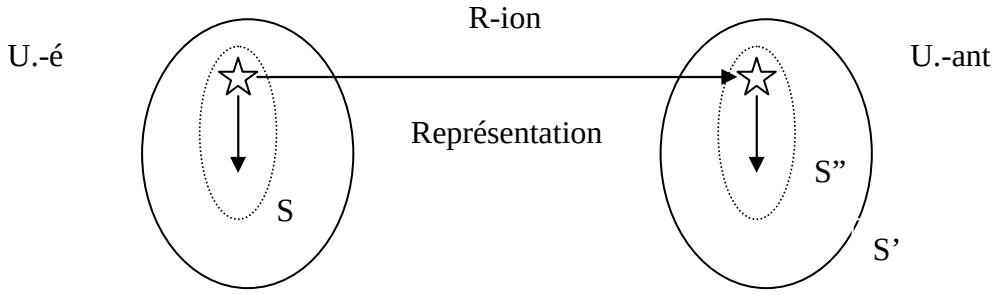
[8] S" est la structure image de S *dans* S'. Une représentation (nouvelle) de S' pourrait n'emprunter que très peu de choses à S". La composée ne transporterait alors que peu de choses de S. Le phénomène ne se produit pas avec des homorphismes puisque les opérations sont partout définies.

[9] car rien n'empêche de fixer une origine sur la jauge en un point représentant le remplissage normal

B, et par réunion de ces zones, seize zones qui correspondent aux seize prédicats. Mais deux zones seulement sont des cercles, et deux autres ne sont même pas connexes (les parties ne sont pas « ensemble »). Il faudrait donc parler plutôt de représentation par des parties de mosaïques. Avec trois prédicats la représentation se complique. Théoriquement on peut représenter ainsi par un diagramme planaire un prédicat quelconque déterminé par une fonction logique quelconque d'un nombre fini de prédicats élémentaires, mais cette représentation est inutilisable pour un humain au delà de quatre prédicats à cause de la difficulté à désigner un objet représenté. Euler n'utilisait qu'une représentation limitée pour inventorier les syllogismes.

Les enseignants qui voulurent tout de même l'utiliser sur la foi de ses propriétés mathématiques mais sans avoir étudié les propriétés didactiques de cette représentation s'enfoncèrent dans des difficultés insurmontables qui contribuèrent à l'échec de la réforme de la réforme des mathématiques modernes.

Pour la suite nous allons représenter (au sens ordinaire) le schéma 1 par le schéma 2 suivant :



U.-é : Univers du représenté U.-ant : Univers du représentant

SCHEMA 2

Certains objets et certaines relations de S' n'appartiennent pas à S" et ne sont pas des représentants de quoi que ce soit. Ce n'est pas pour autant qu'ils ne jouent aucun rôle dans l'usage qui sera fait de la représentation, comme nous le verrons plus loin. Nous dirons qu'ils appartiennent avec les représentants à l'*univers des représentants* (qui peut être S'). De même, S peut être une sous structure d'un univers qui comprend des objets et des relations qui ne sont pas représentés par f, ils formeront avec les représentés l'*univers des représentés*.

Nous ne pouvons ici qu'évoquer l'étude mathématique des représentations. La composée de deux représentations est une représentation, mais que conserve-t-elle ? Deux représentations différent par au moins l'une quelconque de leurs composantes mais pour la suite, il serait important de pouvoir classer ces différences entre les représentations, et les représentations elles mêmes : celles qui conservent certains liens de parenté : même Ré ou même Rant, celles qui sont des représentations partielles, incomplètes mais non contradictoires d'une même représentation (celles-ci jouent un rôle important dans la relation didactique),

L'exemple que nous venons de donner renforce la conclusion que nous avions tirée de l'étude du texte de LADRIERE : les représentations doivent être étudiées à travers leur usage, dans des circonstances précises par et pour des utilisateurs. Ce qui nous amènera à l'utilisation de la théorie des situations dans la prochaine partie.

Différents emplois du concept de représentation

Mais auparavant revenons à notre projet de mieux préciser les différences et les ressemblances entre les différents usages du terme « représentation ». La définition mathématique que nous venons de donner recouvre un très grand nombre de pratiques mathématiques. Par exemple l'application d'un théorème, la redéfinition d'un terme, l'identification d'une structure mathématique dans un problème, une transformation etc. relèvent de ce schéma. Certaines, en particulier dans les cas triviaux, ne seraient sûrement pas nommées « représentations ». Si on voulait simuler l'utilisation du mot par les mathématiciens il faudrait ajouter diverses spécifications, et, surtout, s'intéresser au rôle de ces représentations par apport aux intentions du mathématicien, ce qui implique l'examen des situations.

Mais, hors des mathématiques, la notion de « représentation », nous verrons plus loin pourquoi, entretient des rapports avec des sujets très variés, tels que :

- la symbolisation, la description la désignation, la détermination ou la définition d'un objet
- La modélisation d'un objet, de sa structure, de sa fonction, de sa position (texte et contexte), les différents types de morphismes,
- la détermination d'une classe d'objets, la détermination ou la définition de ses propriétés, la typologie, les rapports classe / objet, la notion d'élément générique, la généralisation d'une propriété ou d'un objet, l'application, l'exemplification, la spécification d'un objet ou d'une propriété
- La comparaison de deux objets, l'analogie,
- La traduction d'un message d'un langage dans un autre, la transcription d'un texte
- L'illustration d'un discours, la compréhension et l'explication d'un texte
- Les rapports langage / métalangage
- Les figures du discours et notamment les tropes : la métaphore, la métonymie, l'analogie et même l'argumentation inductive
- L'usage de divers procédés heuristiques

Dans certaines des utilisations, les éléments de la représentation mathématique sont absents ou seulement ébauchés ou évoqués, en psychologie par exemple comme nous l'avons fait remarquer. Il serait possible de classer les représentations en fonction des éléments du modèle qu'elles abandonnent. Mais leur fonction est souvent plus claire.

En conclusion de cette première étude il faut bien remarquer qu'il ne s'agit plus maintenant pour nous de chercher à déterminer quel genre de reflet la réalité produit dans la tête des élèves, que cette réalité soit naturelle ou organisée et mise en scène à des fins didactiques. Ni même de déterminer quel genre d'organisation de la réalité pourrait produire les reflets les plus justes ou les plus utiles. Clairement la problématique didactique se distingue ici de la problématique psychologique.

Il s'agit d'étudier la ***mise en œuvre*** ou les ***tentatives*** de représentations effectives, par des institutions ou par des sujets, qu'ils soient mathématiciens ou non, élèves ou professeurs. C'est-à-dire de décrire et de justifier l'usage d'un univers représenté, d'un univers représentant et d'une représentation objective (i.e. dont les éléments et les correspondances sont identifiables, observables) satisfaisant la propriété fondamentale. Il s'agit d'étudier les propriétés des situations qui rendent ces représentations utiles, utilisables, susceptibles d'être apprises, et de comparer l'utilité de chaque représentation ainsi déterminée dans la genèse des connaissances.

Certes de nombreuses études ont été publiées sur ce sujet[10] et nous serons conduits à les revisiter ***après*** cette étude, avec un esprit et des instruments nouveaux. Par exemple il faut se donner le moyen de décrire et de distinguer l'usage de représentations qui sont conformes à notre définition, et les tentatives de représentations déployées en situation incertaine par un sujet au cours d'une activité mathématiques réelle. Le rabattement de l'activité et de ses motifs sur les connaissances ou sur les représentations et l'effacement des évolutions de la situation pourrait faire apparaître ces tentatives comme des erreurs alors qu'elles sont des étapes dans un processus dialectique.
A mon avis il y a peu d'espoir de trouver des vertus didactiques communes à toutes les représentations concrètes, ni même à toutes les représentations iconiques, ou graphiques etc. Par contre la représentation est un procédé si important, si fréquemment employé, si constamment présent dans toutes les activités mathématiques, et cognitives et il est si utilisé, bien ou mal dans l'enseignement qu'il est très important de l'étudier de façon scientifique et de soutenir ainsi l'intérêt de nombreux éducateurs pour ce sujet.

2. LES SITUATIONS MATHEMATIQUES DE REPRESENTATION

La méthode d'étude propre à la théorie des situations didactiques en mathématiques

Un objet mathématique étant déterminé par une de ses définitions classiques, il s'agit de concevoir un ensemble de conditions qui fasse qu'un sujet doive nécessairement utiliser cet objet comme moyen pour obtenir un certain résultat.
Ces conditions ne sont pas a priori indépendantes les unes des autres, ni indépendantes de l'objet ainsi défini. Elles seront modélisées par un ou des systèmes mathématiques appelés « situations » et formellement structurées comme des « jeux » mathématiques.
Un objet mathématique sera donc défini par sa fonction dans au moins un tel jeu.
Une situation détermine les enjeux et les possibilités de décision d'un actant dans un certain milieu. Elle est choisie de telle manière que la stratégie de résolution ne puisse être mise en œuvre que grâce une certaine connaissance mathématique, l'apparition de cette décision sans la connaissance étant hautement improbable. La méthode qui consiste à définir un objet mathématique par un ensemble de relations qu'il est seul à satisfaire est classique. La seule différence ici est que l'ensemble des relations est un « jeu ». La détermination d'une connaissance mathématique par un problème dont cette connaissance est la solution est un procédé aussi ancien que les mathématiques. La TSDM est simplement une théorisation de ce procédé. Il existe de nombreuses situations relatives à une même connaissance. De même, de nombreuses connaissances peuvent intervenir dans une décision unique. Un des objets de la théorie des situations didactiques en mathématiques (T.S.D.M) est de classer les situations et par conséquent les connaissances en fonction de leurs rapports et des possibilités d'apprentissage et d'enseignement qu'elles offrent.
La méthode de définition des objets mathématiques par leur fonction peut être étendue à tous les objets non primitifs et non mathématiques de la TSDM. Ainsi nous allons essayer de déterminer par cette méthode l'objet « représentation » : quelles sont les situations qui exigent une représentation (et seulement une représentation) ?
Mais au lieu de donner d'emblée une définition « générale » du concept, puis de montrer ses différentes spécifications, nous devons au contraire utiliser la méthode ascendante et progressive, classique en TSDM : des situations les plus simples aux plus complexes[11].

---

[10] Principalement les ouvrages figurant dans la bibliographie
[11] Méthode exposée par G. BROUSSEAU [1990]et perfectionnée par C. MARGOLINAS 1998

Elle consiste, dans un premier temps, à ne considérer que les acceptions mathématiques du terme, sans évoquer le sujet qui les utilise (connaissance objective). C'est ce qu nous avons fait dans la partie précédente à propos de la représentation. Dans un second temps, nous devons étudier les situations caractéristiques associées à ces acceptions :

- où la représentation joue-t-elle un rôle dans l'action et dans l'apprentissage d'un sujet « isolé » (et nous utiliserons une TSM théorie des situations mathématiques non didactiques)
- où est elle nécessaire comme moyen de formulation ou de communication
- quel rôle joue-t-elle dans la genèse des systèmes de validation –culturels logiques et mathématiques

Ce n'est que dans un troisième temps que nous « plongerons » ces situations dans des situations « didactiques », situations beaucoup plus complexes où il apparaît de nouvelles fonctions de la représentation.

Les situations objectives de représentation.

Considérons un milieu M (un dispositif) et un actant A, lié à ce milieu par des possibilités d'action et des objectifs modélisés par une situation Σ. Et considérons le sujet O qui observe l'activité de A (nous nous identifions à O) sur M dans les conditions Σ. Ce milieu est dit objectif pour A dans la mesure où il ne remet pas en cause ce qu'il en perçoit - la situation pourrait être fictive, mais tenue pour réalisable et bien connue par A -. Supposons que O, théoriquement muni de toutes les connaissances du moment, identifie dans M tous les éléments d'une représentation formelle. Cette « représentation » fait partie du milieu objectif de A, mais il peut la voir ou non, s'en occuper ou non, suivant Σ. Sa présence pour O, n'entraîne pas qu'elle joue un rôle quelconque dans la solution théorique de Σ ou dans celle, effective, qu'en donne A. Si Σ est tel que A doive nécessairement utiliser la représentation R pour résoudre le problème que lui pose Σ, nous dirons que Σ est une situation objective de représentation.

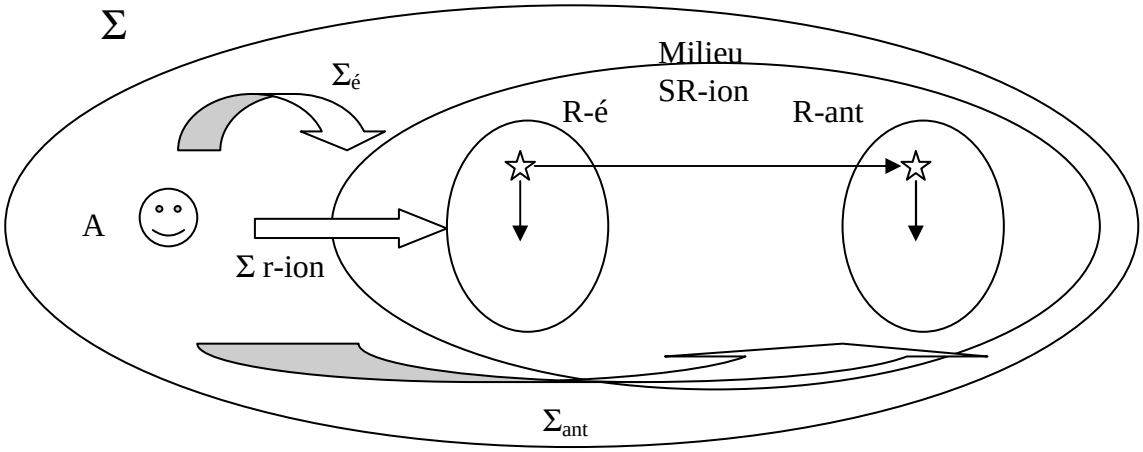
Remarquons qu'il ne suffit pas de mettre en présence un milieu objectif caractéristique d'une connaissance avec un sujet pour obtenir une situation objective relative à cette connaissance. Il faut qu'une situation rende obligatoire l'usage de cette connaissance par l'actant.

Une situation objective de représentation est donc déterminée par le 7-uplet < Σ, A, S, f, S', U-é, U-ant>. Nous dirons en abrégé que *« f est la représentation que A fait de S dans la situation Σ »* et nous le représenterons par le schéma 3[12].

Les univers peuvent être des milieux au sens large de branches ou de cadres mathématiques. Régine DOUADY [1986] a montré que des cadres mathématiques offraient des opportunités de fabriquer des représentations : du cadre géométrique au cadre arithmétique, algébrique, ou graphique. Les jeux de cadres sont ainsi des générateurs de représentations, aussi précieux pour la compréhension et l'apprentissage que pour la recherche.

Le schéma 2 illustrait les déterminants du milieu cette situation *telle qu'elle apparaît à A ou à l'observateur O extérieur à A.* Le schéma 3 montre la position de A par rapport à ce milieu. Les flèches doubles montrent les situations composantes : $\Sigma_{é}$ la situation représentée (son rapport à R-é), Σ_{ant}:la situation représentante, $\Sigma_{r\text{-}ion}$ la situation de représentation). Le sujet ne voit a priori qu'un seul milieu et c'est lui qui doit y distinguer un R-é, un R-ant et une R-ion pour ses besoins dans Σ. Nous avons à déterminer lesquels.

[12] Nous ne donnerons pas la formalisation mathématique correspondante, trop complexe et sans intérêt ici.



SCHEMA 3

A peut mettre en œuvre une « représentation » qui lui est familière et l'utiliser directement, mais souvent, il devra n'effectuer que des « tentatives de représentations », a ses risques et périls, en particulier au cours d'une action non algorithmique.
Dans les meilleurs des cas les univers U-é et U-ant peuvent être matériellement suffisamment distincts. Alors les rapports Σé de A avec U-é, et Σant, de A avec U-ant peuvent être identifiés comme des situations distinctes, au point parfois que seule SR-ion est problématique. Tous les cas sont possibles.
Mais nous n'avons pas encore évoqué les raisons qui rendent nécessaire la séparation puis la mise en correspondance des situations Σé et Σant.
Pour que l'utilisation de Σant soit nécessaire, il faut que A ne puisse réaliser un certain projet dans Σé, - que ce soit pour des raisons matérielles, logiques ou ergonomiques, mais qu'il envisage de faire dans Σant une action qu'il pourra ensuite transporter dans Σé, où elle réalisera le projet initial.
Prenons en exemple la célèbre expérience du singe de W. KOEHLER placé devant une banane qu'il convoite mais qu'il ne peut atteindre : c'est la situation Σé. Mais le milieu comprend non loin deux cannes qui mises bout à bout permettraient d'atteindre la banane. Le singe a déjà joué avec ces cannes il peut envisager de les adapter, ce jeu constitue Σant. La représentation réside dans la mise en correspondance de la distance à la banane dans Ré avec celle des cannes dans Rant et l'anticipation de ce que la somme des longueurs des cannes dans Σant peut excéder la distance à la banane dans Σé. Remarquons que c'est la propriété fondamentale qui permet de ramener avec succès le résultat de l'opération de Σant dans Σé.
Une représentation est donc l'utilisation d'un univers représentant, pour y accomplir une action a priori directement impossible dans un univers représenté, afin de pouvoir par la suite ramener dans ce dernier le résultat de cette action.

Premières conséquences

a) L'analyse de la notion de représentation à l'aide de la théorie des situations met en évidence un fait dont l'importance n'est pas toujours reconnue : L'accent est surtout mis sur les objets <S, f, S'> qui entrent dans la définition d'une représentation particulière. Les objets qui ne sont pas mis en correspondance semblent ne jouer aucun rôle. Nous venons de montrer que dans une représentation, **le rôle des dissemblances entre les deux**

univers est aussi important que celui de leurs ressemblances. Cette condition a tendance à être un peu sous évaluée dans les études qui ne font pas appel à la théorie des situations (comme dans le bon article [Brian GREER et Guershon HAREL] 5-24 1998)

PIAGET et FREUD ont apporté des éclaircissements substantiels à ce sujet. Ainsi, LACAN, en commentant le jeu du « fort da » montre bien que l'enfant reproduit la situation réelle dans laquelle il n'est pas le maître des apparitions et des disparitions de sa mère, par une situation où lui même peut provoquer les apparitions et les disparitions d'une bobine. *Une situation est représentée par une autre*, semblable mais différente par la place et par le pouvoir de l'actant. La seconde équilibre l'angoisse provoquée par la première, et en constitue le sens… mais en aucun cas cette bobine isolée de son contexte ne représente la mère absente. Cet exemple montre la proximité de la notion de représentation avec celle de sens. Pour LACAN, la chaîne du sens est ouverte car la représentation - le jeu de la bobine - perd vite son pouvoir d'équilibrer les frustrations dues aux disparitions incontrôlables de la mère. Lorsque l'enfant n'y voit plus qu'un effet banal de ses actions, le symbole s'écroule, ou plus précisément, l'échec de la représentation doit être à son tour équilibré par la création d'un nouveau symbole…

b) Naturellement les types fondamentaux de situations non didactiques déterminent des fonctions différentes des représentations. Dans les *situations d'action*, la décision peut être fondée ou non sur la reconnaissance explicite ou implicite d'une représentation (objective). Remarquons que ce que les psychologues appelleraient « représentation » du milieu est, dans la TS, une collection de modèles implicites d'action associés aux diverses situations d'action concernant ce milieu. Ces modèles implicites ne comprennent peut être aucune représentation objective, ils sont une forme de représentation mentale. Ceci montre bien la différence de point de vue
c) Mais dans les *situations de formulation* ou de communication, et par conséquent dans *les situations de validation* explicite, l'usage d'une représentation, linguistique ou iconique est obligatoire. L'essentiel des exemples d'utilisation des représentations dans les classes rapportés dans la littérature didactique relève de ce type de situations, que les interlocuteurs soient effectifs ou fictifs, qu'ils soient des élèves seuls ou en groupes, ou les professeurs. L'exemple que nous commenterons plus loin relève de ce type de situations. Nous n'insistons donc pas sur ce point qui nous entraînerait à regarder plus précisément les possibilités des langues et répertoires pour construire et générer des représentations.
d) Avant d'avancer dans l'étude de la représentation, il est nécessaire de rappeler que l'observateur (ou le chercheur) fait partie du système et que son action peut se modéliser avec les mêmes moyens. Supposons que l'observateur O recueille des indices que l'actant A utilise bien certains objets et certaines relations comme des représentants d'autres, et que ce dernier s'attend à ce que le résultat soit celui que devrait donner la représentation, si elle était objectivement correcte. Et supposons que cette représentation soit impropre, c'est à dire qu'elle ne satisfait pas la relation fondamentale. Objectivement – et notamment pour un observateur mathématicien-, la correspondance utilisée par A n'est pas alors une représentation. Nous parlerons d'une tentative de représentation. Mais le sujet l'utilise comme une représentation et pour lui, si la situation ne lui donne pas des raisons et des moyens de renoncer à son interprétation, il la conservera. Ce point illustre l'importance de rapporter les éléments de l'analyse à leurs situations d'utilisation.
e) Le didacticien construit des « modèles implicites» des représentations impropres dont il observe ou peut observer les effets, il s'en sert pour prévoir et expliquer la distribution des réponses d'une population, il cherche à expliquer sa présence etc. comme le ferait un psychologue. Dans la mesure où ces modèles implicites expliquent des décisions par des « croyances », ils jouent le jeu d'énoncés qu'il est commode d'appeler « connaissances du

sujet » étant entendu que ces connaissances peuvent être justes ou fausses et distinctes ou non des connaissances d'autres sujets, d'autres institutions et en particulier des connaissances scientifiques. Rien dans cette option n'empêche d'utiliser les résultats de psychologie.

Mais l'essentiel est de montrer le rôle, la fonction de ces connaissances dans la gestion et l'évolution des situations. Il est important de noter que la modélisation en termes de situation facilite l'indispensable distinction entre les diverses assignations des «connaissances » à un sujet (élève, professeur, observateur, institution savante etc.) et leur statut[13].

Les situations objectives de représentation en mathématiques

Nous n'étudions pour l'instant que des conditions internes au système du schéma 3. La fonction de la représentation ne doit répondre qu'à des besoins du sujet pour son action. Par exemple, s'il avait recours à une représentation pour « illustrer » son propos, lui donnant ainsi une fonction poétique, cela relèverait d'un système de communication, plus complexe.

a) A quoi une représentation peut elle servir en mathématiques ? Un actant engagé dans une situation Σ_1 et qui peut la résoudre n'a pas besoin à priori de chercher à lui en adjoindre une autre. C'est donc dans la mesure où Σ_1 ne peut pas être résolu facilement que l'actant va chercher à construire une *autre situation* Σ_2, dans laquelle il pourra transporter une partie S de Σ_1 avec l'espoir que dans Σ_2 *une solution lui apparaîtra* et qu'*il pourra la rapatrier* dans Σ_1.

i) Il faut remarquer que l'actant ne peut pas nécessairement identifier exactement la structure S, c'est pourquoi c'est une situation qu'il recrée et non pas seulement une structure,

ii) de plus ce dont il a besoin est quelque chose qui ne se trouve pas immédiatement dans Σ_1, les différences entre Σ_1 et Σ_2 sont aussi importantes que les ressemblances,

iii) il est nécessaire de pouvoir utiliser une représentation inverse, (pas nécessairement l'inverse de la première)

Il y a de nombreux exemples où un objet nouveau est « construit » grâce à une représentation. A tout nombre rationnel, Dedekind fait correspondre une coupure, c'est à dire une partition de l'ensemble Q, à l'aide de quoi il prouve l'existence des irrationnels, et définit la structure de R (P. ALSON reprend cet exemple dans sa thèse et en dérive le concept de « description » qui mériterait ici beaucoup plus qu'une simple allusion).

b) Il peut arriver que dans la recherche, le jeu des représentations ne soit pas utilisé dans un point de vue aussi strict, et que seules les questions transportées d'une situation dans une autre soient utilisées.

c) Il arrive aussi que la représentation soit déjà reconnue est qu'elle soit utilisée pour diverses raisons. Nous n'en évoquons ci-après que deux :

- la première pour des raisons d'économie : les objets pertinents pour la résolution sont plus faciles à manier, plus familiers, dans U-ant que dans U-é . Par exemple les représentations iconiques permettent de traiter presque simultanément un nombre d'objets plus important, pour peu que les traitements correspondent à des relations spatiales. Ainsi la représentation des quantités par des longueurs de segment permet de

[13] Les descriptions des situations, des stratégies de l'actant, et celles de ses connaissances empruntent souvent les mêmes systèmes de représentation par exemple des graphes, ce qui facilite les méprises. Newell et Simon décrivent la résolution d'un problème à l'aide un graphe dont les sommets représentent les états possibles du système et les arcs les transformations permettant de passer d'un état à un autre, La solution du problème est un des chemins possible reliant le sommet initial au sommet final. Les sommets sont des états de la situations ou les connaissances du sujet ?

passer subrepticement d'un problème d'arithmétique à une résolution algébrique, du moins pour les élèves qui acceptent de représenter des quantités inconnues par un segment de longueur déterminée (BROIN Dominique 2002). Autres exemples, la représentation des sommes de fractions par des sommes de décimaux, ou celle des produits de nombres par les sommes de leurs logarithmes…

- la seconde pour effectuer une comparaison : le sujet doit comparer deux objets (deux longueurs, deux expressions algébriques…), soit pour remplacer l'un par l'autre, soit pour toute autre raison. La situation détermine explicitement ou implicitement les conditions, la relation d'ordre ou les conditions d'équivalence, mais le sujet doit plonger les deux objets dans un même univers ou représenter l'un dans l'univers de l'autre. Derrière toute comparaison il y a une représentation.

Ces exemples absorbent la plus grande partie des représentations utilisées dans les mathématiques scolaires.

d) La classification des situations objectives de représentation suit naturellement celle proposée par la T.S.M, dont les modèles génèrent un grand nombre de situations particulières.

- Dans les exemples évoqués ci-dessus, il n'y a qu'un seul actant, sujet ou institution engagé dans des situations d'action. Ces situations conduisent à : inventer une représentation, utiliser la représentation déjà-là pour trouver un objet, pour traduire une relation etc.
- Dans les situations de formulation, il y a deux actants. Il s'agit pour eux d'utiliser une représentation dans une communication, de décrire la représentation, de traduire d'un langage dans l'autre etc. Entre de nombreux autres exemples, on peut signaler l'ostension : un sujet montre à son interlocuteur un objet pour évoquer une classe d'objets : un arbre représente la forêt, ou une essence particulière… La réduction des ambiguïtés liées à la représentation tient une place importante dans les communications.
- Dans les situations de preuve, la représentation joue un rôle rhétorique, dans un débat entre deux actants. La discussion de la valeur de preuve d'une représentation est toujours délicate comme le montre [LAKATOS 1984] dans un des meilleurs exemples de situation de « preuve » que je connaisse.
- Dans les situations d'institutionnalisation aussi les représentations jouent un rôle important comme références s'y référer ou la référencer) etc.

Un exposé exhaustif de ces différents usages sort du cadre de cet article, mais nous en donnerons plusieurs exemples détaillés dans la suite.

Les situations d'invention ou d'apprentissage de la représentation dans l'action

Nous suivons toujours l'ordre ascendant de la complexité des situations de BROUSSEAU MARGOLINAS (1998). Le sujet (en fait l'actant dans la terminologie actuelle, ce peut être un sujet ou une institution et il se contente de « jouer le jeu rationnel et économique ») se trouve en présence d'un échec dans une situation objective dont il pressent qu'elle se reproduira souvent ou qu'elle est importante. Il doit changer ses stratégies de résolution et adapter les connaissances qui leur sont associées.

L'exemple des décimaux révèle une difficulté : il n'y a pas de correspondant décimal pour toutes les fractions. On ne peut pas trouver l'inverse de tous les naturels dans les décimaux. La solution a été trouvée par des méthodes qui illustrent la deuxième fonction des représentations : suppléer à une impossibilité.

Considérons les décimaux et les rationnels (suivant la définition ci-dessus, D ne peut être que S et Q ne peut être que S' puisque $D \subset Q$). Les rationnels représentent les décimaux. La représentation transporte la somme, la différence, le produit de deux décimaux de D dans Q. Mais le quotient défini dans Q n'a pas de correspondant dans D. Cependant la représentation

transporte aussi l'ordre et la topologie : Tout élément de S' (de Q) peut être approché d'aussi près qu'on veut par des éléments de S", c'est à dire de S (de D).

Cette propriété permet définir une nouvelle représentation R^{-1}, inverse de la première, de Q par D, telle qu'un quotient non décimal (dans Q) sera représenté dans D par toutes les suites de décimaux qui « convergent vers lui et en particulier par la suite canonique (décimaux à n décimales). Cette nouvelle représentation de Q par D permet de rapatrier dans le représentant initial un objet du représenté qu'il ne possédait pas précédemment et de bénéficier de la facilité des calculs dans D sans abandonner la facilité que donne la conception algébrique du corps Q.

Notons que pour appeler représentation l'inverse R^{-1} de R, il faut admettre que la définition de la représentation autorise que certains objets de l'univers des représentés (ici Q) ne soient pas représentés par des objets de même nature, puisqu'un nombre de Q est représenté par une suite de D[14].

L'utilisation concomitante d'une représentation et de son inverse conduit souvent, par abus, à les confondre et à utiliser le terme « représentation » comme une relation symétrique.

Cet exemple révèle donc que *l'intérêt des représentations réside dans ce qui peut être fait dans un univers et qui ne peut pas être fait dans l'autre*.

A ce moment les deux univers – et pas seulement le couple (R-é, R-ant) fonctionnent comme un nouveau couple générateur d'un nouvel objet. Les recherches dont nous parlons plus loin, en particulier celles d'ALSON [2000] ont donné des exemples de telles inventions, dans l'histoire ou en didactique.

L'étude de la représentation en termes de situations nous permet d'envisager de façon beaucoup plus précise et concrète les conditions dans lesquelles elle est susceptible d'apparaître comme solution d'un problème, soit pour des raisons logiques, soit à cause des économies qu'elle permet. On comprend par exemple que le passage d'une représentation formelle à une représentation iconique permet de bénéficier de possibilités sémiologiques et physiologiques intéressantes dans certains cas (par le nombre d'objets et de structure appréhendés d'un coup par exemple). Les vertus de ces représentations ne peuvent être étudiées qu'au cas par cas à cause et en fonction de leur sensibilité aux variables de la situation.

Pourtant, en dehors de quelques mises au point, on ne peut pas dire que ce qui précède apporte des résultats très originaux. La notion de représentation est apparemment trop générale pour déterminer des catégories spécifiques de travaux en didactique. Une étude particulière sera caractérisée par bien d'autres conditions plus importantes et plus particulières. L'intérêt de cette approche est peut être de permettre de poser la question suivante :

Dans quelles conditions et dans quelle mesure l'enseignement peut-il utiliser les représentations ? Peut-il le faire sans adaptations spécifiques ?

Mais avant d'aborder ce point il sera sans doute agréable au lecteur de trouver une illustration détaillée de nos propos peut être un peu théoriques.

3. LE JEU DES TRESORS

[14] La construction de D par les élèves a été étudiée et réalisée pendant plus de 10 ans dans deux classes de CM2 de l'école Jules Michelet de Talence. [Nadine et Guy BROUSSEAU 1986]

Tous les ans, entre 1977 et 1990, les élèves de l'école Maternelle J. Michelet (l'école pour l'observation de l'IREM de Bordeaux) âgés de cinq ans se sont vu proposer une suite de situations qui les conduisaient à construire des « codes » pour représenter des objets, des collections, des propriétés, des relations etc. C'était l'activité dite « des trésors »

Les différentes phases du « Jeu des trésors »

Pour permettre au lecteur de mieux cerner les questions soulevées par la représentation de quelques objets, il est plus commode d'évoquer les différentes étapes et de résumer les situations caractéristiques.

a) La première phase : la collecte d'objets

La maîtresse présente à tous les enfants assis en rond devant elle, deux ou trois petits objets nouveaux du monde des enfants. Elle les faits passer de mains en mains, les fait nommer, puis les mets dans une boîte grise qu'elle ferme et qu'elle met sur ses genoux. Elle demande alors qu'est-ce qu'il y a dans ma boîte ? Un élève à la fois nomme un objet, la maîtresse le sort alors de sa boîte et le pose au vu de tout le monde. Ma boîte est vide ? etc.

Le jeu s'effectue tous les matins. Tous les deux ou trois jours de nouveaux objets apparaissent et s'ajoutent aux précédents. Bientôt, avec une vingtaine d'objets le jeu devient plus difficile : il faut penser à un objet, vérifier qu'il n'est pas déjà sorti de la boîte, lever le doigt… et changer de proposition si un camarade interrogé avant vous fait sortir cet objet. Aucun élève n'est capable à lui tout seul d'*énumérer* le référentiel. Les enfants ont un répertoire réduit (de 7 à 28 objets suivant les sujets) mais la classe entière arrive à vider une boîte d'une quarantaine d'objets après un mois. Ce jeu quotidien dure au plus quinze minutes.

Cette phase a pour objet d'introduire progressivement les éléments du référentiel, à rendre leur reconnaissance et leur dénomination verbale (répertoire) collective et fluide, et à présenter le jeu « devine ce qu'il y a dans ma boîte » sous sa forme la plus simple. Certaines connaissances logiques et mathématiques sont déjà implicitement mobilisées.

b) La deuxième phase : le jeu des listes

- Le jeu de la mémoire : la maîtresse choisit trois objets du référentiel, les montre aux enfants, les faits circuler, les leur fait désigner verbalement et les place dans une nouvelle boîte colorée : « Tout à l'heure, je vous demanderai de me dire ce que nous venons de cacher dans cette boîte ». Au bout de trois séances tous les enfants ont compris le jeu et sont capables de le réussir, c'est à dire de mémoriser de courtes listes d'objets, du matin pour le soir.
- Le saut informationnel : En atelier, un matin, les élèves reçoivent une dizaine d'objet qu'ils peuvent examiner à loisir. Puis on range les objets dans la boîte colorée, il faudra se rappeler la liste des objets. Panique ! La maîtresse impavide constate les échecs mais reste encourageante. « Réfléchissez, nous y arriverons ». Au cours de plusieurs séances collectives, les élèves commencent à obtenir des réussites partielles en s'aidant de dessins et de leur mémoire.

Aucun enfant de cet âge ne peut inventer ni même concevoir d'un coup la réponse car le processus ne peut réussir et donc la question ne peut avoir de sens que si on en maîtrise en même temps la totalité des composantes.

Et pourtant nous avons observé que chaque année des dessins et des listes apparaissent. Chaque année quelques élèves ont demandé du papier pour « dessiner », pour faire comme maman avec les commissions. Ce qui est loin de résoudre le problème car il faut dessiner chaque objet, de façon à le reconnaître (lui et pas un autre auquel on ne pensait pas), les dessiner tous (et pour cela les énumérer), les dessiner une seule fois etc. Or les éléments de la solution apparaissent et se répandent dans la classe : culture des commissions, intuition de

l'un, imitation d'un second, critique d'un tiers, chance d'un quatrième etc. Aucune connaissance effective et définitive, seulement ce qui est nécessaire pour s'engager dans la phase suivante.

c) La troisième phase : le jeu de communication des listes

- dans un atelier, une liste des objets cachés dans une boîte colorée est réalisée par un « auteur ». Elle est essayée dans un deuxième temps successivement par trois « lecteurs ». Le lecteur essaie de reconnaître un objet d'après le dessin et le nomme. Un autre enfant le « contrôleur » tient la boîte cachée et dit si elle contient ou non l'objet nommé. Le lecteur recommence ou continue jusqu'au succès ou à l'abandon.
- Après le contrôle, la maîtresse écoute et au besoin enregistre les trois enfants qui commentent et discutent entre eux les réussites les échecs et les difficultés du jeu. Ses sollicitations restent discrètes et courtes. Pour cette phase, qui n'est plus d'auto-communication, le nombre des objets est ramené à quatre.

Une des principales difficultés pour les enfants est de comprendre la répartition des responsabilités entre l'auteur et le lecteur, qui doivent coopérer pour gagner, bien qu'au moment de la critique finale ils se trouvent avoir des intérêts opposés.

C'est dans cette phase que se mettent au point tous les embryons de techniques de la représentation des objets et de l'énumération des listes sur lesquelles nous allons revenir.

d) La quatrième phase : la construction d'un code commun

La maîtresse instaure des séances d'études et de discussions sur les difficultés et les malentendus de la veille. La confrontation des diverses représentations données d'un même objet fait apparaître des variables iconiques et des choix motivés par des raisonnements d'ordre logique

Ils aboutissent à la construction progressive d'un code collectif (affiché et mis à jour)

Le processus avait fait l'objet d'une étude minutieuse des conditions susceptibles de provoquer ces apprentissages par le jeu des modifications des variables de situations a-didactiques. L'intervention des enseignants ne concernait jamais le « contenu » des apprentissages, mais seulement les conditions, le déroulement et la motivation des élèves.

L'organisation des situations et du processus présente un intérêt pour notre étude car ils réalisent le paradigme de toutes les situations de représentations.

Conditions de la genèse des représentations

Il s'agit donc pour les élèves de pouvoir utiliser des « signes », des combinaisons de signifiants et des listes de signes pour décrire et communiquer le contenu d'une boîte à un autre enfant ou pour interpréter son message. Cette boîte contient quelques petits objets ou jouets pris dans un référentiel d'une quarantaine d'objets.

Voici un échantillon des conditions et des raisonnements qui soutiennent la construction du processus. Comme dans toutes les études d'ingénierie didactique il faut commencer par la situation terminale et remonter la chaîne des conditions didactiques nécessaires. Ce raisonnement est habituellement caché par l'habitude de prendre connaissance des dispositifs à l'aide de la chronique de leur déroulement, ce qui permet un bien meilleure compréhension mais qui masque totalement sa technicité[15].

i) Nous nous sommes intéressés essentiellement à la fonction référentielle (le discours se fait en fonction de ce qu'on a à dire) d'un « langage iconique » et à son élaboration spontanée dans des conditions spécifiques a-didactiques.

[15] cf. par exemple l'exposé du dispositif didactique d'étude des décimaux dans [BROUSSEAU 1981]

Un enfant qui dessine une maison *représente*-t-il une maison ? ou accomplit-il une activité rituelle de dessin dont les éléments symboliques lui sont fournis par son milieu? Dans le premier cas, il prend effectivement en charge certaines relations entre son modèle et le dessin: par exemple il fait deux portes parce que sa maison a effectivement deux portes. Son dessin a une fonction référentielle. Dans le second, non, l'enfant ne travaille qu'au niveau symbolique: une maison-icône ou métaphore a toujours une seule porte, deux fenêtres placées symétriquement et une cheminée... quatre fenêtres et c'est un château.

ii) Les objets du référentiel sont soigneusement choisis de façon à poser les principaux problèmes de représentation repérés à l'époque.

iii) Le code final doit être discuté par l'ensemble des enfants qui choisiront en les justifiant les sèmes : les caractères et les signes les plus propres à identifier un objet en le distinguant d'autres similaires et à le dessiner facilement. La structure du référentiel joue évidemment encore ici un rôle très spécifique.

iv) Pour que ce débat puisse avoir lieu et amène l'émergence d'un discours sur les qualités des représentations, il a fallu que les « signes » ou « symboles » en débat soient ceux que les enfants auraient eux mêmes construits (et non choisis parmi des dessins déjà là) individuellement et essayés et discutés dans des situations d'auto-communication (individuelles) ou de communication (duelles).

v) Pour échapper à la culture que les enfants de cet âge ont du dessin libre, la consigne de « dessiner » ne doit pas émaner de la maîtresse (condition un peu arbitraire, mais défi intéressant).

vi) La situation de base devra satisfaire toutes les conditions de la situation non didactique typique. C'est à dire qu'elle sera telle que les enfants auront *besoin* de désigner exactement un objet, quel que soit ce moyen, avec un résultat, réussite ou échec, qu'ils pourront immédiatement apprécier directement eux-mêmes, mais surtout avec des possibilités de prévoir ce résultat et de corriger l'exactitude de leurs prévisions dans des tentatives multiples et répétées.

vii) Si le jeu complet est trop complexe dans sa forme utile (devoir dessiner pour prévoir) des jeux préparatoires seront proposés, mais tous auront une structure non didactique typique complète. Il faut noter les particularités de ce processus où la succession des situations est déterminée par des variations des variables de commande d'une *même* situation et non pas directement par l'articulation de situations différentes relevant d'une même connaissance. La logique des situations vient ainsi doubler ou même se substituer à la seule logique des connaissances (topogenèse) qui préside habituellement aux chronogenèses didactiques

viii) Ainsi la maîtresse peut changer les jeux mais n'a pas à apporter des informations, ni a approuver : ce n'est pas une maïeutique socratique. De plus l'objet d'une situation n'est pas toujours l'acquisition d'une connaissance ou d'une partie des connaissances visées, il peut être simplement de permettre à un enfant de se glisser dans une situation, de comprendre à quoi on joue, d'éprouver le plaisir qu'on peut y prendre, réussite totale ou non.

ix) Les enfants de cet âge n'ont aucune difficulté à nommer verbalement et à discriminer les dénominations des objets du référentiel (la voiture avec une étoile, le porte monnaie, la grenouille…) mais ils ne savent pas écrire ces dénominations. Les situations devront pouvoir être résolues d'abord verbalement, puis plus tard devront l'être par un dessin

x) Le passage de la phase verbale à la phase graphique sera commandée par un saut informationnel en ce sens que la tâche habituelle facile : se souvenir des trois ou quatre objets contenus dans une boîte, deviendra impossible par le seul jeu d'un

« saut » d'une variable ergonomique : le nombre d'objets. Celui-ci passera d'un coup à une dizaine.

xi) De nombreuses autres variables ont été prises en compte dans la conception de l'organisation générale, dans celle de chaque situation particulière et aussi dans leur gestion (la maîtresse participait étroitement aux recherches). Il serait oiseux de les rapporter ici.

Quelques uns des résultats établis dans cette expérience.

[Jean Marie DIGNEAU 1980] a rapporté, étudié et justifié les principaux paramètres du processus, en particulier dans ses deux premières phases. Puis Jacques [PERES 1984] a étudié le processus dans son intégralité, notant au passage de nombreux aspects plus psychologiques. En particulier il a précisé les conditions et les étapes du passage des représentations iconiques, graphiques ou schématiques (analogiques) à des codes formels.
Les résultats établis dans cette expérience sont nombreux et divers.

a) Tout d'abord les phases a-didactiques fonctionnent bien comme prévu et provoquent les apprentissages annoncés. En particulier le saut informationnel, malgré un aspect assez angoissant et même un peu dramatique pour les élèves, ne provoque pas le blocage redouté. Sa résolution provoque un certain plaisir qui sert de paradigme pour les situations suivantes et d'encouragement pour les difficultés. Fragmenter la difficulté en une multitude de situations de plus en plus évidentes ou faciles mais considérés comme des petits pas dont la succession est nécessaire n'est pas toujours la meilleure stratégie.

b) En suivant de près la progression du répertoire des enfants il apparaît une différence assez grande entre, le répertoire de la classe, celui qu'un élève mobilise dans l'action, et celui qu'il peut fournir en réponse à un questionnaire.
On peut en tirer des conclusions dont voici des exemples :
- Les connaissances d'un élève qui se manifestent dans une situation collective familière, sont souvent beaucoup plus riches que ce qu'il peut produire « formellement » dans d'autres conditions. Dans des conditions différentes ces mêmes connaissances n'ont pas le même sens puisque
- 1) les situations objectives sont différentes
- 2) Les situations didactiques superposent des effets de contrat. Par exemple [Pérès] rapporte un effet de contrat : un élève s'interdit de dessiner et déclare en protestant qu'il fera faire ce dessin par sa sœur ou par sa mère.
- Les connaissances disponibles dans une collectivité sont la *réunion* des connaissances de ses membres, les connaissances « communes » - celles repérées dans la plupart des évaluations - en sont *l'intersection*. La différence entre ces deux répertoires peut être grande. La variété des situations d'enseignement mobilise des répertoires qui se situent entre ces deux extrêmes. Les situations proposées sollicitent les deux qui progressent ensemble.

Les enseignants fondent leurs stratégies didactiques sur une certaine « représentation » du savoir des élèves (en particulier sur des « évaluations » individuelles. Suivant que leurs conceptions pédagogiques utilisent plutôt la *réunion* (ex. dans la maïeutique collective) ou plutôt l'intersection (ex. dans des exercices individuels en parallèle) et suivant que leurs techniques didactiques sont plus ou moins adaptées à ces conceptions, de très grands écarts entre les attentes et les observations de « résultats peuvent être constatés. Ce phénomène joue un rôle important dans la sous évaluation et le sous emploi des ressources des élèves.

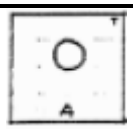
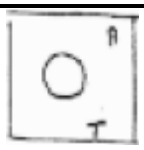
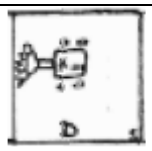
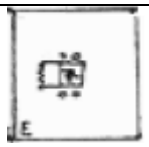
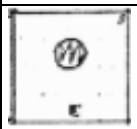
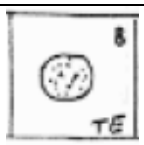
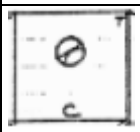
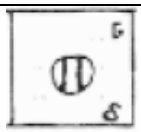
c) L'énumération d'une collection n'est pas une acquisition immédiate. Bien qu'invisible puisque cette « connaissance » ne figure pas comme objet d'enseignement et qu'elle

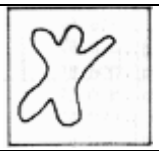
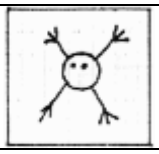
s’acquiert spontanément lors de l’apprentissage du comptage, elle pose des problèmes aux enfants cette observation fera par la suite l’objet des travaux de J. BRIAND.

d) La nécessité de représenter des objets pour les reconnaître parmi d’autres fait développer par les élèves des stratégies diverses mais régulières dans un ordre « génétique » presque immuable et général :

Le premier procédé qui apparaît est la trace. Les enfants décalquent le contour de l'objet à représenter, ensuite ils enrichissent le dessin de caractères oppositifs ou de détails distinctifs.

tableaux 1 et 2 : Les représentations des objets

Objet représenté Type de \ représentation	Bulldozer	Indien	Bille en porcelaine	Bille dite "triple"	grenouille
Trace					modèle trop grand: trace impossible.
Trace enrichie de caractères « distinctifs »					
Trace enrichie d'un caractère "oppositif" iconique					
Trace enrichie d'un caractère "oppositif" non iconique.					

Représentation Figurative					
Représentation Figurative réduite					
Représentation "analogique"					
Autres: Métaphores Métonymies etc.					

Un caractère est « distinctif » lorsqu'il suffit à déterminer un objet dans le référentiel ex. : dans cette collection, seul l'indien est un bonhomme qui porte des plumes. Un seul camion porte une étoile. Un caractère est « oppositif » lorsqu'il contribue, avec d'autres, à déterminer une classification de tout ou d'une partie importante du référentiel. Les objets qui ont ce caractère et les objets qui ne le présentent pas sont à peu près aussi nombreux.
Les éléments représentant ces caractères peuvent être figuratifs : ils tendent à évoquer l'aspect de l'objet. Mais il n'y a aucun caractère analogique qui puisse représenter la terre, le verre, la porcelaine, l'acier dont est faite une bille. Il faut donc inventer et convenir d'un « signe » arbitraire : hachures, pointillés, croix etc.
La grenouille, beaucoup plus grande que la feuille de dessin leur pose un réel problème. Impossible de relever sa trace elle est trop grande. L'idée d'inventer un dessin petit qui ressemble à (qui présente quelques traits de) son grand modèle ne vient pas immédiatement. Mais lorsqu'un enfant résout le problème, la plupart des autres l'imitent et tous envisagent cette "découverte" comme une conquête précieuse.

e) Mais le progrès lors des phases d'action n'est pas assuré, le modèle est trop grossier et d'autres variables d'ordre psychogénétique interviennent.

Par contre les phase de communications effectives et en particulier le changement de position d'auteur à lecteur
Et plus encore les phases de débats et les phases d'institutionnalisation du code comme on pouvait s'y attendre.

f) Le processus n'est pas ponctuellement reproductible, en ce sens que les réactions et les remarques des élèves ne se superposent pas exactement, et les « histoires », c'est à dire les déroulements bien que proches sont différents. Par contre il est globalement reproduit en ce sens que les résultats, les successions de phases, les comportements essentiels, les apprentissages, etc. sont bien similaires. Définir ce qu'est la reproductibilité didactique est un problème fondamental de la didactique théorique, et c'est un facteur essentiel de la connaissance de l'enseignement (entre autres par les professeurs)

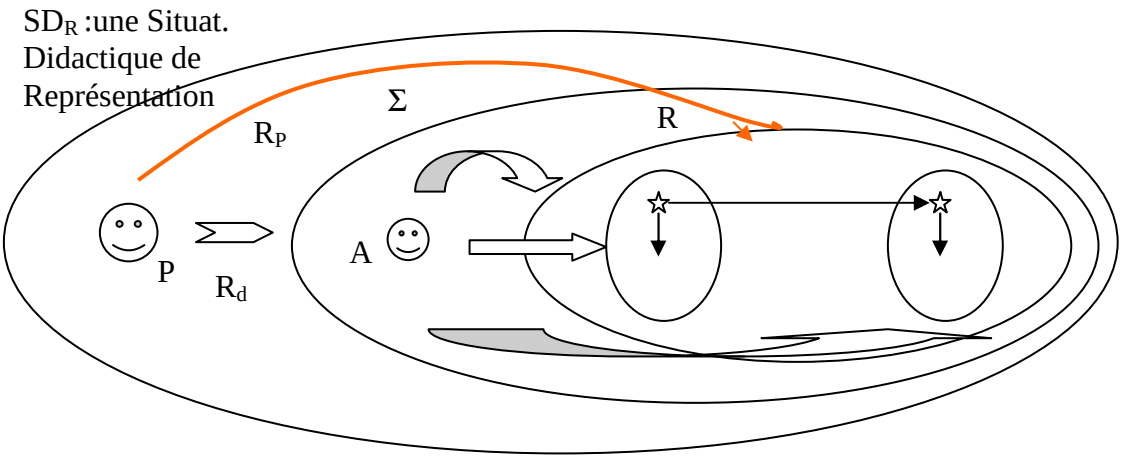
En conclusion, dans des situations appropriées il est possible de faire apparaître chez les enfants une réelle pratique de diverses méthodes de représentation des objets et de développer chez eux une « culture sémiologique, c'est à dire de les voir argumenter les propriétés de diverses méthodes de représentation. Inversement, la nécessité d'effectuer ces représentations met en évidence les objets : éléments, propriétés et relations et prépare leur reconnaissance, leur emploi dans d'autres situations, leur étude et leur connaissance explicite. De sorte que le processus décrit ci-dessus constitue une genèse didactique et même scolaire des premières représentations. De plus, les situations présentées peuvent servir de référence pour d'autres acquisitions du même type, aussi bien pour les professeurs que pour les élèves. En ce sens le jeu des trésors est une situation fondamentale pour la représentation. La place de la représentation dans les recherches en didactique liées à la théorie des situations sera reprise plus loin dans l'article, mais auparavant, il est temps de continuer notre étude théorique.

4. 4. LES SITUATIONS DIDACTIQUES DE REPRESENTATION

Dans les activités d'enseignement, qu'il s'agisse pour l'élève de faire un problème ou de comprendre un discours du professeur, les représentations peuvent jouer des rôles différents de ceux que nous venons d'évoquer. Leur étude est plus complexe.

Les rôles des représentations dans les situations didactiques

L'élève A est assujetti à la fois à une situation objective de représentation Σ, et à une situation didactique SD_R gérée par le professeur P. Le schéma 4 représente l'inclusion des milieux et des situations[16] dans les situations didactiques, mais nous ne représentons toujours pas l'observateur O. Il est fréquent de devoir envisager l'existence simultanée de plusieurs assujettissements, qu'ils réagissent ou non les uns sur les autres ; la question est de savoir si cette imbrication oblige à envisager d'autres usages, d'autres rôles pour les représentations, ou d'autres types de situations, et aussi de savoir ce que serait une situation didactique de représentation?



SCHEMA 4

Le schéma fait apparaître deux situations objectives de représentation au fonctionnement similaires à celui que nous avons étudié plus haut : celle qui a pour actant l'élève et celle qui a pour actant le professeur. Elles font apparaître respectivement

i) Une représentation comme « *moyen pour l'élève* A de dominer la situation objective » ou comme *objet de « connaissance »*. C'est R, celle que nous venons d'étudier (flèches doubles).

Dans le jeu des trésors, un dessin représente le contenu d'une boîte, une collection d'objets tente de réaliser ce que représente un dessin etc. Le jeu des trésors comporte de nombreux autres exemples.

ii) R_P, des représentations comme « connaissances » pour le professeur

- R_{PE} comme *« connaissance à enseigner »* (confondue avec R pour la clarté du schéma)
- R_{PS} comme objet de savoir pour lui, en tant que sujet (la flèche simple) .

Par exemple il sait que tel dessin d'objet est ambigu, ou que des ajouts de caractères correspondent à des intersections de listes etc.

Les différences entre R_{PE} et R_{PS} constituent une composante de la transposition didactique particulière à ce professeur.

Mais le schéma fait apparaître aussi

iii) R_d, la position d'une représentation *comme moyen didactique pour l'enseignant* (la flèche pennée). Son fonctionnement est fondamentalement différent des deux précédents.

[16] Toujours suivant le modèle Brousseau-Margolinas,

Par exemple devant une difficultés de ses élèves à comprendre la notion dans son univers d'origine U-é, le professeur fait appel à une représentation de cette notion dans un univers plus familier U-ant : « c'est comme si … » dit-il. Si l'étude de l'image de cette représentation permet à l'élève de comprendre le fonctionnement de la notion, la représentation est utilisée comme précédemment. Mais si l'existence de cette représentation et de cette image est tenu par le professeur ou par les élèves comme une raison explicite ou implicite d'accepter la notion sans réellement la comprendre, alors la représentation a joué le rôle d'un *argument inductif*, d'un moyen rhétorique ou didactique direct, destiné à influencer l'élève et à modifier ses convictions pour des raisons sans rapport avec l'objet de savoir. Ce rôle, sa légitimité, et sa nécessité vont être étudiés dans le paragraphe suivant.

Ainsi une même situation didactique effective peut comporter des représentations R, R_P et R_d différentes, ces différentes étant faibles lorsqu'il s'agit de sous représentations d'une même représentation, ou radicales si elles n'ont à peu près rien en commun.
Une même représentation peut être utilisée dans chacun des trois rôles ci-dessus.
Nous distinguerons donc :

- Des « situations didactiques portant sur la représentation », où une représentation figure comme objet d'enseignement, ou comme moyen de connaissance pour l'élève,
- Et des « situations didactiques de représentation » où pour influencer l'élève, une représentation est utilisée comme *moyen* d'enseignement par le professeur, comme argument rhétorique ou comme moyen didactique indépendant de l'objet d'enseignement.

Un exemple de représentations objets d'enseignement: l'enseignement des entiers au collège

Pour introduire les entiers relatifs, il courant d'évoquer des altitudes et des profondeurs, des avoirs et des dettes, des escaliers, des positions sur une droite numérique ou même des températures etc. Il s'agit de représentations du type R ci-dessus, « objets de savoir » pour les élèves. Si ces représentations sont inscrites au programme du collège elles deviennent R_{PE}.
Il y a bien représentation, même si ces représentations sont impropres, en ce sens que seule une partie de la structure visée <Z, <, +, x> est représentée : l'ordre et l'addition, mais pas la multiplication.
Le professeur est en mesure d'en connaître une représentation propre R_{PS}, celle des translations numériques de N par exemple. Il sait aussi que la température par contre ne représente que l'ordre, mais pas l'addition.
Lorsqu'il faudra comprendre la multiplication de deux entiers, les représentations impropres se constitueront en obstacles comparables à l'obstacle épistémologique et historique bien connu. Les élèves ne comprendront pas le produit de deux entiers, parce que les représentations utilisées pour introduire les entiers les ont associé à des mesures et que toutes les opérations arithmétiques sont soutenues, conçues à partir de situations de mesurage.
Le choix qui s'offre à l'enseignement est alors soit d'introduire des représentations impropres pour récupérer une compréhension liée à la mesure ou au comptage, quitte à les modifier plus tard (avec des difficultés et des risques), soit de préférer l'introduction directe d'une représentation propre plus complexe et plus insolite (avec tout de suite d'autres difficultés et d'autres risques). La décision ne se prend pas sur des considérations uniquement mathématiques, mais surtout sur des considérations didactiques : ergonomiques, psychologiques, de développement etc.

Il ne faudrait donc pas interpréter les propos ci-dessus comme une condamnation de l'usage didactique des représentations, même impropres. Les naturels se constituent aussi en obstacle,

comme tous les plongements dans des sur-structures, il n'empêche qu'on ne peut pas les enseigner *après* les décimaux.
La presque totalité de la littérature sur les représentations publiée dans les revues de ou sur l'enseignement des mathématiques et en particulier les articles contenus dans cet ouvrage traitent des « situations didactiques portant sur la représentation ». Très peu sur la transposition didactique, c'est à dire sur la différence entre les représentations utilisées par les élèves et celles utilisées par leurs professeurs et sur les deux aspects suivants[17].

Les représentations comme instruments d'influence didactique non spécifique

Pourtant l'utilisation des représentations comme moyen d'expliquer, de faire comprendre, de faire admettre, de convaincre, de faire apprendre, de faire retenir … c'est à dire comme moyen logique ou « formel », *indépendant de la connaissance à enseigner* est très fréquente et très banale.
On la trouve dans toutes les formes classiques de situations didactiques :

- comme introduction à une connaissance nouvelle
- comme illustration pour augmenter « le sens »
- comme moyen inductif de définition,
- comme moyen d'organiser et de hiérarchiser l'ensemble des connaissances, « donc » de démontrer les énoncés,
- comme argument inductif, l' « explication par analogie »
- comme explication
- comme moyen de démultiplier des exercices similaires pour obtenir l'apprentissage par répétition, par un serinage un peu perfectionné

Attachons nous un instant par exemple à l'usage des représentations comme moyen inductif de la définition d'un objet ou de l'enseignement d'un théorème. L'ostention consiste à présenter un objet pour désigner une classe d'objets, lorsque la reconnaissance de la classe « exacte » à partir d'un seul objet est trop difficile, la présentation d'une petit ensemble de représentants de cette classe (et qui sont des représentations les uns des autres) peut induire un meilleur résultat : A est P, B est P, C est P ceci doit te permettre de reconnaître que D est P

Le procédé rhétorique est somme toute assez innocent. Mais il peut devenir « principe » et s'ériger en exigence didactique à l'égard de l'élève. L'exemple le plus clair est sans doute celui des exercices structuraux. Le principe est le suivant : l'élève doit décoder le discours du professeur et trouver l'objet d'enseignement dissimulé par le professeur derrière une représentation. La théorie du contrat didactique montre que cette dissimulation est nécessaire

Mais lorsque le procédé s'étend à la présentation et à l'enseignement des propositions mathématiques, et qu'il intervient comme argument inductif pour faire admettre un énoncé, enfin et surtout lorsqu'il se substitue à la preuve, lorsqu'il opère sous la pression d'une exigence didactique implicite mais impérieuse « ce qui est répété doit être appris », il y a conflit entre l'objet et le moyen de la connaissance et de l'apprentissage.

Explicitement la règle didactique inductive serait la suivante :

« Le professeur a montré que

R possède la propriété P

Que la représentation R1 de R, possède la propriété P

[17] La gestion de ce fréquent et presque toujours nécessaire divorce entre les connaissances scientifiques du professeur et leur usage didactique est un des buts essentiels de la didactique scientifique. Mais d'une façon générale, il semble que les enseignants de mathématiques, comme les mathématiciens aient un certain intérêt à ignorer cette transposition, à les considérer comme tout à fait indépendants et même étrangers à leurs préoccupations. Ceci pourrait expliquer certaines réticences à l'égard de la didactique.

Que la représentation R2 de R, possède la propriété P
Si une représentation R3 de R se présente, je dois conclure qu'elle possède la propriété P. »

Syllogisme évidemment faux, éminemment contraire à l'objet de l'enseignement des mathématiques où comme ailleurs « comparaison n'est pas raison », mais dont l'usage s'impose à l'élève s'il ne veut pas apparaître comme réfractaire à l'enseignement. Mais de même que la répétition des exercices permet de d'obtenir une « connaissance » qui remplace et simule la compréhension, la répétition de l'usage de théorèmes à l'occasion d'une accumulation de représentations peut simuler un savoir mathématique.

Les justifications de ces procédés sont les plus diverses, scientifiques ou méthodologiques.
Par exemple, il est souvent implicitement admis que la multiplication des liens cognitifs, en particulier des illustrations, participe à une meilleure « connaissance » d'une notion. Ce point de vue tend à autoriser et même à favoriser la multiplication des représentations d'une notion, propres ou impropres. Les avantages mais aussi les inconvénients de cette croyance sont évidents. Seule une étude cas par cas peut indiquer dans quelles limites il convient de se tenir et l'analyse en termes de situations est inévitable pour cela.
L'importance des représentations, sous la forme mathématique d'isomorphismes, est apparue tellement forte à certains auteurs comme DIENES[18] qu'ils en ont fait la base d'une théorie de la connaissance, de l'apprentissage, de l'enseignement et même de l'histoire des mathématiques à l'usage des enseignants.
Le succès des représentations dans l' « épistémologie de professeurs » est sans aucun doute dû à la proximité de leur fonctionnement avec toutes sortes de procédés rhétoriques : l'analogie, la comparaison… ou didactiques : la réification, la répétition, et à l'appui que semblent leur apporter des formulations mathématiques comme l'isomorphisme…

Les exemples familiers et personnels abondent mais ils ne sont pas tous l'effet d'une tentative furtive et personnelle. L'usage didactique des représentations comprend une part très importante de rhétorique, et cette part est profondément liée à la culture et aux croyances de toutes sortes des professeurs et des élèves : culture scientifique et culture populaire, culture épistémologique et didactique.

Différence entre les deux usages didactiques de la représentation

L'utilisation des représentations y compris « impropres » par le sujet d'une situation objective d'action relève de l'heuristique. Le sujet peut *tenter une représentation* dans la mesure où il engage sa responsabilité et assume les conséquences de sa tentative.

> « II faut que la méthode de projection soit contenue dans le processus de projection; le processus de représentation atteint ce qu'il représente par le moyen d'une règle de projection. Si je copie quelque chose, les erreurs de ma copie seront compensées par la colère, les regrets, etc. que je manifesterai à leur égard. Le résultat global – c'est-à-dire la copie *plus l'intention* - est l'équivalent de 1'original. Le résultat effectif - la simple copie visible - ne représente pas la totalité du processus de copiage; nous devons y inclure l'intention. Le *processus* contient la règle, le *résultat* ne suffit pas à décrire le processus.

[18] Dans DIENES Z. (1970) les enfants après une phase ludique (1) avec des jeux où la structure mathématique est présente (pour l'observateur) sont capables après plusieurs rencontres avec des « jeux structurés » isomorphes (2) de reconnaître la structure et de l'abstraire (3) de ses réalisations. Une phase de représentation graphique (4) puis de formulation ou de verbalisation (5) est suivie d'une phase de formalisation (6) qui achève le processus d'apprentissage.

> Nous comprenons un symbole (la copie du plan du métro) comme partie d'un système, et le système est décrit par sa grammaire (non par une proposition supplémentaire).
>
> [B VI] 1. II faut que ce que la pensée et la réalité ont "en commun" soit déjà exprimé dans l'expression de la pensée. Vous ne pouvez pas l'exprimer dans une proposition supplémentaire, et il est égarant d'essayer de le faire L'‘harmonie’ entre la pensée et la réalité, harmonie que les philosophes qualifient de "fondamentale", est quelque chose dont nous ne pouvons parler; aussi n'est-elle pas le moins du monde harmonie au sens ordinaire, étant donné que nous ne pouvons la décrire. Ce qui fait qu'il nous est possible de porter des jugements justes sur le monde fait aussi que nous pouvons en porter de faux. (WITTGENSTEIN, CC 30-32,1988, p. 42).]

Dans la relation didactique au contraire, elle s'apparente en fait à des usages rhétoriques très généraux et très variés puisqu'elle sert à influencer, convaincre, enseigner un autre. Nous venons d'évoquer l'analogie , mais une représentation impropre peut aussi fonctionner comme figure de sens, les exemples de symbolisations métaphoriques ou métonymiques abondent en mathématiques [BAUERSFELD et ZAVADOWSKI 1981, VAN DORMOLEN 1991], et aussi dans des stratégies plus modestes, comme figures de répétition et d'accumulation…

Il est donc essentiel de distinguer les *représentations objets d'enseignement,* des *représentations comme moyens rhétoriques et didactiques* des enseignants, et parmi ces derniers ceux qui peuvent être contrôlés et justifiés et les autres. Cela nous amènerait à étudier les rapports entre ces deux usages didactiques de la représentation.

S'il est assez évident que l'usage *des* représentations est soumis à des obligations liées à la contingence, qu'en est-il de l'usage rhétorique *de la* représentation dans la relation didactique ? Jusqu'à quel point est il fécond de substituer des procédés formels à des procédés signifiants ?

Chercher une réponse à cette question sort du cadre de cet article. Cela impliquerait d'entrer dans l'analyse des diverses formes du « contrat didactique », c'est-à-dire des différentes façons de répartir la responsabilité de l'apprentissage et de la connaissance entre le professeur et son élève.

La représentation comme connaissance préalable à la relation didactique

La relation didactique présente plusieurs propriétés paradoxales qui font que son établissement et sa réussite ont toujours quelque chose de hasardeux de fragile et de provisoire. Si l'établissement premier des connaissances ne suppose pas l'intervention d'une connaissance extérieure à l'humanité, et donc peut satisfaire l'hypothèse constructiviste, c'est parce qu'elle profite de deux circonstances originales par rapport à la diffusion didactique des connaissances. D'une part, les connaissances à établir et surtout leur forme et les processus pour le faire ne sont pas déterminés : il existe bien des façons équivalentes d'établir les connaissances. L'histoire en réalise une elle aurait pu en réaliser d'autres… D'autre part elle dispose, de fait, d'un temps non limité a priori. Ces conditions restent valides aussi pour la plupart des acquisitions de connaissances qui ne répondent pas à un projet didactique mais qui proviennent d'une adaptation spontanée, autonome, à son environnement.

La relation didactique entre deux institutions P (professeur) et E (élève) s'instaure, par définition, lorsqu'une institution S (société) décide que E devrait acquérir une certaine connaissance, lorsqu'elle juge que E ne pourra pas le faire par une adaptation spontanée et autonome à son environnement M (milieu), et lorsqu'elle juge qu'une institution P est en

mesure de l'obtenir par d'autres moyens. S charge P de réaliser le projet (P, E et S peuvent être des institutions ou des sujets)[19].

Une des raisons pour laquelle E ne peut pas acquérir la notion de façon autonome est que le milieu n'en fournit aucun emploi. Ou s'il y en a un, alors la construction de la notion nécessaire à été si complexe que la probabilité de voir un sujet la produire dans le temps dont il dispose est trop faible. Souvent, l'institution ou le sujet élèves ne peuvent pas apprendre ce dont ils n'envisagent pas l'emploi. Mais d'autre part, ils ne peuvent concevoir l'emploi de la connaissance nouvelle et en comprendre l'adéquation qu'après l'avoir acquise. Dans certaines circonstances, même l'enseignement de la notion par d'autres moyens peut ne pas aboutir à une connaissance utilisable.

Il en résulte pour l'enseignant un sorte d'alternative absurde : soit il doit organiser des situations d'auto-apprentissage et attendre une improbable genèse spontanée de connaissances semblables aux savoirs actuels, soit il enseigne directement ce « savoir », mais il est incompréhensible et inutilisable, et ne sera donc pas converti en connaissance pour le sujet[20].

Mais l'auto-apprentissage ne se réduit pas à une adaptation inconsciente. L'adaptation s'effectue toujours avec le concours nécessaire d'un auto-enseignement qui obéit au même schéma que la relation didactique. Si la relation didactique est impossible, l'autodidactisme l'est aussi ainsi que la transformation des connaissances en savoirs [CONNE F.,1992]. Il s'agit bien d'un paradoxe de la situation didactique [BROUSSEAU 1990, 1998].

Cette hypothèse est évidemment contredite par l'observation. Tous les organismes humains peuvent, plus ou moins facilement acquérir des connaissances, aussi bien par l'auto-apprentissage que par l'enseignement direct. Avant de « posséder » une connaissance, un sujet ou une institution doit s'en faire une idée, dont la fonction serait de permettre la mise en route des processus d'apprentissage et d'enseignement.

Concrètement, nous supposons qu'un sujet ne peut entrer dans une situation que s'il la « comprend », c'est-à-dire non seulement s'il peut en connaître les objets, les relations, et les règles, donnés dans l'«énoncé » de la situation, mais aussi s'il envisage quelles décisions bonnes ou mauvaises il pourrait prendre. Cette façon de répondre, peut-être fausse ou inefficace, constitue la stratégie de base, le « modèle d'action » initial et indispensable qui permet à l'élève d'entrer dans la dialectique des questions des réponses et des corrections qui amèneront une connaissance adaptée. En théorie des situations, l'apprentissage n'est donc jamais qu'une transformation d'une « connaissance » ou son remplacement par une autre.

Cette approche conduit à distinguer d'une part les « connaissances » et les « savoirs » que l'enseignant peut déterminer comme nécessaires ou utiles, sous quelque forme que ce soit, à la résolution des situations qu'il organise pour en susciter la manifestation ou pour les faire apprendre, et d'autre part la nébuleuse des connaissances que le sujet est susceptible d'engager dans cette opération pour l'investir et la mener à bien. Les premières relèvent de l'intention et de l'action du professeur. Elles peuvent être prises en charge dans la théorie des situations didactiques. Elles sont contenues dans la seconde qui me semble correspondre à ce que les psychologues appellent les représentations. Nous ne discuterons pas ici le point de savoir si les représentations peuvent être décrites autrement que comme des connaissances

---

[19] Cette définition rejette le projet constructiviste radical pour la didactique, mais il y a d'autres raisons qui le rendent impossible.

[20] Nous utilisons ici « connaissance d'une notion » son intervention dans une décision, sa mise en œuvre consciemment ou non dans une action, et nous l'opposons à « savoir une notion » les moyens culturels ou personnels réflexifs de reconnaissance de cette notion. La conversion d'un « savoir » en connaissance dans les applications, et inversement la conversion d'une connaissance en savoir sont des processus complexes qui n'ont rien d'automatique, chez le sujet comme dans l'histoire, contrairement à ce que supposent certaines épistémologies empiristes.

relatives à des situations, et donc s'il existe des représentations qui ne sont pas des connaissances.
Nous pourrons utiliser le terme « représentation » pour désigner cette idée de la connaissance en question, idée propre à l'apprenant, idée construite à partir d'idées véhiculées par la culture et travaillées par son expérience « personnelle ». Cette représentation comprendrait non seulement des caractères et des opinions, exacts ou non, relatifs à la connaissance et à la situation en question, mais aussi des caractères et des opinions sur l'institution elle-même et sur les situations d'emploi de la connaissance. Ainsi cette nouvelle définition ferait des représentations des sortes d'accoucheuses de l'apprentissage…
La solution pourrait convenir si elle n'est pas seulement une « fuite en avant », car les mêmes paradoxes peuvent se retrouver en amont. Le rapport entre représentation, connaissance, savoir et action ne peut être bien déterminé en didactique que par des classes de situations identifiables.

5. CONCLUSIONS

Cet article avait pour objet premier de montrer comment la théorie des situations didactiques en mathématiques *aborde* l'étude du fonctionnement et de l'enseignement d'une notion mathématique comme celle de représentation et d'homomorphisme. Il devrait se prolonger par le recensement, la discussion, la confrontation et la reprise des nombreux et riches travaux qui ont étudié l'utilisation de représentations particulières, dont nous avons essayé de montrer que chacune peut être modélisée par une situation spécifique. Comment la modélisation en termes de situation permet-elle de juger des avantages et des inconvénients de l'introduction d'une représentation dans l'étude, l'apprentissage ou l'enseignement de telle ou telle notion mathématique ? Est-il intéressant de glisser à nouveau une étude générale des représentations comme cela avait été tenté en d'autres termes dans les années 60/70[21] ?

Le lecteur n'y trouvera qu'un exemple simple d'emploi de cette modélisation, de ses prolongements et de la méthodologie, pour un sujet « élémentaire » mais fondamental : la genèse de la représentation à l'école. D'aucuns pourront penser que la contingence sur laquelle s'appuient nos réflexions est bien mince. C'est pourquoi, nous évoquons dans une annexe, des exemples plus avancés et les questions de didactique qui leur sont liées.
La généralité même de la notion de représentation, au cœur de la modélisation, et la grande variété de ses manifestations – arguments pour certains en faveur de son enseignement – risquent de générer des méprises et des déceptions. L'enseignement d'une représentation, même correcte et riche ne se justifie pas toujours, intérêt insuffisant ou substitution illégitime. L'analyse des situations propose des moyens de contrôler leur usage et notamment leur usage rhétorique Comment déceler et éviter les glissements méta didactiques, les ostensions douteuses [Brousseau 1998], les abus de l'analogie, les débordements de l'usage des métaphores et des métonymies etc. Il ne s'agit pas de diminuer l'importance de l'emploi des représentations mais d'augmenter leur adéquation. L'étude du fonctionnement des représentations ouvre la voie à une méthode pour en contrôler l'usage : déterminer quand elles sont utiles, quand elles sont superflues et quand elles sont nocives.

[21] D'ailleurs, la notion de représentation est si répandue et si « facile » à invoquer que le risque est grand de voir ce terme absorber l'ensemble des activités didactiques et de leur résultats, comme le mot « structure » dans les années 70, ou comme « modélisation » plus récemment.

Un premier résultat de notre étude conduit à distinguer les représentations comme *objets d'enseignement* et comme *moyens heuristiques enseignés a priori*, et les représentations et tentatives de représentations comme moyens effectifs dans l'activité mathématique en cours.
L'examen de ce dernier cas conduit alors à s'intéresser aux rôles complémentaires de ce qui est *similaire* et de ce qui est *différent* dans les univers représentés et représentants. La prise en considération des différences d'efforts que le sujet doit déployer dans l'univers représenté et dans le représentant, entre les difficultés ou les facilités qu'il y rencontre est un argument récurrent classique. Notre étude second résultat, met en évidence l'importance des propriétés logiques et ergonomiques des différentes connaissances dans les situations en présence et donne les moyens de les quantifier.
Mais, essentielles en situation de recherche, lorsque les représentations sont des tentatives, les différences n'apparaissent plus comme pertinentes dans la présentation des résultats établis. Les représentations reconnues deviennent de simples faits et les tentatives échouées doivent être rejetées. Ainsi, troisième résultat, le rôle essentiel que joue la représentation dans la connaissance tend à disparaître dans l'organisation et dans la transmission des savoirs, ce qui appelle des études d'ingénierie didactique pour pallier à cette composante de la transposition didactique.
L'existence et la prospérité du thème de la représentation dans le domaine de la psychologie me semble être une des raisons pour laquelle de nombreux travaux de didactique se sont rassemblés autour de ce thème. Nous avons fermement montré la différence de point de vue entre les deux domaines et mis en suspicion les importations naïves d'un domaine dans l'autre[22]. De nouvelles études devraient être entreprises dans ce sens. Mais il me semble difficile et même illégitime, (contraire à l'éthique, dans son principe) d'importer directement en didactique, des prescriptions, des suggestions ou même de simples concepts issus des sciences cognitives - directement c'est-à-dire sans les intégrer spécifiquement dans une analyse du système didactique.

6. 7. BIBLIOGRAPHIE

ADDA J., « Erreurs provoquées par les représentations », *Publication Université de Sherbrooke (Canada)*, Rencontre CIEAEM, doc. ronéo., 1987, 6 p.
ALSON Pedro (2000) Eléments pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques Thèse Bordeaux 1
ASTOLFI J.-P., « Les représentations des enfants en situation de classe », *Revue Française de Pédagogie*, 1978, n° 4, 126-128.
BAUERSFELD H, & ZAVADOWSKI W : 1981 Metaphors and metonymies in the teaching of mathematics, Occasional paper n°11 , IDM, Universität Bielefeld.
BAUTIER E., ROBERT A., « Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique », *Cahier de didactique des mathématiques*, IREM de Paris VII, avril 1987, n° 41, 40 p.

[22] D'ailleurs suivant les auteurs ce thème peut ne tenir qu'une place très modeste dans la science psychologique comme par exemple dans l'ouvrage pourtant mesuré et rigoureux de WEIL-BARAIS, ou au contraire centrale

BAUTIER-CASTAING E., ROBERT A., « Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques », *Revue Française de Pédagogie*, n° 84, 1988, p. 13-20.

BESSOT A. et RICHARD F. Les souris dans la maison, les bases de l'étude de la représentation en T. S. D. Thèse Université Bordeaux 1 (1979)

BONNET, J .F. RICHARD, GIGLIANO ; Traité de Psychologie cognitive (1990) Tome II Traitement de l'information, types de connaissances et de représentations.

BROIN-FERGUSON Dominique (2002) Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires. (Thèse Bordeaux 1)

BROUSSEAU Guy, Problèmes de didactique des décimaux RdM vol. 2.1, 37-127 (1981)

BROUSSEAU G. (1990). "Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution." in Revue "*Recherches en didactique des Mathématiques*" Vol 9.3 .pp 309-336.

BROUSSEAU Guy *La théorie des situations didactiques en mathématiques* La pensée Sauvage (1998)

BROUSSEAU Nadine et BROUSSEAU Guy « Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire » IREM de BORDEAUX 1986.

CHEVALLARD Y.

M. DENIS in « Le grand dictionnaire de la Psychologie » Larousse (1996) p. 667

CONNE F. Transposition didactique : savoir et connaissance in *Recherches en didactique des mathématiques* vol 12 2/3 221-270 Grenoble la pensée sauvage éditions (1992)

DIENES Z. *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques* OCDL Paris (1970)

DIGNEAU J. M. Création d'un code à l'école maternelle : étude d'un saut informationnel, Mémoire de DEA IREM de Bordeaux (1980)

DOISE W., PALMONARI A., (dir.) *L'étude des représentations sociales*, Paris : Delachaux & Niestlé, coll. Textes de base en psychologie. (1986)

DOUADY Régine, (1986) "Jeux de cadre et didactique outil-objet" in Revue "*Recherches en didactique des Mathématiques*" Vol 7.2 5-31.

EHRLICH S. La notion de représentation : diversité et convergence in *Les représentations* Psychologie Française n°30 vol. 3/4 (1985)

GOLDIN Gerald A, JANVIER Claude, Représentations and the psychologie of mathematics Education The Journal of Mathematical Behavior , 17 (1) 5-24 (1998)

GOLDIN Gerald A, Representation systems, learning, and problem solving in mathematics, The Journal of Mathematical Behavior , 17 (2) 137-165 (1998)

GREER Brian et HAREL Guershon (1998) « The rôle of isomosrphismes in Mathematical cognition » JMB 17 (1) 5-24

GUENTHNER F., SABATIER P., « Sémantique formelle et représentation des connaissances », *Langages*, '' Sémantique et intelligence artificielle'', n° 87, 1987, p. 103-122.

JANVIER Claude, The notion of chronicle as an Epistemological Obstacle to the concept of fonction Education The Journal of Mathematical Behavior , 17 (1) 79-103 (1998)

JANVIER Claude, (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learnig of mathematics* Lawrence Erlbaum associates, (1987)

JANVIER C., « Contextualisation et représentation dans l'utilisation des mathématiques », *in* C. GARNIER et col. (eds), *Après Vygotski et Piaget* : perspectives sociales et constructiviste. Ecole russe et occidentale, Bruxelles : De Boeck, 1994, 129-147.

JODELET D. (sous la direction de), *Les représentations sociales*, Paris : PUF, 1989, 424 p.

JODELET D. in « Le grand dictionnaire de la Psychologie » (1996)

JULO J., *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques* : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement, Rennes : PUR, 1995, 255 p., coll. Psychologies.

KAPUT, James J. Representation systems and mathematics in *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, C. Janvier ed (1987)

LAKATOS, I « Preuves et réfutation » Hermann (1984)

LEMOINE Gisèle, HAGUEL Marie-Jane,: « Harmonie didactique cognitive et mathématique' in *le cognitif en didactique des mathématiques* Les presses de l'Université de Montréal (1999) 295-325

LEMOINE Gisèle, CONNE François (Eds): « Le cognitif en didactique des mathématiques ». Les presses de l'Université de Montréal (1999)

MARGOLINAS Claire, (1998) Etude de situations didactiques « ordinaires » à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. *Actes de la IXe école d'été de didactique des mathématiques* 12 (2/3) 221-270

J. PERES « Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'un activité d'apprentissage scolaire : construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle », IREM de Bordeaux, (1984)

RATSIMBAH-RAJHON Harrisson

Etude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue d'élaboration de situations didactiques (1981) Thèse Bordeaux 1 (didactique)

Contribution à l'étude de hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions. (1992) Thèse Rennes 1 (mathématiques)

RICHARD J.F. BONNET C. GHIGLIONE R. Traite de psychologie cognitive 2 Dunod 1990

ROBERT A., ROBINET J., « Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels », *Cahier de DIDIREM*, Université de Paris VII, 1989, n° 4, 70 p.

ROBERT A., ROBINET J., « Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement », *Cahier de DIDIREM*, IREM de Paris VII, mars 1991, n° 1, 41 p.

SARRAZY Bernard,

- « Représentation » vs « modèle implicite » dans l'analyse des phénomènes d'enseignement. in *Représentation et didactique* Sensevy et Sallaberry Eds Revue des Sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle (2002)
- « Ostension et dévolution dans l'enseignement des mathématiques » in

SCHUBAUER-LÉONI M.-L., PERRET-CLERMONT A.-N., « Représentations et significations de savoirs scolaires », *Journal européen de psychologie de l'éducation*, (Actes du congrès international de Poitiers, juin 1987 : « Le fonctionnement de l'enfant à l'école »),1988 a, numéro spécial hors série, p. 55-62.

G. SENSEVY et SALABERRY M. Représentation et didactique Revue des Sciences de l'Education pour l'ère nouvelle N° Spécial 2002

VAN DORMOLEN Métaphors médiating the teaching and understanding of mathematics in *Mathématical Knowledge : its grows through teaching* Alan BISHOP, Stieg MELIN OLSEN, JOOP VAN DORMOLEN Kluwer academic (1991)

WEIL-BARRAIS Annick L'homme cognitif PUF 1993

VERGNAUD Gérard, A compréhensive Theory of representation for Mathematics Education The Journal of Mathematical Behavior , 17 (2) 167-181 (1998)

VERGNAUD G., « Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation », *Psychologie Française*, Vol 30 3/4, novembre 1985, 245-251.

VERGNAUD G., « Questions de représentation et de formulation dans la résolution des problèmes mathématiques », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, 1988 b, vol. 1, p. 33-55.

WITTGENSTEIN Ludwig, Carnet CC 30-32,1988).]

7. ANNEXE : TRAVAUX EN T.S. SUR LES REPRESENTATIONS

Les représentations en mathématiques dans les années 60-80

En Europe, jusqu'en 1960, les ressources iconiques de l'enseignement des mathématiques se limitaient aux illustrations artistiques et ludiques des ouvrages du primaire et aux traditionnelles figures de géométrie. Si les vecteurs avaient fait une apparition, leur usage restait confiné. Même les tableaux de variations restaient de l'ordre « privé ».
Brusquement cers 1960, grâce à de nouveaux procédés d'impression, les professeurs voient surgir, dans les manuels et dans les articles professionnels, une véritable floraison de représentations iconiques nouvelles : les tableaux, les diagrammes, les graphes, les organigrammes, envahissent les textes et proposent des alternatives intéressantes aux expressions formelles et aux formulations verbales ou écrites en langue naturelle. Ces nouveaux « langages » ayant investi aussi toutes les autres disciplines, les professeurs de mathématique s'interrogent sur ce qui, dans leur apprentissage et le contrôle de leur usage, devrait incomber aux mathématiques, à la logique alors en expansion didactique importante, et à la théorie des langages – en relation avec l'apparition de l'informatique.
Entre 1965 et 1975 les « novateurs » explorent ces possibilités. Quelles sont les notions mathématiques qui peuvent bénéficier de représentations iconiques utiles ? Il apparaît bientôt que l'utilisation des schémas se conçoit mieux sur des sujets nouveaux que sur les sujets classiques. Mais presque toutes les applications effectives sont didactiques, ad hoc et simplement illustratives. De plus l'idée générale est que dans l'enseignement l'image doit servir à montrer ce qu'on ne peut pas facilement définir, et donc elle doit être comprise directement, ne faire l'objet que d'une présentation ou d'une initiation. Des discussions passionnées s'élèvent à propos de l'usage des diagrammes d'Euler, de Venn, de Papy ou de Servais… de leur statut, de leur consistance, et de leur intérêt didactique pour le calcul des propositions.
Il y aura des exceptions, l'exemple le plus notable d'une proposition assez large est peut être celui de Arthur ENGEL avec « l'enseignement des probabilités et des statistiques » (1975), puis avec la mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique (1978)
Avec l'apparition des IREM puis des DEA de Didactique des mathématiques en France, l'étude expérimentale de l'enseignement commence, et en particulier, l'étude de l'usage des représentations iconiques. D'autant que ce point avait été quelque peu négligé.
Le point de vue mis en avant par la TSD sera celui des possibilités, offertes ou limitées, et de l'économie globale d'une représentation.

La théorie des situations didactiques en mathématiques (courte présentation)

Nous allons rapporter ci-après certains des résultats obtenus à propos des représentations, dans le cadre d'une approche qui s'est développée à partir de 1970 principalement à Bordeaux, Marseille, Grenoble puis à Rennes. Il s'agit d'étudier les *conditions* de l'acquisition de chaque connaissance[23] puis de celles de sa diffusion, en considérant que ces conditions forment un système - une *situation* - qui sera modélisée par un « jeu » mathématique. Les comportements des sujets sont supposés être des réponses « adaptatives » à ce jeu. Il convient d'identifier ce jeu, lors d'une observation, ou de l'inventer lorsqu'il s'agit

[23] « Processus de mathématisation » 1972

de concevoir un dispositif. La connaissance déterminée par une situation est celle qui lui fournit la réponse *optimale*.
Chaque connaissance est ainsi définie par sa fonction dans au moins une situation (de chaque type) et les conditions de l'adaptation des sujets à cette situation peuvent être étudiées systématiquement.
Dans la théorie des situations, tout objet et tout concept non premier devra être redéfini par sa fonction dans une situation précise. Aussi aurons nous à définir de cette façon ce que nous appellerons « représentation »
Cette théorie vise à déterminer les conditions (optimales ou non) qui permettent favorisent ou contrarient l'acquisition d'une connaissance déterminée par des institutions, des groupes d'élèves ou des élèves. Elle se présente comme différente et même complémentaire de la psychologie cognitive dans la mesure où dans les mêmes circonstances, et à l'inverse de celle-ci elle étudie les dispositifs et les connaissances, les comportements des sujets étant essentiellement les révélateurs de leurs propriétés. Une propriété typique de cette approche est le caractère spécifique des situations par rapport aux connaissances - a priori aussi diverses qu'elles – La « transférabilité » des observations d'une situation à une autre n'est jamais assurée, tout comme les relations entre deux situations relatives à l'apprentissage d'une même connaissance. De sorte que la structuration des champs de situations n'est pas déterminée par la seule organisation des connaissances.
Par exemple, en classant les situations a priori et indépendamment

- suivant leurs composants et leur structure,
- suivant le type de comportements ou manifestations qu'elles appellent (décision non verbalisée, formulation, jugement de validité, référence)
- suivant les répertoires – sémiotiques ou linguistiques qui génèrent ces manifestations
- et suivant les formes d'apprentissages de ces comportements et de ces répertoires.

on observe que ces classifications coïncident et déterminent des types de situations non didactiques (action, formulation, validation, institutionnalisation…). Ce fut un des premiers résultats de cette approche.

Résumé de travaux relatifs à la représentation s'appuyant sur la TS.

Nous allons rapporter ci-après des extraits de quelques travaux qui en illustreront la problématique et les méthodes. Aucun de ces travaux ne traite explicitement de la représentation. Le terme est à l'époque à la fois trop général (voir liste des acceptions) et trop familier. Il est évident qu'il s'agit de représentations même si les termes aujourd'hui habituels, les questions, le vocabulaire, les méthodes sont différents. Il me semble néanmoins que les apports de ces travaux qui se sont révélés intéressants pour l'éducation mathématique, ne manquent pas d'intérêt non plus pour un débat sur les représentations.
Nous aurions pu regrouper ces travaux et leurs résultats en fonction de leur objet :

- études de certains langages, notamment iconiques, graphiques ou « analogiques » et de leur place dans la connaissance,
- études de la représentation c'est à dire de la mise en rapports « objectifs » de ces langages avec différents milieux, rapports déterminés par des situations spécifiques.
- études de la représentation comme objet d'étude pour un sujet, comme moyen d'action, de communication, de preuve, ou comme référence etc.
- études de la représentation comme moyen d'apprentissage mis en œuvre spontanément ou en situation didactique
- études de la représentation comme moyen implicite d'enseignement, de définition, d'explication, de répétition etc.

- études de la représentation comme objet d'enseignement, comme savoir, comme moyen heuristique explicite

Nous préférons les présenter en annexe dans leur ordre chronologique pour faire apparaître une certaine logique de la recherche en T.S.D. et n'étudier qu'une seule recherche.

A BESSOT ET RICHARD.

Les souris dans la maison, les bases de l'étude de la représentation en T. S. D.

Annie BESSOT et Françoise RICHARD étudient la modification ou la stabilité des procédures (structure et champ d'utilisation) des élèves lors de l'usage de divers types de schémas dans des situations problèmes (1979). Elles présentent aux élèves différentes représentations de labyrinthes (graphique, analogique, logique : liste de conditions) et recherchent les variables de commande qui modifient leurs stratégies. Elles utilisent aussi les graphes pour représenter ces stratégies et montrent entre autres résultats une résistance inattendue de la conception « en arbre » et des difficultés à passer de cette conception à celle d'un réseau. Leur thèse est la première à présenter une solide étude mathématique des situations proposées, à mettre en évidence a priori l'importance relative des variables et à signaler l'intérêt des « sauts informationnels pour provoquer des adaptations et des apprentissages. »

Cette thèse met en évidence que les problèmes topologiques et les problèmes logiques interviennent conjointement mais distinctement et quelquefois concurremment dans l'usage des représentations. L'étude des situations conduisant à la mise en place d'un vocabulaire permettant de décrire l'espace et les déplacements d'un mobile dans cet espace est poursuivi dans diverses expériences et notamment par J. PERES : la « tortue plancher » logo à l'école maternelle (1978). Il apparaît que le vocabulaire est insuffisant aussi bien dans le langage scolaire que dans la vie courante. L'étude des représentations topologiques aboutira à la thèse de Grécia GALVEZ. L'étude des conditions de la détermination « logique » des objets et des collections fera l'objet des travaux de J.M. DIGNEAU, de J. PERES puis de C. MAUDET.

L'utilisation des graphes pour décrire à la fois le milieu et les stratégies des élèves soulève une question théorique. Faut-il projeter les modèles de connaissances ou de comportements des sujets et les confondre avec leur « pensée » ? En particulier faut-il accepter de dire que les représentations mentales sont isomorphes à la structuration du milieu qui est mise en œuvre par l'observateur pour décrire ce milieu (la pensée serait « l'image » au sens fort de la réalité)? ou seraient-elles plutôt isomorphes aux modèles de comportements que l'observateur construit pour les prévoir (la pensée d'une image serait structurée comme une image)? Nous nous interdisons cette formulation ambiguë et ne parlons que de modèles (implicites ou non) en distinguant soigneusement modèle de quoi, prêté à quel actant, par quel observateur. Ce qui revient à préciser les situations où ce modèle est valide sans préjuger de sa forme réelle, de sa généralité (comme connaissance), ou de son extension (du nombre de sujets qui le partagent). Ces remarques ne sont pas spécifiques à l'utilisation des graphes.] Elles font ressortir une importante différence d'approche entre la TS. Et celle qui a cours en Psychologie Cognitive.

L'étude des graphes comme aide au raisonnement et comme instrument d'analyse des comportements des élèves bien qu'elle ait fait l'objet de nombreuses petites observations dans les années soixante ne sera reprise que tardivement dans les thèses de DIEZ BARRABES (1991), ORUS-BAGUENA (1992) et de BROIN-FERGUSON (2002)

Les deux grandes voies d'études qui se présentent alors sont

- celle des caractères logiques entreprise par MAUDET, et poursuivie par ORUS-BAGUENA.

- celle des caractères topologiques et spatiaux, entreprise par BERTHELOT et SALIN (le jeu de la moufle) puis par GALVEZ, et poursuivie à nouveau par BERTHELOT et SALIN

Mais déjà le fonctionnement didactique des schémas et des dessins a retenu l'attention de RATSIMBA-RAJHON qui signale les inconvénients – et les avantages – de l'*ostension* comme procédé didactique. Les professeurs « présentent » un objet : le dessin d'un arbre ou d'un carré par exemple, pour en signifier un autre : la forêt ou bien le carré mathématique. Le plus souvent l'objet présenté est un élément de la classe évoquée.
L'étude de l'usage des graphes de fonctions apparaît dans la thèse de EL BOUAZZAOUI (1988) relative à la continuité des fonctions, puis dans celle de LACASTA (1995) et dans celle d'ALSON qui régénère l'étude de la signification des graphes.

B. La « publication » des recherches de BROUSSEAU, DIGNEAU et PERES dont nous avons rendu compte dans le texte, se place après celle de BESSOT et RICHARD et avant celle de MAUDET.

C. MAUDET Le jeu du portrait, la logique au début du primaire

Camille MAUDET (1982) étudie les situations et les processus de l'apprentissage d'une fonction logique. A cette occasion il examine les propriétés de la situation « jeu du portrait ». Ce jeu est le paradigme des situations de représentation, bien que la construction d'un prédicat pour déterminer une classe d'objets par le jeu de connecteurs logiques ne paraisse pas un exemple très typique de représentation telle qu'on la comprend habituellement aujourd'hui.
Le jeu se joue à deux élèves coopérant. Les deux élèves possèdent chacun un exemplaire de deux collections d'images.

- La première, appelons la U-é, constitue l'univers des représentés, elle est composée d'images présentant des objets, des personnages, des paysages, des figures etc. Cet univers peut être plus ou moins diversifié
- l'autre appelons la U-ant constitue l'univers des représentants. Elle est composée d'un répertoire d'images de « description » : couleurs, formes, tailles, icônes, symboles divers. Un répertoire qui doit servir à évoquer des images de l'univers U-é

Le premier élève E (comme émetteur) choisit dans U-é une image I qui n'est pas vue par son partenaire R (comme récepteur). Il la dissimule dans une boîte. Ensuite, il présente successivement à ce partenaire, une suite d'images du répertoire des représentants U-ant, avec l'espoir que le partenaire pourra deviner ou identifier l'image cachée. Quand R croit avoir trouvé il choisit une image et la dissimule dans une boîte. Un arbitre alors ouvre les deux boîtes. Si elles contiennent « la même » image, les deux joueurs ont gagné, sinon ils ont perdu.
Il est clair que la constitution de l'univers U-é et du type de répertoire joue un rôle essentiel dans le choix des systèmes sémiologiques mobilisés par les élèves et que tous les systèmes sémiologiques peuvent être analysés dans des situations de ce genre.
Ce « jeu » réalise ce que nous avons défini ailleurs comme la « situation de représentation objective ».
MAUDET s'intéressait principalement à la mise en œuvre des opérations logiques dans une perspective de recherche et aussi d'ingénierie. A une époque où l'attention des professeurs était attirée, en particulier par les travaux de DIENES, sur la possibilité de « construire » des prédicats complexes à partir de prédicats « plus simple », son dispositif permettait aussi bien aux élèves d'apprendre à analyser leurs prédicats amalgamés spontanés et « d'inventer » les connecteurs nécessaires suivant le processus dévoilé par les travaux de WERMUS. Le dispositif permettait aussi de déterminer des collections de personnages par des collections de

signes et fut réifié dans beaucoup de travaux. La recherche n'avait pas pour ambition l'étude du dispositif, ni celle de son rôle détaillé dans l'apprentissage de la logique. Mais elle a proposé une alternative aux enseignements qui demandaient aux élèves d'avoir compris une notion pour comprendre l'énoncé des problèmes où elle pouvait intervenir, ou qui prétendaient les faire abstraire dans des présentations réitérées. Elle montrait le jeu des possibles et des impossibles et un rôle de la représentation sur lequel nous reviendrons.

D. GALVEZ L'oculus dans la nappe et le macro espace

Les enfants de Mexico ont des difficultés à se repérer, à s'orienter et à retrouver leur chemin dans la ville. Sur proposition de la mairie, Grécia GALVEZ (1985) étudie un programme d'enseignement et d'apprentissage approprié.

La situation qui modélise les rapports avec l'espace fait apparaître, par le jeu des variables, au moins trois types de milieu auxquels peuvent correspondre des conceptions différentes (certains parleraient de représentations mentales de l'espace). Le milieu micro-spatial est celui des petits objets solides que l'on déplace par rapport à soi, de leurs positions relatives, des distances qui sont des longueurs, faciles à mesurer… Le milieu meso-spatial celui des déplacements du sujet par rapport à un espace matériel fixe sous le contrôle de la vue. Le milieu macro-spatial, celui des déplacements dans un espace dépassant largement le contrôle visuel, conçu par des recollements de points de vue locaux.

C'est pour ce dernier qu'il convenait de développer des moyens de représentation, d'orientation, de vocabulaire de l'orientation et des déplacements, et de connaissance de la structure de la ville. Mais il n'était pas possible d'effectuer ces apprentissages sur le terrain. Il fallait donc concevoir une situation qui fasse simuler assez bien les problèmes du macro espace dans le micro ou le meso-espace. La solution proposée par GALVEZ est une famille de situations. Elles utilisent une nappe opaque munie d'un petit oculus qui ne permet de voir qu'une petite région d'un paysage ou d'une carte, placés sous la nappe. Le sujet peut déplacer l'oculus mais doit intégrer les informations qu'il recueille et les organiser. Cette situation permet de faire des relevés, de communiquer des informations, de diriger des déplacements etc. et d'articuler un réseau primaire (grands axes et organisation d'ensemble) et un réseau secondaire (rues d'un quartier). Le vocabulaire nécessaire pour concevoir et communiquer les déplacements dans la ville est celui qui décrit les mouvements relatifs de six systèmes de référence.

La mise en expérience de ces situations montre leur faisabilité, une assez bonne efficacité et la réalité des trois conceptions (le meso-espace se subdivise en espace urbain (un graphe), campagnard (un plan avec des « objets fixes » en tous points) et maritime (un plan sans points fixes). Elle fournit en outre nombre d'observations d'ordre psychologique.

Il apparaît aussi que l'enseignement de la géométrie à l'école primaire n'est pas approprié à la connaissance des relations spatiales. L'articulation avec l'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire n'est qu'ébauchée, elle sera reprise par la suite par R. BERTHELOT et M.H. SALIN.

E. Les représentation en analyse, en algèbre et en géométrie

Habiba EL BOUAZZAOUI (1988) Etudie les conceptions des mathématiciens des élèves et des professeurs à propos de la continuité des fonctions, ce qui la conduit à en repérer que nous dirions aujourd'hui liées à des représentations. Les conceptions des fonctions, géométriques ou graphiques (Leibniz) précédent et succèdent parfois (J. Bertrand) a des conceptions différentes : arithmétiques (Euler, Cauchy, Weierstrass), ou topologiques (Baire). Elles servent d'appui à la connaissance de la continuité, mais elles se constituent en obstacles épistémologiques, en particulier celui liés à l'usage des représentations graphiques. En

exemple de ce cas, elle rappelle l'erreur de Joseph Bertrand qui pensait, à l'aide du graphe de la tangente, démontrer que toute fonction continue est dérivable.

Mercedes DIEZ BARRABES (1991) étudie la symbolisation algébrique et la modélisation graphique des langages mathématiques. En application d'une étude et d'une expérience elle propose l'introduction à l'algèbre par les inéquations.

René BERTHELOT et Maris Hélène SALIN (1992) puis Dilma FREGONA (1995) étudient les rapports de l'apprentissage de la géométrie avec celle de l'espace et le rôle du milieu mobilisé pour cela. Dilma FREGONA regarde plus précisément le plan euclidien comme milieu de la géométrie plane.

F. Phénomènes didactiques

Harrisson RATSIMBAH-RAJHON (1992) étudie les procédés didactiques ostensifs. Il montre les limites de l'ostension.

Joël BRIAND (1993) étudie l'apprentissage de l'énumération. Ce qui le conduit à examiner les rapports des enfants avec la disposition des ensembles et les mises en ordre nécessaires à l'énumération. L'énumération est une forme de représentation ou même de description au sens d'ALSON.

G. Les représentations des fonctions

Eduardo LACASTA (1995) étudie l'usage des graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Il compare notamment les difficultés liées aux représentations graphiques, aux tableaux de variation, aux représentations formelles, et à la formulation en langue naturelle. Il montre notamment que la compréhension d'un concept tend à dépasser les types de formulation. Ce qui est compris dans un langage est généralement compris dans les autres.
Pedro ALSON (2000) propose dans sa thèse pour les étudiants, une méthode d'étude des fonctions réelles d'une variable réelle basée sur l'expression algébrique de leurs transformations. Chaque opération dans l'espace des fonctions correspond à une transformation dans l'ensemble de leurs graphes :
$f(x) \rightarrow f(x + a)$, $f(x) \rightarrow f(x) + B$, $f(x) \rightarrow f(ax)$, $f(x) \rightarrow af(x)$, $f(x) \rightarrow f(1/x)$ etc.
sont représentées par des translations verticales ou horizontales, par des symétries, etc. La somme, la composition, l'inversion, le produit, le quotient de fonctions sont aussi représentables. Ces transformations peuvent être construite par des « chemins » de x à f(x) ou de y à $f^{-1}(y)$ dont la connaissance et la formalisation donne un accès « concret » et nouveau, non seulement à l'espace des fonctions « scolaires », mais aussi aux grandes notions qui les concernent : dérivées, limites, continuité, etc. Cette méthode d'enseignement dite « de graphication », facilite l'interprétation algébrique des représentations visuelles cartésienne, la résolution des équations et des inéquations à une ou deux variables etc. Elle est typique de ce que peuvent produire les recherches en T.S.D. Elle a été expérimentée à l'Université Centrale du Venezuela puis à celle de Pau où I. BLOCH a repris l'étude.
L'auteur montre d'autre part que sa « représentation » des graphes de fonctions n'est pas seulement une ingénierie qui joue habilement sur l'utilisation de répertoires visuels de façon plus efficace et qui aboutit à une meilleure utilisation de la représentation cartésienne directe. Il montre que cette ingénierie est l'application d'une méthode très générale, très utilisée en mathématique, et utilisable en didactique. Cette représentation que l'auteur caractérise

formellement comme une « description » (différente toutefois des descripteurs s'apparente à celle utilisée par Dedekind pour axiomatiser la droite réelle ou à celle de Boole pour élaborer l'algèbre des propositions.

Isabelle BLOCH. (2000) Dans sa thèse sur l'enseignement de l'analyse[24], examine la notion de fonction. S'appuyant sur l'opinion qu'en mathématiques « les objets ne sont accessibles qu'au travers de représentations et que leur traitement n'est possible que par ces représentations » elle fonde sa quête d'un milieu utilisable pour l'étude des fonctions sur les travaux de Chevallard sur les ostensifs et sur ceux de Duval sur les registres de représentation, considérés comme collections d'ostensifs. De là elle tire une définition d'un *représentant* d'une fonction, comme outil sémiotique et spécifie à son propos les notions de *conversion* d'un registre à un autre (conversions congruentes ou non) et de *traitements* internes aux registres. Elle observe avec Rogalski que ces représentants ont des caractères réducteurs et producteurs.

Ces prolégomènes lui permettent alors d'étudier de façon détaillée la fonctionnalité – isolée- de chacun de ces représentants : registre numérique et de tableaux, tableaux de variations, registre géométrique, registre algébrique, registre formel et registre graphique. Pour chacun elle examine les ostensifs, leur utilisation classique leurs difficultés et leurs potentialités pour l'étude des fonctions.

Elle étudie ensuite les « changements » de représentants, la problématique du changement et l'évolution des connaissances associées à ces changements, ou plus précisément à l'évolution des praxéologies associées aux représentants successifs (qu'elle identifie aux « répertoires » proposés Florence Genestoux dans sa thèse). Cette dernière partie lui permet d'illustrer son étude par une classification générale des exercices et problèmes par rapport aux registres et aux changements de registres, conversions et traitements que l'on peut rencontrer dans l'enseignement.

Dans ce chapitre Isabelle Bloch conjugue très finement les apports récents des différents courants des recherches françaises en didactique, et en tire le meilleur parti.

Il me semble toutefois qu'il serait intéressant de s'interroger sur ce que le point de vue de la théorie des situations apporterait sur l'objet de ce chapitre et de confronter ses questions et ses réponses à celles-ci.

H. L'organisation des résolutions et les raisonnements

Dominique BROIN (2002) étudie dans sa thèse diverses formes de représentations « diagrammatiques » (pour les distinguer des représentations classiques) des opérations et des raisonnements arithmétiques et algébriques élémentaires : les diagrammes eulériens, et sagittaux. Ces représentations lui permettent d'analyser le passage d'une pratique et d'un apprentissage à l'autre.

BIBLIOGRAPHIE (THESES évoquées ci-dessus)

BESSOT Annie et RICHARD Françoise (1979). Commande de variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement des procédures en vue d'étudier le rôle du schéma.

DIGNEAU, Jean.Marie.(1980) Création d'un code à l'école maternelle

[24] L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université, Savoirs connaissances et conditions relatives à la validation Thèse de l'Université Bordeaux 1 (2000)

MAUDET Camille (1982) Les situations et les processus de l'apprentissage d'une fonction logique.
PERES Jacques. (1984) Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'apprentissage scolaire : construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle.
GALVEZ. Grécia (1985). Apprentissage de l'orientation dans l'espace urbain
EL BOUAZZAOUI Habiba
(1982) Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération. Relations entre divers caractères de ses situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions.
(1988)
DIEZ BARRABES Mercedes (1991) Sur la symbolisation en algèbre, application à, l'apprentissage des inégalités dans l'enseignement secondaire.
BERTHELOT René, SALIN Maris Hélène (1992) Représentation de l'espace chez l'enfant et enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire.
ORUS-BAGUENA Pilar(1992) Place de la logique spontanée des élèves dans le contrat didactique : rôle possible d'un enseignement en analyse typologique dans la scolarité.
RATSIMBAH-RAJHON Harrisson
Etude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue d'élaboration de situations didactiques (1981) Thèse (didactique)
Contribution à l'étude de hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradictions. (1992) Thèse (mathématiques)
BRIAND Joël (1993) L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique.
FREGONA Dilma (1995) Les figures planes comme "milieu " dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques.
LACASTA Eduardo (1995) L'usage des graphes dans l'enseignement
BLOCH Isabelle (2000) L'enseignement de l'analyse au Lycée : la notion de limite.
ESMENJAUD-GENESTOUX Florence. Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques
ALSON Pedro (2000) Eléments pour une théorie de la signification en didactique des mathématiques Thèse Bordeaux 1
BROIN-FERGUSON Dominique (2002) Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires