

Les erreurs des élèves en mathématiques

Etude dans le cadre de la théorie des situations didactiques¹

I. Principes de l'analyse

Envisagées dans le cadre de la théorie, les situations didactiques sont des systèmes plus ou moins simplifiés qui modélisent les relations et les activités réelles des protagonistes. Les protagonistes sont eux-mêmes des sous-systèmes qui peuvent directement influencer les autres par leurs changements d'états, volontaires ou non. Ce sont les actants intentionnels (par exemple le professeur, l'élève, etc.) et le « milieu », dénué d'intentions didactiques particulières mais qui réagit suivant ses propres lois.

La méthode d'étude d'un concept de mathématique ou de didactique dans ce cadre consiste à le « définir » par des interactions caractéristiques (dans ce que nous appelons la « situation objective ») et à suivre les effets de ces interactions sur les différentes composantes du système didactique (les différents niveaux de l'analyse du milieu, par exemple).

Nous allons donc, dans un premier temps, définir l'erreur dans le système minimal adidactique (un sujet : l'élève, un milieu : un problème, une action : l'erreur) et dans le système didactique minimal. Ensuite, nous examinerons le rôle et l'influence de l'erreur sur tout le système didactique, en remontant les différents niveaux de la structure du milieu (Brousseau, Margolinas). C'est-à-dire en simplifiant un peu : l'influence de cette erreur sur la situation d'apprentissage (ou d'adaptation) du sujet, son influence et son rôle dans la situation didactique, et enfin son rôle dans la régulation que le milieu (noosphérique) exerce sur l'enseignement lui-même.

Munis de ces définitions, nous essayerons de dégager les caractères principaux et les types des erreurs que l'on pourra observer dans les pratiques effectives d'enseignement et d'en tirer des explications et des prévisions des phénomènes qu'elles suscitent, et peut-être d'en inférer quelques pratiques utilisables.

II Définitions

L'erreur dans un système adidactique minimal

Pour « définir » une erreur il faut d'abord envisager un premier actant, engagé dans une première situation. Il cherche à accomplir une tâche déterminée ou à obtenir un certain résultat déterminé, par l'emploi de moyens complètement ou incomplètement connus de lui. Le résultat visé est un certain état du milieu (la réussite).

Les écarts entre les états actuels du milieu et le projet de l'actant sont interprétés par lui après chaque action à l'aide d'indices et de connaissances qui dirigent ses décisions. Ces connaissances lui fournissent une représentation anticipée du résultat des actions qu'il envisage. Ainsi, certains écarts sont jugés positifs parce que l'actant les interprète comme des étapes, en progrès, vers le résultat. D'autres seront jugés négatifs par le sujet lui-même parce qu'il y a un écart entre le résultat anticipé et le résultat observé.

Dans ce cas, l'actant peut suspecter ses connaissances d'être fausses ou inappropriées, ce qui revient à considérer sa décision comme une erreur, mais il peut aussi penser que c'est le milieu qui est « responsable » de cet écart (il ne suit pas les règles convenues ou supposées, ou il réagit au hasard, ou avec une intention maligne). Si l'action est malencontreuse, mais s'il n'était pas possible d'en prévoir une meilleure, elle ne peut pas être reprochée au sujet. Par exemple, on ne peut pas dire que jouer le noir à la roulette était une erreur parce que c'est le rouge qui est sorti.

Cette observation conduit à dédoubler le système : un premier actant agit dans une première situation suivant les règles de la situation et ses connaissances propres, un second qui peut être la

¹ Je remercie Ruhel Floris et Alain Mercier de l'aide précieuse qu'il m'ont apportée pour sortir cet article des cartons et pour l'achever.

même personne mais dans un autre rôle - porte un jugement sur l'action du premier actant et classe ses décisions en « bonnes décisions », ou « mauvaises décisions » et ces dernières en trois classes :

- Les écarts imprévisibles (entre l'espoir et la réalité).
- Les erreurs objectives : il existe un moyen de prévoir la bonne décision, mais le sujet ne la connaît peut-être pas.
- Les erreurs du sujet : le sujet connaissait un moyen de déterminer la bonne décision mais il ne l'a pas utilisée ou l'a mal utilisée.

En réalité, la séparation n'est pas si claire, surtout en situation didactique : les actants, aussi bien les élèves que les professeurs, peuvent penser qu'il y a toujours un moyen de prévoir – ce moyen étant l'objet de l'enseignement - et que par conséquent, tous les écarts sont des erreurs.

Par cette définition, l'erreur est essentiellement une décision dont la production malencontreuse peut être prévue par l'actant et donc corrigée par un apprentissage. La signification de cette erreur sera essentiellement déterminée par les caractères des apprentissages à effectuer pour cette correction : le répertoire de connaissances à construire, le temps que cela prendra, la fréquence et le prix (le coût pour le sujet) de la répétition de cette erreur. Ces caractères ne dépendent pas du sujet, mais des institutions auxquelles il a affaire et de leur culture.

Cette approche fournit un premier champ d'analyse pour la notion d'erreur dans des situations a-didactiques (celles où l'actant se considère a priori responsable de la réussite ou de l'échec de ses actions, sans intervention didactique d'un tiers) : les erreurs dans l'action, dans la formulation, dans la compréhension et dans la preuve ou l'organisation des savoirs.

L'erreur dans un système didactique minimal

Considérons maintenant le système didactique complet, il est composé d'au moins un système « élèves » et d'au moins un système « enseignants ».

Il s'agit d'analyser les effets sur le système entier d'un écart observé entre la réponse de l'élève à sa situation a-didactique et la réponse que souhaitait le professeur.

Le professeur ne devrait imputer une erreur à l'élève que dans le cas où les connaissances nécessaires ont déjà fait l'objet d'un enseignement, et où cet enseignement a été repéré, institutionnalisé par le professeur (qui peut par ailleurs organiser des apprentissages non repérés comme tels par l'élève). Ce type d'erreur sera considéré souvent par le professeur comme une *faute* puisqu'elle engage de la part de l'élève une autre responsabilité que celle de la réussite de l'action a-didactique, mais aussi son action en tant qu'apprenant et surtout en tant qu'élève. Le professeur doit faire du non usage des connaissances enseignées une nouvelle sorte d'erreur, plus lourde de conséquences pour l'élève que l'erreur primitive².

On ne doit pas oublier, à l'occasion, que la science du moment pourrait proposer une réponse différente (mais qui serait inaccessible à l'élève), ce qui met en scène un autre système (la noosphère³ par exemple).

Cette approche fournit un programme d'étude des erreurs résumé ci après. Il est important de noter que l'étude se recentre sur les conditions dans lesquelles une erreur est produite et sur ses conséquences (pour le sujet et pour ses connaissances), et sur les connaissances elles mêmes, et non pas seulement sur l'actant qui produit cette erreur.

Cette méthode d'analyse de l'erreur, ou plutôt des erreurs, est par conséquent fondée sur l'étude de caractères que nous allons décliner ci-après. Ils sont assez différents de ceux qui sont habituellement considérés dans d'autres cadres, notamment dans les sciences cognitives et particulièrement dans la psychologie. Suivant les cas, elle les utilise, les complète, les corrobore ou les contredit.

² Ce qui est obtenu par la technique de l'évaluation notée.

³ La noosphère, la sphère du savoir est l'institution cachée formée par tous les membres de la société qui sont intéressées au savoir à sa production et à sa diffusion : c'est elle qui, de façon plus ou moins diffuse influence les institutions chargées de l'éducation et de l'instruction.

III Typologies d'erreurs et phénomènes didactiques

A Les erreurs de l'élève.

1. Caractères

Ainsi l'erreur sera rapportée à une **situation** précise, elle a un **auteur**, mais cet auteur sera modélisé par un « **actant** », et par un « **joueur** »⁴, déterminés par la façon dont l'auteur est engagé dans une **action**, il existe une connaissance « correcte » qui lui oppose une alternative et il recevra un certain type de **correction** (adidactique ou didactique).

Dans la situation la plus générale - la situation adidactique d'action - l'erreur est une décision telle que

- i) l'actant est en mesure d'identifier cette décision :
 - il a donc une certaine méta connaissance pour la désigner ou la décrire
 - et il peut envisager d'autres choix qu'il aurait pu faire effectivement ;
- ii) l'actant perçoit un rapport causal entre son choix et l'effet observé :
 - ce rapport s'applique donc à une classe plus large de situations
 - et par conséquent il doit proposer au moins des indices qui auraient permis à l'actant de préférer le bon choix au « mauvais ». Ces indices sont donc des moyens (supposés ou réels) d'anticipation ou de prévision ;
- iii) l'actant suppose qu'il peut prévenir le renouvellement de l'erreur en intégrant à son répertoire de connaissances les moyens d'anticipation convenables (ou au moins les indices pertinents dont il est question en ii).. L'erreur est donc supposée être l'occasion d'un apprentissage ;
- iv) dans le cadre du déroulement d'une même situation, l'actant peut le plus souvent reprendre sa décision ou corriger son erreur ou ses conséquences. Dans le cas contraire on utilisera le terme « échec » (de l'action).

Nous étudierons plus loin l'échec dans les situations didactiques. Mais dès maintenant il convient de distinguer dans les situations a-didactiques, les erreurs qui conduisent à l'échec de la situation des erreurs qui ne conduisent pas à l'échec : par exemple certaines erreurs se compensent, ou ne modifient pas la conclusion. L'élève ne peut pas alors les constater « par lui même » dans le cadre a-didactique. Seul le professeur (ou un camarade) peut les lui signaler, dans une relation « didactique ».

Remarquons aussi que dans cette perspective, aussi bien qu'à son auteur, une erreur doit être rapportée à un **moment** précis d'une **situation**, et à une **connaissance** ou à un savoir déterminés qui permettent de la concevoir. En Théorie des Situations (T. S.), la plupart des caractéristiques de l'**auteur de l'erreur** (physiques, psychologiques, sociologiques, scolaires) passent au second plan. L'analyse initiale suppose que l'auteur est modélisé par un actant, c'est à dire un sujet épistémique quelconque⁵.

La Théorie des Situations soumet à des conditions méthodologiques précises l'extension de l'observation d'une erreur à d'autres moments, à d'autres situations, à d'autres connaissances, à d'autres élèves. Elle rejette les agrégations arbitraires et non justifiées.

⁴ Nous avons été amenés à distinguer à l'occasion le *joueur* de l'*actant*. L'*actant* est le sujet rationnel qui joue selon les règles du milieu et qui optimise son jeu, le *joueur* est un sujet psychologique qui décide ou non d'être l'actant d'un jeu déterminé. Par exemple dans des jeux comme la bataille, ou le pile ou face en solitaire, l'actant n'a aucune décision à prendre, les règles ne lui laissent aucun choix ni aucune stratégie. Seul le joueur prend une décision : celle de jouer ou pas, de lancer la pièce ou non, pour savoir s'il a de la chance, pour passer le temps sans réfléchir etc. (cf. Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques » conférence de Guy Brousseau au Colloque « Rallyes mathématiques, Jeux Compétitions »..Toulouse Juin 2001.

⁵ En didactique, on ne considère a priori, et essentiellement, que les erreurs « de bonne foi », celles pour lesquelles on suppose que l'élève les a produites en leur attribuant un sens et donc qui, pour lui, sont des pensées correctes. Il en est de même, nous le verrons plus loin, pour les erreurs didactiques du professeur, mais cela n'exclut pas d'analyser le rôle de l'élève comme joueur par le moyen de la psychologie.

2. *Utilité et nécessité de l'erreur dans l'action et dans l'apprentissage*

Dans l'enseignement comme dans la vie courante, l'erreur est essentiellement perçue négativement : elle est décevante et coûteuse. L'échec pouvant être vu comme le résultat d'erreurs, l'erreur est prise comme un indice d'échec. C'est d'ailleurs pour éviter les erreurs que l'on développe des savoirs et des techniques, et qu'on les enseigne. L'enseignement classique faisait tout pour bannir l'erreur dans toutes les composantes de l'activité des élèves et des enseignants.

Pourtant, dans toutes les théories modernes de la **construction** des connaissances, théories psychologiques ou épistémologiques, de Poincaré à Skinner et à Piaget et à Bachelard, et sous des formes diverses, le rôle de l'erreur dans l'adaptation, et donc dans l'apprentissage a été signalé comme fondamental : le jeu des essais et des erreurs conduit à une adaptation empirique aux conditions et assure l'acquisition, aussi bien des comportements pour Skinner que des théories scientifiques pour H. Poincaré (la science fabrique a priori des théories que l'expérience invalide ou non).

Le fait que la connaissance de certaines erreurs, effectivement commises par le sujet lui-même, observées chez d'autres ou simplement envisagées, soit non seulement utile mais nécessaire à l'apprentissage peut s'établir aussi en théorie des situations. Le fonctionnement naturel d'un sujet dans des situations différentes le conduit pour des raisons ergonomiques à utiliser ses connaissances dans des circonstances incertaines, puis à les modifier suivant divers processus tels que les simplifications pour faciliter l'usage, les complexifications pour étendre le champ d'utilisation etc.

L'enseignement et la pédagogie n'ont que très imparfaitement tiré les conséquences de ces travaux que ce soit en acceptant de façon inconsidérée l'apparition d'un nombre ingérable d'erreurs (sous couvert de situations d'activités « libres ») ou en voulant les « contrôler » par des évaluations formelles. Nous reviendrons sur ces problèmes dans la troisième partie de ce texte.

En fait, le caractère nécessaire, utile, indifférent, nuisible ou exécrationnel des erreurs dépend d'un grand nombre de facteurs et de circonstances qu'il est essentiel d'étudier en didactique. L'analyse en termes de T. S. est le seul moyen d'adapter les apports des sciences humaines en évitant les importations injustifiées.

En fait les erreurs sont une entrave à l'apprentissage et à l'enseignement dans un certain nombre de cas que la T.S.D (la théorie des situations didactiques) permet d'énumérer en les rapportant aux différents systèmes en jeu et à l'étape des processus qu'elles perturbent.

Nous n'en donnons ci après que quelques exemples

a) lorsque les erreurs sont non pertinentes : il ne peut être établi aucun rapport entre elles et la connaissance en construction (qu'elles soient dues à des circonstances périphériques ou à un engagement superficiel de l'actant).

Dans l'action a-didactique, elles forment des distracteurs. Leur correction non seulement n'apporte rien, mais encore prend du temps et détourne le processus. (Mais la distinction pertinent / non pertinent n'est pas toujours évidente). Au niveau de l'actant elles semblent dépendre entre autres de la capacité du sujet à se soustraire à d'autres préoccupations. Elles dépendent sans doute de sa capacité de « concentration ».

Cette capacité est aujourd'hui fortement influencée par divers facteurs. Par exemple le débit et la dispersion des informations dans les médias, leur séquençage initial et la pratique du zapping habituent les élèves à des rythmes hachés et à des formes de communication peu propices au raisonnement et à la méditation. Des préoccupations, des habitudes et des répertoires non pertinents sont promus, pour des raisons quelconques, à des niveaux sans rapports avec leur utilité dans les activités ordinaires. Ils font alors intrusion de façon erratique, non pertinente, et surtout incontrôlée dans l'activité de l'élève. Parfois ils contribuent à soulager momentanément sa tension, mais la plupart du temps le sujet doit faire des efforts aussi pénibles que souvent inutiles pour se soustraire à leur action.

Leur effet est accru dans les phases collectives ou didactiques, pour peu que la situation didactique permette l'initiative et l'expression personnelles. Leur « puissance » culturelle leur donne immédiatement une prise sur l'ensemble des élèves. Le retour à la situation en cours est à la charge du professeur, Elle est vécue par les élèves comme une obligation extérieure d'autant plus pénible que sa signification propre et le plaisir qu'elle pouvait procurer ont été détruits.

b) Lorsqu'elles sont pertinentes mais si *nombreuses*, si variées ou si complexes à rectifier et qu'elles ralentissent tellement l'action, que celle-ci devient impossible et échoue ; Cela se produit lorsque le problème est trop complexe pour le répertoire des élèves, ou lorsque ce répertoire, insuffisamment exercé, est trop peu fiable pour l'élève, ou encore lorsque le professeur alourdit le traitement de ces erreurs par des reproches, des explications, des corrections et des exercices excessifs ;

c) lorsqu'elles *persistent*, que ce soit chez un même élève ou simplement dans la classe, de façon plus ou moins sporadique.

d) Elles résistent aux corrections classiques.

e) dans un autre ordre d'idée, lorsque la représentation ou la culture donnent à ces erreurs une signification, une importance, une résonance telles qu'elles *découragent* l'élève ou le professeur

Il y a bien d'autres circonstances qui produisent ces effets

Pour illustrer ce propos, on peut observer une des influences de la psychologie cognitive sur l'enseignement. La première a considéré que les capacités de « l'esprit humain » à généraliser et à appliquer, étaient *des* (et pour certains *les*) mécanismes fondamentaux de la pensée. Les professeurs (et certains pédagogues comme Z. Diénes) ont ainsi été conduits à surévaluer le rôle de ces capacités dans l'apprentissage, à le généraliser et à le systématiser, à le considérer indépendamment des connaissances en jeu et des circonstances. Parallèlement, cela a conduit à sous-évaluer les difficultés de ces « transferts » et de ces applications qui, sous le prétexte d'être la base universelle de la pensée, étaient exigés des élèves comme des évidences.

L'histoire et l'épistémologie des mathématiques montrent pourtant la complexité de leurs caractères culturels, la lenteur et les errements de ces processus. Donner un statut scientifique à des ressemblances peut prendre des siècles à l'humanité, et résoudre un problème par application des connaissances déjà obtenues, aussi. Les professeurs exigent souvent que leurs élèves acceptent comme des évidences la reconnaissance et la compréhension de certaines propriétés qui leur sont familières (comme par exemple la division d'un décimal par un autre). Alors que beaucoup d'entre eux seraient incapables « d'appliquer » ces propriétés dans un environnement nouveau (comme la division dans les *p*-adiques), sans de grandes difficultés comparables à celles de leurs élèves.

La genèse des erreurs suit les mêmes lois que la genèse des connaissances « bien faites », seules les conditions sont différentes. Des conceptions se créent au gré des activités propres, des enseignements et du développement de l'élève, certaines se révèlent plus ou moins inadaptées ou fausses pour certains usages (« *misconceptions* »). Pourquoi ?

Par le jeu naturel du fonctionnement normal de la pensée. Un élève utilise le modèle implicite le plus simple qui ne reçoit pas de désaveu : il ne retiendra par conséquent – et légitimement – que le minimum des conditions d'un théorème : celles qui pourront apparaître ou non. Si certaines conditions sont toujours effectivement réalisées, les retenir relève d'un goût arbitraire pour le savoir formel. Exemple : Si toutes les fonctions étudiées à un certain niveau scolaire ne sont discontinues qu'aux points où elles ne sont pas naturellement définies, il y a de grandes chances pour que les élèves économisent en confondant les deux concepts.

D'autre part, une conception erronée n'est pas une collection de connaissances fausses. Toutes les conceptions effectivement étudiées présentent tôt ou tard des faiblesses. Les didacticiens en ont déduit que, pour comprendre les conditions d'existence et de maintien des connaissances et des erreurs, il fallait étudier leurs « *écosystèmes* », in se, méthode qui relève de l'agrégation de situations et non plus de modélisations locales.

3. Typologie suivant le type d'interaction et de répertoire engagé

En suivant la typologie des situations a-didactiques on fait apparaître

- des erreurs de décisions relatives à l'action en cours, (elles se rapportent principalement au répertoire des connaissances et des modèles implicites d'action (« des théorèmes en actes »)).

Exemple : l'élève qui écrit $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$ au cours d'un calcul peut le faire

- parce qu'il croit vraiment que $(a-b)^2 = a^2 - b^2$, simplification pour assurer la « conservation ostensive, ou confusion avec une autre identité remarquable
- ou alors parce que bien que sachant que $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a.b$, la difficulté de la substitution a par \sqrt{a} le lui a fait oublier
- ou parce que ça arrange trop bien un résultat simple comme ceux que le professeur semble attendre d'habitude...
- des erreurs de formulation, dans les communications nécessaires à l'action ou qui l'accompagnent, (elles se réfèrent à l'usage des langages divers, y compris iconiques par exemple pour la géométrie)

Exemple : « la proportion 1,5 pour 3 est la même que la proportion 5 pour 10 » ; « le coefficient de proportionnalité de 2 et de 3 est 2/3 ». Des formulations approximatives peuvent ne pas entraver la pensée dans un premier temps, mais elles rendent difficile l'examen de cette pensée et ses explications et d'ailleurs toutes les situations réflexives. Tenir pour équivalentes des formulations effectivement différentes, utiliser un terme pour un autre, un terme trop général pour un usage particulier ou un terme trop particulier pour un objet général, utiliser une métaphore au lieu d'une description précise etc.

- des erreurs d'interprétation, de compréhension, d'explication qui apparaissent dans les débats à propos de l'action (elles se réfèrent à la conception des élèves et aux savoirs).

Exemple : l'élève calcule avec des vecteurs ou avec des matrices comme avec des nombres réels sans discernement.

Chaque type relève de formes de connaissances ou de répertoires différents et par conséquent de types de corrections différentes. Par exemple, une erreur dans l'action peut rester implicite, et être corrigée par imitation... d'autres demandent à être identifiées explicitement, interprétées, expliquées.

L'identification de ces types d'erreurs est essentiel pour le professeur qui doit choisir une réponse didactique adéquate. Suivant ces types, il peut y avoir des différences considérables de temps passé à rectifier une erreur, de difficulté à le faire, d'efficacité de la correction, toutes variables essentielles pour le processus d'enseignement.

4. Typologie des formes d'inadaptation des décisions

L'écart entre le projet et le résultat peut conduire à regretter la décision pour diverses raisons :

- i) La décision est pas inconsistante : elle prend en compte des éléments de la situation, mais le fait dans un système contradictoire. Par exemple
« $2x = 3$, alors $x = 3 - 2$ » La confusion entre le produit et la somme constitue un système qui ne peut pas être pertinent : si le premier membre correspond à une situation, le second ne lui correspond pas.
- ii) La décision est consistante mais n'est pas *pertinente*, elle ne peut pas être interprétée parce que la connaissance qui l'a produite se fondait sur des caractères absents de la situation, ou parce qu'elle n'est pas repérable. La décision n'a pas de sens même pour celui qui l'a produite, il s'agit d'un malentendu ou d'une réponse inconsidérée ou inexplicable
- iii) La décision est pertinente, en ce sens qu'elle respecte les règles de l'action en cours, mais elle n'est pas *adéquate* au projet de l'action, elle n'assure pas le succès, la connaissance qui l'a produite est fautive ou mal employée... Exemple l'élève factorise au lieu d'effectuer
- iv) La décision est adéquate elle donne bien une solution « logique » ou elle y contribue mais elle n'est pas *satisfaisante* pour le sujet : elle va lui demander trop de temps ou trop d'efforts. Elle n'est pas *adaptée* par un aspect ou un autre : par exemple, elle ne sera pas comprise si une communication est nécessaire. Exemple : l'élève utilise la formule générale de résolution des équations du second degré alors qu'une racine est évidente, ou en mécanique il recourt aux équations de Lagrange quand les théorèmes généraux pourraient lui donner plus directement la solution.
- v) La décision est pertinente, adéquate au problème didactique, adaptée et satisfaisante pour le sujet mais ce n'est pas celle que l'enseignant attendait, elle n'est pas idoine à l'avancement de

la situation didactique. Certains professeurs auront l'adresse, dans ces cas là, de pas parler d'erreur mais plutôt de malentendu, mais, beaucoup, pour gagner du temps, ne les distingueront pas. Quelles que soient les circonstances, les élèves comprennent qu'ils doivent éviter aussi ce genre d'écart et font entrer la compréhension des intentions du professeur dans leur système de réponses. Ce qui offre des facilités au professeur pour obtenir de bonnes réponses sans que les connaissances visées soient acquises. L'élève ne peut utiliser ses connaissances qu'en se guidant sur les habitudes didactiques du professeur et les divers effets qu'il utilise : « analogie » ou « épistémologie » abusives, « Topaze », « Jourdain » etc.

5. *Typologie suivant les connaissances en jeu, Obstacles ontogénétiques et épistémologiques*

En mathématiques, chaque erreur est spécifique d'un problème et d'une **connaissance**. Il n'y a aucune raison de croire, a priori, qu'un élève qui apprend à éviter une erreur dans l'usage d'un calcul ou d'un algorithme, va lui enseigner naturellement à éviter une autre erreur dans ce même algorithme ou « la même » dans tout autre. Le moyen d'identifier des ressemblances entre les erreurs, c'est l'organisation même des mathématiques et finalement leur raison d'être : la rectification de la compréhension d'un théorème est supposée se répercuter sur la compréhension de ses réalisations, de ses applications et de ses conséquences (ce qui n'est pas déjà si évident) et de ne s'appliquer qu'à elles. Toutes les généralisations exogènes sont hasardeuses et en puissance des sources de nouvelles erreurs. Il n'y a pas plus de traitement universel de l'erreur qu'il n'y a de connaissance universelle.

Certaines erreurs peuvent être produites par l'usage de connaissances « correctes » ou au moins légitimes qui se comportent néanmoins comme des « obstacles ontogénétiques, épistémologiques ou didactiques ». Par exemple, la compréhension élémentaire des opérations dans les nombres naturels fait appel à des connaissances particulières (la multiplication est une addition répétée du même nombre, elle donne un résultat plus grand que les nombres multipliés). Mais lors de l'apprentissage des décimaux ces connaissances deviennent fausses ou inadéquates, sans que l'élève le soupçonne. Ce fait produit des difficultés et des erreurs répétées, opiniâtres, jusqu'au moment où l'obstacle constitué par cette première forme de connaissance est détruit. La T. S. a mis en évidence qu'en mathématiques aussi (contrairement à l'opinion de Bachelard) des connaissances (même correctes ou « légitimes ») peuvent créer des **obstacles épistémologiques** : Elle en a donné plusieurs autres exemples à différents niveaux. Ce fait a servi de base à l'étude de la « **transposition didactique** » développée par Yves Chevallard. L'ordre dans lequel la première rencontre des connaissances s'effectue, lors du développement de l'enfant, ne peut pas être conforme à une introduction complètement axiomatisée. Les situations rencontrées sont néanmoins résolues, mais par des procédés provisoires (qui devront être abandonnés), ou bien soutenus par des connaissances localement valides mais « fausses ». Ces premières connaissances se constituent en obstacles « ontogénétiques » inhérents au développement (ex. la non conservation des nombres). La différence entre les obstacles épistémologiques ou « didactiques » (créés par les choix didactiques) et les obstacles ontogénétiques est que, si les seconds disparaissent sans laisser de souvenir, les premiers doivent, au contraire, faire l'objet d'une prise de conscience : « en revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel⁶ », et ils ne sont jamais totalement effacés⁷.

Il est important de remarquer que pour traiter l'erreur, que ce soit par le professeur, par l'élève ou par l'environnement, il est nécessaire de lui attribuer un statut et une origine.

Rappelons qu'il ne suffit pas de relever un écart entre ce qui est désiré et ce qui est obtenu pour attribuer à cet écart le statut d'erreur. Les clauses ii) et iii) ci-dessus évoquent le pouvoir d'expliquer la décision critiquée par autre chose que l'ignorance ou la malveillance des acteurs. Donc c'est seulement celui qui peut considérer la réponse choisie, son effet sur les résultats immédiats de

⁶ G. Bachelard : « la formation de l'esprit scientifique » VRIN, p. 14

⁷ ce qui permet aux professeurs de « comprendre » ce genre d'erreurs des élèves. Ces erreurs sont « scotomisées » par les experts. Lorsqu'un mathématicien devient professeur, il doit soulever cette scotomisation pour retrouver la mémoire de ses propres erreurs. Certains ne le veulent pas de peur de perdre leur expertise.

l'action, son alternative valide, sa signification pour un apprentissage en cours et une explication appropriée pour le préparer qui peut attribuer le statut d'erreur à une décision. Le faire en s'appuyant sur la connaissance des processus eux-mêmes et non pas sur des opinions ou des inférences hasardeuses apparaît donc comme le privilège presque exclusif du professeur. Lorsque l'élève est en mesure de reconnaître son erreur de cette manière le professeur, par définition, la taxera de « *faute* », puisque l'élève « savait » ce qu'il fallait faire.

En réalité l'application du savoir n'a rien d'automatique et l'attribution par l'élève lui-même du statut d'erreur, à une décision est un si puissant facteur d'apprentissage que les professeurs ont intérêt à développer cette attribution par les élèves. La difficulté, c'est de savoir comment, à quelle occasion et jusqu'à quel prix on peut l'obtenir. Ce paramètre est éminemment variable avec les situations et les savoirs.

6. Typologie des erreurs suivant l'importance de leurs conséquences

Le producteur d'une connaissance nouvelle ne sait pas, généralement, quelle sera, dans l'avenir, l'importance de son apport. Au mieux, il peut la soupçonner ou la supposer.

C'est l'histoire qui donnera une importance et un statut (d'ailleurs toujours révisable). Il est donc vain de vouloir faire que l'élève distingue, a priori et de lui-même, des différences d'importance entre ses erreurs. Il ne peut pas distinguer les erreurs qui vont **rendre difficiles des acquisitions ultérieures**, ce qui est pour le professeur le critère le plus important. De même, il lui est difficile sur une première présentation d'imaginer si les mêmes conditions vont **se présenter souvent** ou non.

Dans une action comme dans un objet technique, il n'y a pas de détail : petit boulon ou conception d'ensemble, toutes les conditions nécessaires sont également essentielles. C'est seulement le professeur qui peut enseigner, avec les connaissances, l'importance relative des erreurs et leur signification. Ce sens de l'importance des erreurs faites ou évitées (le Haha ! ou le Eurêka !) joue néanmoins un rôle important dans les acquisitions de l'élève.

L'étude de l'importance attribuée par les élèves à leurs erreurs et de son rôle dans les comportements des élèves a été entreprise mais on constate qu'elle est très erratique et qu'elle est surtout le reflet de l'opinion du professeur, lequel pratique souvent « l'inversion des priorités » : des écarts par rapport aux règles qu'il institue pour son enseignement (faites un trait de quatre carreaux pour séparer les exercices) prenant plus d'importance que les erreurs de mathématiques elles mêmes.

Les échelles d'importance des erreurs utilisées par les élèves comprennent au moins :

- les erreurs qui ne sont pas susceptibles de se reproduire (dans l'opinion de l'élève) ;
- celles qui sont faciles à apercevoir avec un peu d'entraînement ;
- celles dont la sanction ou la correction sont plus pénibles que l'évitement ;
- celles dont l'évitement paraît plus coûteux que la sanction.

7. Erreur *faute* et échec, le perçu de l'erreur par l'élève

Nous avons vu qu'une *erreur* est une décision qui peut être « reprise » corrigée dans le cours d'une même action alors qu'un *échec* est le résultat négatif d'une ou d'un ensemble de décisions qui ne peuvent plus être reprises dans cette situation là.

Une *faute* est une erreur qui va à l'encontre d'une règle parfaitement connue de celui qui la commet, ce qui lui permet de se faire reproche, ou d'une obligation convenue avec un inter actant (il y a trois protagonistes : deux actants et un milieu). Une faute est une erreur dans le rapport avec un responsable ou un contrôleur. La faute comprend une composante « morale », mal acceptée aujourd'hui dans la mesure où elle dévie la nature, souvent la forme et toujours le vécu de l'erreur, mais qui a néanmoins une certaine légitimité scolaire et même didactique. L'interprétation des erreurs en fautes semble être un sujet de désaccord entre les parents et les professeurs, peut-être parce qu'elle engage des questions d'autorité et de légitimité.

Nous avons signalé que la reconnaissance d'une erreur implique celle de ses rapports avec ses conséquences et en particulier avec l'échec d'un projet. Au cours de l'enseignement, le partage des responsabilités entre le professeur et l'élève est toujours en évolution, de sorte que le statut des erreurs peut se modifier à l'insu des acteurs. L'élève croyait pouvoir faire un essai, le professeur le reprend

comme s'il avait commis une erreur dans un exercice, et si cette décision ignore un enseignement avéré, c'est même une faute, voire une offense au professeur. L'élève peut d'ailleurs essayer de faire jouer le glissement en sens inverse et de présenter comme une hypothèse ce qui était à l'origine de sa part une opinion franchement erronée.

Cette dialectique des statuts de l'erreur entre « essai », « erreur », « échec à un exercice », « échec d'un apprentissage », « faute », etc. est évidemment une caractéristique des processus didactiques et n'est vécue par l'élève que par intériorisation des critères de son entourage.

Les typologies d'erreurs attachées à une connaissance particulière, comme « la géométrie », doivent être étudiées à part. Nous disons seulement un mot dans le dernier paragraphe, à propos de la méthodologie de l'identification des agrégats d'erreurs, qui sont, en fait, la base de l'étude concrète de l'apprentissage des connaissances.

B. Les erreurs de l'élève du point de vue du professeur

1. Modalités de la réaction didactique à l'erreur des élèves

Notre approche nous conduit maintenant à envisager le traitement de l'erreur de l'élève, par le professeur. C'est un cas particulier du contrôle d'une institution par une autre.

La situation typique est celle où l'élève donne une réponse erronée, mais ne peut pas le savoir :

- soit parce que la connaissance nécessaire lui fait défaut,
- soit parce que la situation effective ne lui permet pas de voir les effets de sa décision, en particulier parce que le rapport à la situation « objective » (le problème tel qu'il est énoncé) est fictif, le sujet ne peut « voir » que ce qu'il imagine.

C'est le cas où la charge de révéler l'erreur incombe au professeur. Il peut le faire par tout un éventail de réactions : critiquer la réponse, la refuser, poser une question, lancer une suggestion, opposer une autre réponse, dénoncer l'erreur, porter implicitement la preuve de l'erreur, etc.

C'est aussi le professeur

- qui garantit la valeur de la bonne réponse, par divers moyens (autorité, explication, preuve pragmatique)

- et qui propose les moyens d'éviter cette erreur à l'avenir (connaissance, apprentissage, etc.).

Remarquons que ce dernier point exige donc un répertoire spécifique (épistémologique et didactique) commun au professeur et à l'élève, qui permette de décrire l'erreur et de l'attribuer à un mécanisme producteur (la cause de l'erreur : tu ne savais pas ceci, ou c'est difficile, j'ai mal expliqué, tu n'a pas appris, tu as oublié, tu étais distrait, tu es stupide...) et qui préfigure les décisions didactiques du professeur (je répète, tu sauras, tu refais un problème semblable, tu t'entraînes, fais attention ou je te punis, personne ne peut rien pour toi ...)

Finalement, c'est l'institution scolaire qui porte toute la charge et la responsabilité de « l'erreur » : de la reconnaître, de l'identifier, de la corriger, de l'enseigner. Enfants, parents et parfois psychologues ont tendance même à lui reprocher de la provoquer par le choix des sujets d'études ou des exercices, et par là d'être responsable des erreurs. On a entendu cette rhétorique aux Etats Unis où certains professeurs se sont vus attaqués en justice au double motif qu'ils avaient voulu humilier leurs élèves en leur donnant des exercices où ils avaient fait des erreurs et qu'ils n'avaient pas fait leur travail d'enseignant, ce que prouvaient les erreurs des élèves ! Dans le cadre d'une construction de connaissances et sous les conditions de régulation que nous signalons ici, la provocation et l'erreur non fautive sont toutes les deux légitimes.

2. Typologie des erreurs suivant les possibilités de leur utilisation dans le processus didactique

Pour des raisons qui seront rappelées plus loin, la didactique ne s'intéresse qu'à celles des erreurs qui auront une conséquence sur l'apprentissage en situation didactique⁸.

Le professeur ne peut tenir compte d'une erreur d'un élève que sous certaines conditions ; il faut :

- a) que la production de cette erreur soit suffisamment fréquente chez cet élève, ou suffisamment répandue sur un ensemble d'élèves,
- b) que cette erreur ait des conséquences importantes sur d'autres acquisitions ou sur le déroulement ordinaire de l'enseignement,
- c) et surtout que l'on puisse lui rattacher des décisions didactiques, relativement à la gestion ou à l'organisation de l'enseignement:
 - Certaines assez spécifiques, comme la démonstration, l'explication, l'expansion du problèmes en lemmes et corollaires, la présentation de contre-exemples etc. Ces stratégies exigent l'utilisation par le professeur de l'organisation des connaissances des élèves et de leur culture mathématique : Un enseignement trop pragmatique ou mal structuré du point de vue théorique va renvoyer élèves et professeurs vers un océan d'apprentissages complémentaires. La structuration des connaissances et l'usage de théorèmes et de théories adéquates est une économie indispensable. Mais l'économie exige un certain rapport entre la taille du champ structuré et la complexité de la structuration. Il n'y a aucun intérêt ni aucune efficacité à structurer un espace vide.
 - D'autres moins spécifiques comme l'illustration, l'analogie, la re-formulation, la répétition, ont la faveur des pédagogues. Or, surtout en mathématiques, elles portent de forts dangers de réifications inadéquates. Elles exigent et contribuent à développer des agrégats de connaissances, différents des conceptions scientifiques. Ces conceptions sont souvent fausses et sources d'erreurs. Pourtant, il n'est malheureusement pas raisonnable de dénoncer uniformément l'usage de ces procédés rhétoriques. Si chaque cas particulier d'analogie, de métaphore, de métonymie, etc. est critiquable comme moyen explicite d'établir la vérité mathématique, l'utilisation de ces figures est inhérente à la pensée mathématique comme à la pensée tout court. Ce qui est erroné, c'est leur assomption en méthode.
 - D'autres encore font appel à des théories sur la genèse des erreurs encore moins spécifiques, comme les applications naïves du behaviorisme. La répétition d'un acte « non erroné » joue un certain rôle dans l'acquisition, mais ce rôle est d'autant plus faible ou douteux que l'acte est plus éloigné de ses mécanismes de production et de reconnaissance, c'est à dire des connaissances qui l'étayent.
 - D'autres peuvent mettre en jeu des classifications et des ségrégations des élèves : en surdoués, doués, sous-doués etc. . Mais il est clair que cette solution ne fait que déplacer le problème. Le professeur ne peut pas enseigner sans que des difficultés et des erreurs ne se présentent.
 - la décision la plus radicale est la suppression de l'exercice ou de la notion. Cette négociation à la baisse n'a pas de borne inférieure

La T.S.D. ne porte pas de jugement a priori sur ces méthodes, elle s'efforce seulement de déterminer leur domaine de validité

Le fait, pour un professeur, d'avoir une connaissance raffinée de certains processus cognitifs rares, par lesquels tel élève a été conduit à produire une erreur particulière, ne peut habituellement lui servir que pour l'organisation générale de son enseignement (à la condition que la complexification du cours soit en rapport avec la probabilité d'apparition de l'erreur) mais pas pour ses interventions auprès des élèves

Nous pouvons avancer pour ce point les raisons suivantes :

⁸ Cette clause est la cause principale des différences que l'on observe entre le traitement classique des erreurs ou le traitement en T. S. et celui qui découle de la T. S. D. la Théorie des Situations Didactiques

- a) les erreurs personnelles n'aident pas les autres élèves, seules les raisons communes sont utilisables,
- b) les élèves, qui n'ont pas cette culture, peuvent ne pas comprendre ces explications que ce soit individuellement ou collectivement,
- c) les explications qui ne débouchent pas sur une « remédiation » sont inutiles, or les seules remédiations autorisées et recommandées aux professeurs relèvent d'un répertoire didactique et pédagogique et non « psychologique » que ni leur formation ni leur fonction ne permet d'assumer professionnellement. Leur psychologie – il leur en faut beaucoup - doit rester implicite dans leurs rapports avec les élèves.

3. Typologie suivant le nombre d'élèves concernés

Selon le moment et les circonstances, une même erreur mathématique peut donc être pour un professeur :

- une exploration légitime d'un cas douteux,
- un accident ordinaire, prévu et véniel,
- un sujet de réflexion et d'apprentissage,
- une décision malheureuse à reprendre aussitôt,
- une mauvaise habitude systématique qu'il faut « corriger » par des exercices appropriés et une vigilance particulière,
- un lapsus,
- une erreur insignifiante,
- une faute grossière qui si elle n'est pas une inadvertance, trahit une ignorance complète.

Ces erreurs peuvent être

- communes (à de nombreux élèves) ou particulières (électives)
- spécifiques (portent toutes sur les mêmes questions) ou non (diversifiées),
- systématiques (toujours la même réponse aux mêmes questions) sporadiques ou erratiques,
- persistantes ou labiles (fugitives) (toujours les mêmes élèves ou non).

Les décisions du professeur reposent sur une évaluation de la situation qui fait appel à ces caractères et elles ont pour objet de réguler un certain nombre d'autres variables : par exemple la recherche d'un équilibre entre l'intérêt général et l'intérêt de tel ou tel élève, pour le temps réservé à un travail, pour le choix des exercices.

Pour réguler l'apparition puis la disparition d'une erreur donnée, le professeur doit faire la part de ce qui lui semble dû à l'organisation de son enseignement (bonne ou à améliorer), de ce qui revient à la difficulté intrinsèque, épistémique, de la question traitée, et de ce qui peut être attribué aux « capacités » de l'élève.

Parmi ces décisions didactiques il convient de distinguer :

- i) celles qui seront ignorées des élèves : elles ne font appel qu'aux décisions du professeur et elles passeront inaperçues des élèves (comme la suppression ou la modification),
- ii) celles qui resteront implicites ou tacites, l'élève rectifiant sans analyse suivant l'indication du professeur,
- iii) celles qui devront faire l'objet d'une analyse et d'une explication de la part du professeur,
- iv) celles qui devront faire l'objet d'un travail spécifique de la part de l'élève.

Il est clair qu'il s'agit d'une classification instantanée : une même erreur reçoit à un moment donné une décision didactique et une seule. La même erreur, (même situation, même écart, indépendamment de son occurrence) n'entraînera pas la même décision à différentes étapes de l'apprentissages ou à différents niveaux scolaires, ou suivant le nombre d'occurrences qui l'auront

précédée. En général une même erreur passe du traitement i) ci-dessus, en tout début d'apprentissage aux traitements suivants ii, iii, iv dans l'ordre, pour finir au statut ii lorsque l'erreur paraîtra si triviale qu'elle sera jugée erratique et vénielle.

Et dans chaque catégorie, il convient de distinguer les types de réponses (et de corrections) du professeur

- celles qui concerneront tous les élèves, qu'ils aient fait ou non l'erreur,
- celles qui concerneront seulement les élèves qui ont fait l'erreur mais qui seront traitées collectivement et publiquement
- celles qui concerneront ceux qui ont fait l'erreur, mais individuellement et en privé.

La Théorie des Situations didactiques « montre » que le taux de réussite est une variable dont la valeur est régulée par le système⁹ : en dessous d'un certain taux d'erreurs t_m , le devoir proposé apparaît comme un exercice trop facile, qui n'est pas susceptible d'apporter un apprentissage utile et qui est donc une perte de temps ou une redondance. Au dessus d'un autre taux t_M , il apparaît comme un problème trop complexe qui exigera de longues corrections et apportera peu d'apprentissages, il est donc aussi pour la plupart des élèves une perte de temps. De plus, à moins d'être accidentel, il crée une insatisfaction excessive. Le professeur corrige ses exigences de façon à obtenir des réussites entre ces deux valeurs. Il s'agit donc d'une sorte de loi théorique.

Cette loi est confirmée par l'observation : dans la pratique ordinaire, le taux optimal paraît être voisin de 80 %¹⁰. Toutefois les valeurs autour desquelles les taux de réussite sont régulés peuvent varier suivant certaines caractéristiques pédagogiques, suivant les méthodes ou les enseignants. Cependant la pratique inconsidérée de taux assez différents conduit régulièrement à d'autres difficultés¹¹. De toute façon la pratique systématique de taux fixes conduit à certains échecs alors que la pratique de taux variables suivant le type d'activité est difficile à gérer et n'est pas bien compris par le système éducatif. Ignorer ces différences conduit à des malentendus entre les professeurs et la société.

L'observation de ces différentes valeurs et de leur « explication » puis leur modélisation mathématique serait donc un beau sujet de recherche en « théorie des situations ».

4. Typologie d'erreurs associées à l'activité mathématique

Nous avons signalé à plusieurs reprises que l'identification de l'erreur, son explication et la décision didactique de « remédiation », dans la mesure où l'élève devait être associé à cette décision, devait s'effectuer à l'aide de l'organisation des connaissances déjà enseignées (et si possible effectivement connues de l'élève). Dans l'analyse du professeur, l'erreur est d'abord rapportée à un niveau praxeologique :

- erreur spécifique à la tâche,
- erreur de technique : le professeur peut critiquer la mise en œuvre, l'exécution, d'un mode opératoire connu,
- erreurs de technologie : le professeur critique le choix de la technique,
- erreur de niveau théorique : le professeur incrimine les connaissances théoriques de l'élève qui servent de base à la technologie et aux techniques associées.

⁹ Il est facile de montrer la régulation empiriquement et de la prouver dans des modèles assez généraux.

¹⁰ valeur d'observation, mais plusieurs modèles tendent à la justifier.

¹¹ Les taux de réussites peuvent être observés. Ils doivent être compatibles avec un certain nombre de contraintes qui en fixent les bornes. Chaque contrainte peut se traduire par des modèles « grossiers » comme celui donné ci-après à titre d'exemple, mais la combinaison des contraintes est beaucoup plus compliquée. Les valeurs observées sont d'ailleurs souvent sur-déterminées. Supposons qu'il faille que chaque « objectif » soit atteint à un certain niveau avec une probabilité de 0,96 et que le professeur dispose de deux « situations didactiques » :

- l'une qui donne à chacune des présentations à un même élève une probabilité d'acquisition de la bonne réponse de 0,8 : après 2 présentations, la probabilité d'acquisition est 0,96.
- l'autre qui à une probabilité de 0,5 : il faut alors 5 présentations pour obtenir une probabilité équivalente. Avec 0,3, ce qui n'est pas exceptionnel pour des situations un peu ouvertes, il faudrait 9 présentations, ce qui n'est pas compatible avec certaines contraintes de temps, mais une probabilité de 0,9 demanderait de toute façon 2 présentations.

D'autre part une situation qui permet d'obtenir la bonne réponse en une seule présentation ne sollicite qu'une très petite partie des connaissances reliées à cette connaissance... Ce professeur choisira une situation compatible avec d'autres contraintes. Les professeurs essaient de maintenir des valeurs acceptables en contrôlant l'incertitude des élèves.

Ce dernier point est très utilisé par les professeurs. Ils identifient alors l'erreur avec un manque de connaissances, (et bien sûr des connaissances du programme) et se relancent sans peine dans un projet d'enseignement déjà familier.

Cette stratégie didactique a ses avantages mais elle peut mener à des blocages lorsque le diagnostic du professeur est faux ou qu'un nouvel enseignement ne permet pas de modifier les réponses de l'élève. Par exemple, si les élèves orientent leur résolution en utilisant essentiellement leurs « connaissances » (leurs modèles implicites ou spontanés), et si le professeur répète la résolution formelle et seulement ses rapports « formels » avec les savoirs enseignés – ce qui est explicité – sans modifier les modèles implicites, l'erreur se reproduit et la correction insuffisante aussi. L'élève sait son cours, comprend la résolution mais ne « trouve rien » au cours des nouveaux problèmes¹².

D'où l'idée de rechercher des « causes d'erreurs » ailleurs que dans les connaissances enseignées. En fait, les modèles spontanés ne sont pas reconnaissables (par définition) par les élèves, mais ils sont une partie des connaissances nécessaires à la compréhension et à l'usage des savoirs enseignés et ils participent étroitement aux conceptions relatives à ces savoirs. C'est dans ce domaine que les études de didactique font l'apport le plus original, servant de pont et de filtre entre l'épistémologie, la psychologie et l'enseignement. Par exemple, en géométrie, la T.S.D. a montré que les conceptions spatiales des sujets diffèrent suivant les points de vue micro, meso, et macro spatial qui gèrent les modèles implicites de la géométrie¹³. Cette importante observation permet d'organiser les enseignements et les remédiations de nombreuses erreurs¹⁴.

5. Phénomènes liés aux erreurs liées à l'épistémologie spontanée des professeurs

La façon dont les professeurs conçoivent spontanément l'organisation et le fonctionnement des mathématiques est fortement influencée par leur profession et par la nécessité de satisfaire les conditions énoncées plus haut.

L'attribution d'une erreur à un « manque de connaissances » n'est d'ailleurs pas si simple qu'on pourrait le croire. Pour la plupart, ces attributions sont fondées sur des rationalisations locales (de l'activité des professeurs), sur des décompositions formelles et « technicistes » des tâches (le professeur incrimine chaque étape de la résolution sans remonter aux conceptions productrices de l'ensemble de la réponse) et sur des théories psycho-cognitives sommaires ou erronées.

Par exemple, dans une démonstration, l'erreur qui consiste à utiliser la réciproque non valide d'un théorème connu peut apparaître entre autres

- comme une erreur très générale de *logique* : « une tendance à remonter les implications » (encore faudrait il expliquer pourquoi c'est cette implication là, qui donne lieu à ce phénomène ; car les élèves ne remontent pas n'importe quelle implication),
- ou être attribuée à une méconnaissance dans chacune des théories *mathématiques* plus faibles que celle étudiée et où figure ce théorème ou un théorème similaire,
- être attribuée à une représentation erronée des relations en jeu, méconnaissance de l'espace et de ses transformations et de leur invariants...
- ou être reconnue pour une erreur d'application de savoir, voire d'inattention.

De façon générale la recherche d'une « cause » effective d'une erreur est rarement couronnée de succès.

Parfois les explications mathématiques des erreurs se voient substituer des explications fondées sur des phénomènes étrangers : psychologiques, épistémologiques, sociologiques etc. Même lorsque ces explications sont fondées sur des faits véridiques, elles conduisent à des difficultés imprévues. En effet les professeurs sont amenés à les évoquer dans leurs rapports avec les élèves et par « perméabilité didactique » à introduire ces concepts dans leur enseignement. Comme leur

¹² Ce phénomène est classique en Physique où la mise en équation dépend de représentations non enseignées et de modèles spontanés. Il a été montré en dynamique élémentaire par Laurence Viennot et Edith Saltiel

¹³ Thèses de Grécia GALVEZ Aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. (CINVESTA IPN Université de Mexico)

¹⁴ Thèses en Français de M.H. SALIN et R. BERTHELOT, de T. BAUTIER, de Dilma FREGONA univ. Bordeaux 1

intervention dans le domaine de la psychologie ou du statut social de leurs élèves est *illégitime*, ces explications sont inexploitable. Elles jouent essentiellement le rôle d'alibi et font baisser la pression du contrat didactique.

Ces difficultés sont pressenties par les professeurs, mais mal connues d'eux et surtout ignorées par les institutions de la noosphère. Celles-ci ne cessent d'assigner à l'enseignement des objectifs de plus en plus ambitieux, de dénoncer ses « échecs », et d'avancer des explications exogènes.

Il reste à établir qu'il existe des moyens de rendre légitimes et efficaces les interventions. Si ces moyens existent, leur usage passe par l'établissement de connaissances sûres qui permettent de développer et de contrôler des techniques professionnelles que la noosphère contrôle mais reconnaît.

Ce n'est pas le cas aujourd'hui.

Le matraquage médiatique entretenu par la noosphère depuis quarante ans autour de l'école tend à faire croire qu'il suffirait d'imposer aux professeurs une obligation de résultats pour l'obtenir. Il tire argument de la moindre information sur les apports possibles (mais incontrôlés) de la technologie (audio-vidéo, informatique ou internet) ou des sciences « humaines », que les enseignants « négligeraient », pour faire avec assurance les propositions les plus extravagantes. Alors que, parallèlement, la même noosphère refuse d'accepter les conditions scientifiques, techniques et sociales, d'un vrai professionnalisme des professeurs, et tournent leurs pratiques en dérision en leur opposant l'orviétan de l'innovation ou des pratiques individuelles. Cette attitude est irresponsable, ses conséquences négatives sont incalculables.

C. Le rôle des erreurs des élèves dans les systèmes de régulation de l'enseignement

1. L'influence de la noosphère¹⁵

Les erreurs et les échecs des élèves sont le moyen principal par lequel la noosphère perçoit les résultats de l'enseignement et prétend les contrôler. De sorte que la façon dont elle perçoit ces erreurs et les interprète joue un rôle de plus en plus important dans leur gestion scolaire et extra scolaire.

Ses membres aident la population dans ses décisions au sujet de l'enseignement en se justifiant par divers motifs :

- ils sont spécialistes de certains « savoirs » en rapport avec ceux qui sont enseignés,
- ils « connaissent » certains aspects de l'enseignement,
- ou simplement leur statut d'intellectuels leur donne un accès à certaines informations rendues disponibles dans la culture par les apports de diverses disciplines.

Mais en fait, cette « compétence » est beaucoup plus limitée qu'on ne pourrait l'espérer. Elle ne s'appuie pas sur une prise en charge effective des problèmes scientifiques que pose la diffusion des connaissances mathématiques dans la société. Pour des raisons qu'il n'y a pas lieu d'examiner ici, il semble même que le développement des recherches dans ce domaine (la didactique des mathématiques) soit vécu comme une intrusion dans son pré carré, comme une entreprise qui remet en cause l'essence même de leur compétence. Ainsi dès que la didactique sort de la description des pratiques (tolérée mais péjorée) pour s'interroger sur un mode plus scientifique à propos de questions plus générales, elle est violemment combattue et tournée en dérision. Cette attitude est à rapprocher de la façon dont les travaux d'économie au 19^{ème} siècle ont été reçus et subordonnés à la réussite commerciale ou politique de leurs auteurs !

Mais il devient de plus en plus clair que ce phénomène n'est pas une simple réaction de défense, un accident de l'histoire, et encore moins un complot. Il semble qu'un ensemble de phénomènes proprement didactiques assez incoercibles sont en jeu pour créer un véritable obstacle socio-culturel à l'émergence d'un champ scientifique directement dédié à la diffusion des savoirs.

La T.S.D. a permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes liées des décisions malencontreuses essentiellement dues à des interventions inconsidérées de la noosphère dans l'enseignement des mathématiques. Nous n'en évoquerons qu'une : l'introduction de l'évaluation formelle exogène aux processus d'enseignement (l'autre, classique, mais mal étudiée, serait

¹⁵ voir note supra. Ce paragraphe n'est pas le fruit d'une étude théorique, mais celui d'observations personnelles s'étalant sur une quarantaine d'années (1960-2000)

l'introduction dite « des mathématiques modernes »). D'autres approches, notamment l'approche anthropologique ont pris en considération et mis en évidence de façon plus précise le fonctionnement de la noosphère¹⁶. Il s'agit d'une « institution » cachée, qui résulte d'une somme de comportements individuels. On devient noosphérien comme on devient père ou mère, on a conscience d'avoir une responsabilité mais on ne peut pas l'exercer comme un métier.

2 Les méthodes de régulation, les erreurs épistémologiques et scientifiques de la noosphère

L'évaluation de l'enseignement est essentiellement basée sur celle des comportements terminaux de cohortes d'élèves.

Cette pratique a été « rationalisée » par des méthodologues, sans référence au fonctionnement effectif des connaissances et des acquisitions, en particulier en mathématiques. Sous l'impulsion des administrations, elle a pénétré de plus en plus profondément dans l'intimité des pratiques de l'enseignant.

Accompagnée de principes tels que :

- « tout ce qui enseigné doit être appris » qui a pour corollaire qu'on ne doit enseigner que ce qui doit (et peut) être appris,
- « tout ce qui est demandé doit s'appuyer de façon explicite sur ce qui a été officiellement enseigné précédemment »

imposés comme des « lois du marché » elle a désarmé les régulations spontanées auxquelles les professeurs pouvaient procéder et elle a fini par amorcer une redoutable spirale de l'« abaissement du niveau des élèves » (réel ou supposé) par le processus décrit ci après :

Les règles du jeu :

- a) si ses évaluations ne sont pas bonnes, l'élève doit reprendre son apprentissage ou le professeur son enseignement (l'élève doit redoubler, un exercice, une leçon, une année etc.),
- b) si de nombreux élèves ne parviennent pas à avoir une évaluation satisfaisantes, l'enseignant ou l'institution doit baisser ses prétentions et retirer la question du programme...¹⁷

Observations :

- Dans ce système purement pragmatique, la disparition des points « difficiles » ne tient pas compte de leur utilité ou de leur nécessité dans l'étude d'une question mathématique !
- De plus, il ne fait apparaître aucun moyen systémique d'augmentation du programme, de restauration ou de remédiation générale. Seule la tendance des professeurs à introduire des illustrations supplémentaires ou des « innovations » est encouragée. Mais par définition, une innovation n'est pas un savoir culturel thésaurisable. Les connaissances nouvelles ne peuvent venir que des exigences de la noosphère (nouveautés dans les programmes, dans les méthodes, dans les matériels) sur la base de représentations arbitraires diverses ou sur la proposition de groupes de pression ou d'intérêt, sans qu'un rapport **effectif** soit établi avec les difficultés de l'enseignement.
- Ce système suppose que les professeurs ont les moyens de corriger les insuffisances de résultats (et leur en fait implicitement obligation), mais personne ne s'engage à dire comment.

Il est clair qu'un tel système produit directement, a plus ou moins long terme l'abaissement des ambitions et du niveau effectif. De nombreuses circonstances, telle que les suivantes, accélèrent le processus :

- Certains résultats d'un enseignement sont, par définition, à peu près impossibles à détecter par les méthodes d'évaluation : ce sont les connaissances et les modèles implicites développés au cours des apprentissages (nous en avons évoqué l'existence plus haut). Or ces connaissances, bien

¹⁶ Yves CHEVALLARD a mis en évidence cette « noosphère » dans un texte qui donne une structure générale au concept de didactique

¹⁷ Dans certains pays, comme la France, « effrayés » par les conséquences politiques des dispersions provoquées par la condition a) le gouvernement a interdit les redoublements annuels, ce qui conduit le professeur dans les enseignements collectifs à appliquer concrètement la condition b) à tous les élèves et à écarter ainsi d'eux mêmes certains objectifs

qu'elles ne soient pas des savoirs scolaires, sont indispensables pour activer les savoirs appris et donc pour les apprentissages ultérieurs. Le redoublement pur et simple (d'une leçon ou d'une année) ne tire aucun parti de ces connaissances, et les ignorant il a toutes les chances de donner les mêmes résultats que le premier essai.

- Le fait de devoir tenir compte de chacune des erreurs relevées sur des cohortes d'élèves, et de tous les facteurs qui les accompagnent a conduit à multiplier les objectifs, à diversifier formellement les conditions d'apprentissage, et à allonger démesurément les stratégies didactiques. Cette variété d'erreurs et d'objectifs ne cesse d'augmenter et permet de multiplier les charges d'enseignement relatives à une même question.

Cet alourdissement du travail collectif s'est encore augmenté de l'obligation, pour les professeurs, de traiter individuellement les accidents d'apprentissage. Cette exigence de la noosphère est fondée sur l'illusion que la connaissance est essentiellement un phénomène neurologique personnel ! La prise en compte massive de l'erreur et ses traitements administratifs ont conduit à diversifier (atomiser) les intentions didactiques, à multiplier les objectifs d'apprentissage et d'enseignement sans référence au fonctionnement réel, à multiplier les traitements particuliers d'élèves, sans les conditions qui leur permettraient d'aboutir...

3. Méthodes d'étude des difficultés des élèves. Méthodes d'agrégation

La question serait plutôt : « comment se fait-il que l'enseignement arrive encore à fonctionner ? »

Il est clair, par exemple, qu'un taux d'échec de 80% des élèves par étape d'enseignement ou par niveau scolaire (taux évoqué plus haut) créerait rapidement chez les élèves des différenciations inacceptables. Ce n'est pas habituellement le cas, à moins d'introduire cette règle par une décision administrative. C'est donc que le fait de donner une réponse erronée à une question n'est qu'un indice peu déterminant d'un échec futur (la dépendance entre les acquisitions ne suit pas un ordre logique et « nécessaire » ; ce fait est bien connu mais la rationalisation n'en tient aucun compte).

- soit parce l'erreur n'avait pas grand rapport avec l'apprentissage,
- soit parce qu'elle accompagnait l'apprentissage
- soit parce qu'elle le précédait : souvent les élèves ne comprennent ce qu'ils sont censé avoir appris, qu'au moment où ils doivent s'en servir et « assumer leur savoir » (l'année suivante par exemple).

Beaucoup d'efforts ont été faits pour tirer de l'analyse des erreurs, des connaissances sur les conceptions des élèves et sur les processus d'acquisitions de ces conceptions. Il s'agit en général, par des méthodes statistiques de rechercher des agrégats d'erreurs qui apparaissent ensemble chez certains groupes d'élèves. Les analyses de données, notamment factorielles, peuvent faire apparaître des facteurs liés à la production des erreurs. Elles sont précieuses. Mais utilisées en l'absence d'analyses plus fines sur le fonctionnement de la connaissance, ces méthodes peuvent s'avérer fallacieuses et, sous un vernis de scientificité, tromper lourdement leurs utilisateurs. On peut imaginer ce que serait la connaissance que pourrait acquérir un observateur sur un moteur, alors qu'il ignorerait tout de sa structure et de son fonctionnement et qui ne le connaîtrait que par l'existence de toutes ses pannes !

IV La recherche et l'analyse des erreurs relatives à une notion ou à un secteur des mathématiques

La méthode :

1. Questions et genèse

Dans un premier temps, à partir des exposés actuels de la notion et des intentions d'un programme scolaire envisagé, il s'agit de constituer et de structurer un champ de situations puis de l'organiser dans une genèse où l'apparition des différents concepts sera justifiée et leur apprentissage

convenablement étayé par des réutilisations appropriées. Il existe plusieurs façon de réaliser ce programme. Nous prendrons ici l'exemple de la géométrie.

La plupart du temps la genèse adoptée suit un exposé rationnel ou même axiomatique de la notion pour profiter des vertus didactiques de ce type de genèse : économie, croissance régulière du répertoire de connaissances utilisées, assurance de toujours trouver les éléments des définitions et des démonstrations nécessaires à un moment donné dans ce qui a été exposé et enseigné précédemment etc.. L'inconvénient de ce type de genèse est le suivant : dans le meilleur des cas, l'élève ne comprend les questions qui sont à l'origine des savoirs enseignés que bien après les avoir appris. Le professeur lui montre l'intérêt d'appliquer des connaissances apprises précédemment, mais ne l'initie pas à la construction des connaissances appropriées à ses besoins.

Dans le cas de la géométrie, on peut choisir par exemple de procéder sur deux niveaux :

- d'une part, il s'agit de construire une (ou des) représentation(s) de l'espace pour pouvoir y réaliser certaines tâches, et y résoudre certains problèmes,
- d'autre part il s'agit de savoir si et quand de telles représentations sont consistantes ou non.

L'objet de la géométrie mathématique est le deuxième projet. Le premier pourrait permettre de déterminer les objets et les relations dont on s'occupe et le second de fournir les méthodes de représentations ; mais en fait, il y a une certaine dialectique entre les deux niveaux.

2. *Situations et réponses*

Dans un deuxième temps, la genèse choisie se résout en une suite de situations qui posent des problèmes mathématiques dans un ordre raisonnable et intelligible. Par le jeu des variables cognitives et didactiques, ces situations engendrent des familles de problèmes assortis où les mêmes objets mathématiques sont impliqués dans des relations similaires. L'étude de ces situations peut faire soupçonner à priori les conceptions, correctes ou fausses, qui peuvent se manifester dans les différentes réponses possibles. Les conceptions envisagées doivent être justifiées par le jeu des interprétations et des économies psychologiques ou didactiques que l'on connaît ou que l'on suppose. Il est alors possible de prévoir le sort de ces conceptions fausses et d'en organiser l'observation, soit en proposant les problèmes correspondants à des cohortes d'élèves, soit en suivant la chronique d'un apprentissage scolaire. Les deux méthodes sont expérimentales et utilisent la modélisation.

Ainsi les erreurs, qu'elles soient envisagées par le processus théorique évoqué ci-dessus ou repérées au cours d'observations empiriques, sont l'objet de constructions et d'hypothèses *avant* que ces hypothèses soient confrontées à la contingence au cours d'expériences classiques.

3. *Erreurs et conceptions*

Ainsi, dans ce système, les erreurs sont au moins rattachées à des conceptions de la notion qui peuvent être décrites, repérées et étudiées dans le cadre d'explications intelligibles. Par rapport à l'explication techniciste, qui explique directement l'erreur, isolée de son contexte par des manquements à des obligations simples, cette méthode permet d'améliorer la pertinence de ses interventions, elle étend les possibilités d'action du professeur et dans une certaine mesure peut améliorer son efficacité. Mais en contre partie, elle se prête mal à l'élucidation des intentions du professeur et à la clarté de ses explications aux élèves. Le professeur doit « traduire » les explications savantes en explications intelligibles aux élèves (c'est-à-dire utilisant d'autres concepts épistémologiques), comme un médecin qui parle à son malade de sa maladie, doit manipuler un langage moins spécifique que le langage médical strict.

4. *Interventions didactiques et régulation*

En agrégeant certaines erreurs en « conceptions », on réduit leur nombre et on facilite leur traitement. Mais, d'une part, certaines erreurs ne relèvent pas d'une conception, et d'autre part, la dépendance (stochastique) entre les erreurs liées à une même conception peut être assez instable et floue. Ce qui ne donne pas une grande fiabilité aux interventions didactiques qu'on en déduit. Là encore il faut savoir limiter son ambition.

Les études concrètes des erreurs relatives à une notion, à un secteur ou a une branche des mathématiques comme la géométrie.

Un exemple précis serait bien utile ici, mais il sortirait du cadre de cette étude générale. On trouvera de nombreuses études en français dans « recherches en didactique des mathématiques » dans « petit x » et dans certaines publications de l'APM ou de repères la revue des IREM. A propos de la géométrie, j'ai signalé dans un petit article¹⁸ que l'épistémologie spontanée des professeurs, notamment leur tendance à l'empirisme, les conduit à confondre en géométrie les registres iconiques, verbaux et formels (l'univers des dessins, avec les « figures » qu'ils représentent et avec les entités géométriques par exemple)

V Conclusions

Cet article n'avait pas pour objet de faire un inventaire, ni même un survol, des travaux récents sur les erreurs des élèves... et sur celles des professeurs. Conduite dans la perspective qui est proposée ici, une telle étude demanderait un travail considérable puisqu'il faut interroger chaque notion, chaque connaissance et retrouver les auteurs. On trouvera un exemple d'une telle étude dans l'article d'Eugène COMIN¹⁹. Ce travail de recensement a été entrepris grâce à des moyens informatiques puissants, par des chercheurs comme GILIS²⁰, mais n'a pas encore donné lieu à des études synthétiques.

De même, il manque à ce texte qui propose une méthode d'étude utilisée dans plusieurs thèses, des suggestions pour des recherches nouvelles plus précises. Les sujets sont à chercher dans deux directions d'abord dans l'observation effective des élèves et des classes, ensuite dans le fonctionnement des situations et des processus. La façon dont la contingence et la nécessité se conjuguent pour engendrer de nouveaux types d'erreurs est toujours surprenante. Nous n'avons voulu donner ici qu'une méthode d'analyse que nous espérons utile aux professeurs

Pour résumer, en didactique des mathématiques les erreurs sont :

- Spécifiques d'une connaissance et/ou d'une situation mathématique, plus ou moins générale : Inhérentes au processus d'apprentissage, en ce sens qu'il n'y a pas d'apprentissage que dans l'exercice de décisions prises par le sujet dans des situations à risques auxquelles il doit s'adapter.
- Par conséquent inhérentes aussi à l'enseignement : pour susciter son activité mathématique, il faut placer l'élève dans des situations problématiques. Même dans un exercice répétitif il doit y avoir un risque d'erreur, aussi minime soit-il, sinon le proposer ne sert pas à l'apprentissage. Ainsi quand l'erreur apparaît, elle n'est pas une faute mais un accident normal pour l'élève, en réponse à une « provocation » légitime de la part du maître. Le professeur doit combiner un niveau de risque d'erreur supportable et une probabilité suffisante d'en tirer parti. S'écarter de l'équilibre ne peut que contrarier l'apprentissage.
- Souvent utiles, pour en tirer des leçons, non seulement pour celui qui la commet mais aussi pour ceux qui s'aperçoivent qu'ils auraient pu la commettre.
- La plupart sont fugitives pour l'élève : il les oublie (il doit les oublier) quand elles ont joué leur rôle. De plus, il n'a aucun intérêt à se souvenir de qui a fait l'erreur. Seules les erreurs persistantes méritent son attention.
- Elles sont sinon collectives du moins communes, et épistémiques. Le professeur traite l'erreur et les collectivités d'élèves qui les produisent mais pas les individus.

¹⁸ BROUSSEAU G. (1996) "Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'Université". in Commission Inter-IREM Premier Cycle Autour de Thalès. pp. 87 -124.

¹⁹ COMIN, Eugène. (2001) "Les difficultés de l'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège" à paraître

²⁰ GILIS, D. ; ATHENOUR ? C . (1991) " que peuvent apporter l'outil télématique et les banques de données...". Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 10/2.3 pp. 327-365

- Elles doivent être intelligibles pour les autres élèves, reconnaissables, formulables par eux, reïfiables (on doit pouvoir espérer rencontrer d'autres occasions de la produire, et donc de l'éviter), rectifiables, et si possible explicables dans le vocabulaire des élèves.

Dans les situations didactiques, les erreurs ne sont une entrave à l'apprentissage et à l'enseignement que dans quelques cas, mais elles ne peuvent pas être traitées de façon uniforme.

Bibliographie

BÉLANGER, Maurice. (1990-1991). "Les erreurs en arithmétique un siècle de présomption américaine". Petit x, no. 26, pp. 49-71.

BRUN J., CONNE F., CORDEY P.A., FLORIS R., LEMOYNE G., LEUTENEGGER F., PORTUGAIS J. (1994): Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes. in: ARTIGUE M, et al. (éds), Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHARNAY, Roland. (1990-1991). "De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation: quelques pistes...". Grand N, no. 48, pp. 37-64.

CHARNAY, Roland. (1989-1990). "Les enseignants de mathématiques et les erreurs de leurs élèves". Grand N, no. 45, pp. 31-41.

CHEVALLARD, Yves. (1986) "Esquisse d'une théorie formelle du didactique" in Actes du Colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique 16-21 nov. 1986 CIRM, Marseille-Luminy

CHEVALLARD, Yves. (1992) "Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique", Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 12/1 pp. 73-111

CHEVALLARD, Yves. (1999) "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 19/2 pp. 221-265

COMITI Claude, GRENIER Denise « Régulation didactique et changements de contrats » Recherches en didactique des mathématiques, Vol 17/3, pp. 81-103

COTE, Benoît. (Décembre 1980). "L'analyse d'erreurs, pour comprendre la démarche d'apprentissage des élèves". Bulletin AMQ, Vol. 20, no. 4, pp.10-16.

DEBLOIS, Lucie. (Décembre 1994). "La place de l'erreur dans le développement de la compréhension en mathématique". Instantanés Mathématiques, Vol. 31, no. 2, pp. 4-7.

DE KEE, Sonja. (1995-1996). L'analyse d'erreurs appliquée à l'algorithme de division". Instantanés Mathématiques, Vol. 32, no. 2, pp. 6-20.

GERVAIS, Nicole. (Septembre 1985). "Plaidoyer pour une pédagogie de l'erreur"., Instantanés Mathématiques, Vol. 22, no. 1, pp. 15-22.

NANTAIS, Nicole. (Octobre 1991). "L'analyse d'erreurs appliquée à l'algorithme de multiplication". Bulletin AMQ, Vol. 31, no. 3, pp. 4-9.

PASCAL, Denise. (1980) "La notion de zéro". DEA de DdM, U. Marseille-Luminy.

PORTUGAIS, Jean. (1995) "Didactique des mathématiques et formation des enseignants" Berne, P. Lang.

RAVESTEIN, Jean; SENSEVY, Gérard. (1993-1994). "Statut de l'erreur dans la relation didactique". Grand N, no. 54, pp. 83-90.

ROUSSET-BERT, Suzette. (1990-1991). "Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations". Petit x, no. 25, pp. 25-58.

SALIN, Marie Hélène. (1976). "Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l' cole primaire". DEA, IREM de Bordeaux.

SENSEVY, Gérard ; MERCIER, Alain ; SCHUBAUER – LEONI, Maria Luisa. (2000) "Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20". Recherches en didactique des mathématiques, Vol 20/3, pp. 265-304

SCHNEIDER, Odile. (1978) "Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de seconde". DEA de DdM, U. Marseille Luminy.

SCHUBAUER – LEONI, Maria Luisa. (1986) "Le contrat didactique: un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifest es par les élèves en mathématiques". European Journal of Psychology of Education, vol.1, n.2, pp.139-152.

TONNELLE, Jacques. (1978) "Le monde clos de la factorisation au 1e cycle". DEA de DdM, U. Marseille-Luminy.