1982 _ 3

2nde École d'été de Didactique des Maths.

Olivet 1982

G. Brousseau.

3. INGENIERIE DIDACTIQUE

D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique.

En didactique, un problème est une situation didactique particulière.

3.1. Situations didactiques.

3.1.1. Présentation.

Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constitution.

La "détermination" préalable de ce savoir est exigée du système éducatif mais pas nécessairement sous la forme de comportements et d'objectifs opérationnalisés. En fait, dans la mesure où l'organisation d'une activité est intentionnelle et que son organisateur l'a justifiée par la désignation d'un savoir dont l'apprentissage est visé et même si cette activité échoue ou dévie dans son objectif, elle est un objet d'étude pour la didactique.

3.1.2. Négociation de la situation didactique.

Ces rapports sont établis dans une négociation dont le résultat est vécu par le professeur et l'élève comme un contrat fixant à l'un comme à l'autre une sorte de règle du jeu qui laisse à chaque protagoniste un certain nombre de choix, de moyens d'actions, de moyens d'information et d'obligations, dont par exemple, un but.

Ce contrat permet de gérer et de découper le temps didactique en séquences de types variés :

Exemple 1 : Une séquence extrêmement classique comprend un apport d'information, un énoncé, une question, l'élaboration et la production d'une réponse par l'élève, une évaluation (ou renforcement), une décision didactique du professeur (le choix de la séquence suivante) etc...
Dans ces types de séquences, les décisions sont prises différemment.

Exemple 2 : Enoncé, élaboration de réponse, mise à l'épreuve, élaboration de questions, organisation de connaissances, recherche d'information, etc...
Les principaux types de pédagogies des mathématiques sont obtenus par la mise en avant de certaines des relations ou des exigences du contrat didactique avec souvent un écrasement de certaines autres.

3.1.3. Modélisation des situations didactiques.

La modélisation des situations didactiques réelles par des "contrats formels" représentés par les règles d'un jeu, a pour objet de permettre les comparaisons entre ces choix didactiques, la mise en évidence des cas "dégénérés" et de leurs effets, la production de situations appropriées répondant à des critères fixés à l'avance, l'analyse et la prévision de leurs effets.

Le but de ces études n'est pas de promouvoir une pédagogie : enseignement par objectif, programmé, par redécouverte, heuristique ou rationnel, mais de rendre compte de leur fonctionnement et de permettre l'émergence d'une didactique à caractère scientifique.

3. 2. Situations-problèmes.

Les situations problématiques sont celles qui laissent le sujet en charge d'obtenir un certain résultat par la mise en oeuvre de choix ou d'actions dont il a la responsabilité.

3.2.1. Situations quasi-isolées.

La première condition est que cette responsabilité n'est pas, pendant un certain temps, partagée avec le système éducatif (avec le maître) elle peut l'être avec des condisciples par exemple mais le système est provisoirement quasi-isolé du point de vue de l'information. La dévolution du problème à l'élève se fait le plus souvent par la communication d'un énoncé explicite mais le problème comme sens pour l'élève est composé de bien d'autres informations et de bien d'autres limitations. D'ailleurs le sens du problème pour le professeur est fort différent lui aussi.

La situation problématique la plus générale comprend,

- des relations d'interactions du sujet avec un milieu physique (un système non anticipateur, qui ne fait pas dépendre ses réponses d'intentions ou de finalités) ;
- des relations d'intercommunications avec d'autres sujets, ces relations elles-mêmes classées en trois catégories :
  - . des relations de formulation qui ont pour objet la communication d'informations,
  - . des relations de preuves qui ont pour objet d'emporter la conviction d'un interlocuteur par des moyens minimaux ;
  - . des relations d'institutionnalisation qui ont pour objet de poser des conventions.

Bien que ce qu'on désigne par "problème" dans l'enseignement ne mette traditionnellement en scène qu'un seul acteur effectif, l'élève (les autres pouvant être évoqués, simulés, intériorisés, etc...) il est possible de réaliser des problèmes par la mise en scène de partenaires divers.

3.2.2. Modélisation des problèmes.

Dans ce cas, le problème se réduit à une interaction du sujet avec un milieu réel ou supposé introduit par la consigne. La règle, explicitement ou implicitement communiquée lui donne les moyens d'envisager
- les divers états possibles du jeu X
- l'état initial $i \in X$
- l'application de l'ensemble X des états du jeu vers l'ensemble des parties de X qui définissent les choix permis dans chaque cas $\Gamma : X \to (X)$

$$x \to \Gamma(x)$$

- l'état final ou les états terminaux t $(\Gamma(t) = \emptyset)$
- une fonction de préférence, définie au moins sur l'ensemble des états terminaux.

. A chaque coup, le joueur effectue un choix ; c'est une application qui fait correspondre à l'ensemble des états permis dans un coup donné, un de ces états.

. L'autre joueur, "le milieu", établit à son tour certains états du système qui, éventuellement, peuvent être lus par le sujet comme des informations, des rétroactions sur son action...

. L'alternance des coups est fixée par une fonction appelée le trait.

3.2.3. Modélisation de l'élève.

Cette interprétation d'un problème permettra de mettre en évidence si c'est le cas :

- quelles décisions peut ou doit prendre le sujet,
- quelles anticipations il peut faire,
- et s'il peut en observer et juger les effets ou non,
- combien de tentatives pourra-t-il faire... etc.

Dans cette modélisation le sujet se manifeste par une suite de choix qui, avec les réactions du milieu constituent une partie.

L'interprétation des "procédures de résolutions" observées se fait par confrontation aux stratégies et aux tactiques que l'observateur peut imaginer, expliquer, et dont il peut étudier les caractéristiques.

Une stratégie est un ensemble de choix définis sur tous les ensembles d'états permis à partir de chaque état possible du jeu et qui, à chacun d'eux, fait correspondre un état préféré, quelle qu'en soit l'issue. Lorsqu'une stratégie est déterminée, le comportement du joueur est fixé jusqu'à la fin de la partie.

Les connaissances du joueur, ou son information, lui permettent de modifier les ensembles d'états de jeu qu'il prend en considération et de réduire les choix qu'il envisage. De cette façon, une représentation, une collection de connaissances, peut permettre au sujet, de réduire entièrement son "incertitude" en ne lui laissant accepter qu'une suite de décisons : sa solution. Mais on peut observer aussi des solutions à l'intérieur d'une représentation qui ne réduit pas entièrement l'incertitude du sujet qui prend alors sa décision, dans une certaine mesure, au hasard. Les connaissances peuvent aussi augmenter l'incertitude du sujet en lui faisant envisager de nouvelles possibilités non explicitées dans l'énoncé. Ratsimba-Rajohn et moi (1980) avions étudié la façon dont certaines connaissances s'organisent en conceptions (ou représentations) différentes en utilisant ce vocabulaire.

3.2.4. Le sens.

Ce point de vue permet la tentative de donner un "sens" aux activités de l'élève et à ses représentations et inversement aux situations didactiques. Dans le premier cas, ce sens est caractérisé par le couple formé du choix effectué et du paradygme des choix rejetés, par les conséquences prévisibles du choix et par divers caractères des stratégies retenues.

Le "sens pour l'élève" peut être évidemment différent du "sens pour le maître", comme il peut être différent avant et après une acquisition. Il est bien sûr qu'il ne s'agit que d'une modélisation, pour une approche. Le lecteur trouvera un exemple de l'utilisation de cette modélisation dans l'analyse clinique dans Gaël (Brousseau 1982).

3. 3. Un exemple.

Avant de dégager de façon plus précise ce que nous attendons d'un problème, nous allons donner un exemple en montrant l'usage qui peut être fait de cette approche, non seulement pour décrire un problème, mais pour le modifier, pour en fabriquer de nouveaux.

3.3.1. Un "problème" classique de soustraction.

Prenons un problème banal, de ceux proposés couramment aux enfants de 6 à 8 ans.

(1) *"12 tulipes ont poussé dans mon jardin, 7 sont rouges, les autres sont blanches. Combien y-a-t-il de tulipes blanches ?".*

Ce problème est le plus souvent l'occasion, pour l'élève, d'une ou plusieurs des activités suivantes :

a) Il doit prendre 12 jetons, mettre 7 d'entre eux de côté et compter les autres.

a') Il doit dessiner 12 tulipes (ou douze traits), il doit en colorier (ou en rayer) 7. Il doit compter les autres. Il témoigne ainsi qu'il a su lire le texte et compris "la situation" (en particulier ce qu'il faut compter).

a") Il doit réciter mentalement sa table d'addition 7 et 1, 8 ; 7 et 2, 9 ... 7 et 5, 12, ou même une table de soustraction 12 moins 4, 8 ... et donner la réponse... 12 moins 5, 7...
12 moins 7, 5.

a"') Il faut compter à rebours sur ses doigts 12 11 10 9 8 7 6 5

a"") Il doit calculer le complément : 8 9 10 11 12
1 2 3 4 5
(éventuellement sur ses doigts).

b) Il doit écrire une petite conclusion comme :
"Il y a 5 tulipes blanches", ou bien, plus difficilement, mais plus rituel, "nombre de tulipes blanches : 5".

c) Il doit identifier une opération qui associe les données au résultat. Ici, il prétendra qu'il faut faire "une soustraction".

d) Il doit désigner le résultat, d'abord à l'aide de cette opération : "12-7", puis directement "5" et écrire l'égalité "12-7=5". Dans son esprit c'est l'écriture de l'opération à faire et de son résultat et les signes prennent le sens
("je prends") 12 ("j'enlève") 7 ("je trouve") 5").
(-) (=)

e) Il présente son travail au maître qui lui dit si l'ensemble de ses activités est satisfaisant, qui confirme le résultat (qui devient alors "juste") ou l'infirme ("faux") et le fait corriger en montrant éventuellement ce qu'il fallait faire.

Aucune activité autre que a, a', a", a"' ou a"" n'est nécessaire pour fournir une réponse à la question posée. Ainsi l'enfant répond à une situation didactique et selon un contrat implicite mais précis. En particulier, l'association entre cet énoncé et l'opération à effectuer (attendue, exigée) ne se fait que par l'interprétation verbale ad-hoc (on "ôte" quelque chose) rien ne permet d'anticiper les résultats d'un choix malheureux (même 7+5=12 ne conviendrait vraisemblablement pas).

Ce problème est utilisé par les maîtres parmi bien d'autres du même type pour enseigner la soustraction.

3.3.2. <u>Transformation en situation-problème.</u>

Comparons-le au suivant (le rôle des crochets sera expliqué plus loin). Les acteurs doivent <u>faire</u> ce qui est indiqué.

A E
(2) *Dans ce sac* [*Paul*] *a placé* [*des cubes de plastique*]

B V_1
[*Jacques*] [*peut*] *les compter s'il veut être sûr.* [*Il y en*

n D
a [*52*]. [*Paul retire de ce sac* [*quelques pièces*]]. [*Jacques*]

V_2 d
[*peut*] *les compter. Il y en a* [*8*] . [*Jacques*] *alors essaye*

de deviner [*combien de pièces il y a maintenant dans le sac*].

i Il écrit le nombre qu'il croit juste.

ii Il parie avec [Paul] qu'il a deviné juste

V_3
iii [Paul] et [Jacques][peuvent] ensemble compter alors les pièces du sac et noter qui a gagné.

D
iiii [Paul] et [Jacques] jouent [10] fois à ce jeu. Arriveront-ils à savoir deviner à chaque coup ?

- Le fait que les enfants puissent effectivement manipuler les objets évoqués ne constitue pas une différence fondamentale avec le premier énoncé mais désormais le fait est précisé (les versions a et a' le permettaient). Au contraire, le nombre relativement élevé de pièces 52 rend pénible la solution par le dessin (a') ou par dénombrement direct.
- Mais la réponse de Jacques est une anticipation sur les résultats d'une activité <u>effectuable</u> (et qui sera effectuée aussi longtemps qu'il sera nécessaire) et contrôlable par lui (décision).
- Jacques choisit une réponse en fonction des informations qu'il reçoit mais le caractère "expérimental" de cette réponse est reconnu par l'énoncé.
- Le prix à payer en cas d'erreur est faible et conventionnel il est là pour fournir une fonction de préférence entre les choix. Cela permet des démarches d'essai et d'erreur et des corrections successives.

- Mais en cas d'erreur, la tâche de vérification n'apporte guère d'information sur ce qu'il aurait fallu faire

Données		Dénombrement		
opération ensembliste	↓	⟶ ⟶	↓	Opération numérique
		Dénombrement		Résultat.

Figure 1.

Car, comme dans le premier cas, la détermination du nombre de pièces restantes se fait par une voie (opération ensembliste puis, dénombrement) différente de l'opération mentale visée (dénombrements puis opération numérique (figure 1).

- Les conditions et l'objectif de l'apprentissage sont fixé san être formulés en terme de reproduction d'activité sans que soit évoqué le contenu de l'apprentissage, l'accent est mis sur le critère d'efficience.

3.3.3. Variables de la situation-problème, variables didactiques.

Les mots entre crochets peuvent être considérés en fait comme des variables à la disposition du maître qui peut en fixer les valeurs selon l'âge des enfants et l'étape de leur apprentissage.

Remplaçons [Paul] par le nom d'un élève quelconque ou par "je" si c'est le maître qui par le et désignons le premier personnage par A ; [Jacques] est B, et c'est l'élève interrogé, non nécessairement différent de A. [des cubes de plastique] est un référentiel E quelconque ; [peut] peut être remplacé par [ne peut pas] les deux possibilités constituent V_3 . [52] est le cardinal de E - appelons-le n - un entier naturel quelconque ; [quelques pièces] est une partie quelconque D de E, de cardinal d. Ici d = [8]. Le nombre de parties annoncées est N (ici N = 10).

Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages.

Il est clair que le triplet (n, d, N) joue un rôle important avec des enfants jeunes :

- pour n petit $n < 5$ à partir de 6 ans
  la représentation mentale est susceptible de fournir immédiatement la solution et rend inutile aussi bien les manipulations qu'a fortiori les écritures ou les calculs[1].

- pour n compris entre 10 et 30,
  * si d et n-d ne sont pas trop petits (supérieurs à 5) le dessin ou le recours aux jetons permet des conclusions

  sûres avec l'exécution d'une tâche pas trop pénible nous dirons peu coûteuse (procédure a')

  * si d est très petit par rapport à n par exemple $n := 25$ $d := 3$ (a") les enfants peuvent :

  a) compter par exemple sur leurs doigts à rebours

25	24	23	22
	1	2	3

  procédure a"'

  ce qui leur pose éventuellement des problèmes de mise en correspondance :

25	24	23
1	2	3

  mais la vérification est possible pour ceux qui "possèdent" les connaissances nécessaires. $22 + 3 = 25$.

  b) Ce qui conduit souvent les enfants à utiliser directement la vérification comme moyen de recherche mais alors ils doivent

---

1. *Ceci ne veut pas dire que l'enfant apprend directement les nombres par perception des "gestalts" mais seulement qu'après 6 ans la reconnaissance ou les dénombrements de nombres inférieurs à 5 sont très peu coûteux (cf. Fischer).*

. choisir un nombre plausible comme complément,

. faire "la somme" ou plutôt compter jusqu'à épuisement des doigts représentant ce qui est enlevé

. vérifier qu'ils obtiennent bien le nombre total

. sinon recommencer (procédure a")

* Si (n-d) est très petit la recherche du complément est beaucoup plus "facile" l'enfant utilise le même procédé qu'en b ci-dessus : il compte à partir de la valeur d jusqu'à n (procédure a"')

Exemple : d = 21	21	22	23	24	25
		1	2	3	4

* Si n est grand et si d et n-d sont assez grands aussi, l'élève peut "concevoir" l'opération qu'il pourrait faire mais y renoncer, par exemple parce qu'il prévoit qu'elle sera trop longue, trop coûteuse et donc peu fiable.

. l'élève peut aussi ne pas concevoir l'opération qu'il pourrait faire parce qu'il ne peut pas la conduire à son terme et qu'il conçoit mal ce qu'il ne peut pas accomplir. Nous pourrions discuter cette hypothèse et les rapports qu'elle a avec le passage chez l'enfant du contingent au nécessaire.

. L'élève peut aussi bien sûr effectuer quand il le connaît, un des algorithmes classiques de la "soustraction", écrite ou mentale qui s'appuient sur la base de numération usuelle. Cette décomposition permet de ramener les calculs à effectuer dans le domaine où ils peuvent être faits sans dessin sans dénombrement et sans tâtonnements. Nous avons ici recensé 6 procédures, on peut en trouver d'autres.

3.3.4 - *Domaines des procédures.*

Les domaines que nous avons déterminés grossièrement ci-dessus à l'aide des variables (n et d) paraissent évidents. Mais pouvons-nous rendre compte de cette évidence à l'aide d'un calcul de coût, pour chacune d'entre elles ? Faisons-le à titre d'exercice

Coût du dessin puisqu'il faut dessiner tous les objets le coût de l'exécution sera par exemple de la forme

$$c = (\alpha + \beta)(n+d) + \beta(n-d) = \boxed{(\alpha + 2\beta)\ n + \alpha d}$$

avec α le prix du dessin ou de la suppression d'une barre

β le prix du dénombrement d'une barre

On peut faire entrer en ligne de compte la fiabilité de l'opération et calculer l'espérance de la variable aléatoire "gain"

Si G est le gain dans un pari gagné

E la perte dans un pari perdu

N le nombre de parties jouées

k le nombre de parties gagnées

p_k la probabilité de gagner k parties N

X le gain au cours de N parties alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N} (kG - (N-k)E)\, p_k - N\, c$$

$$= \sum_{k=0}^{N} k\, p_k + E \sum_{k=0}^{N} k\, p_k - N\, E \sum_{k=0}^{N} p_k - N\, c$$

$$= (G + E) \sum_{k=0}^{N} k\, p_k - N\, (E-c)$$

$$\boxed{E(X) = N\, [G\, p - E\, (1-p) + c]}$$

où p est la probabilité de réussite d'un calcul au cours d'un essai $p_k = C_N^k\, p^k\, (1-p)^{N-k}$

On peut supposer que p est une fonction affine de n et de d, comme c. Alors E (X) $_{(n,d)}$ la nappe qui représente les coûts des problèmes est un plan (en posant p = θc il vient

$$\frac{E(X)}{N} = N\, (G\theta + E\theta + 1)\, [an + bn] - E$$

<u>coût de la recherche d'un complément</u> dans le cas où d est voisin de n, le coût est ......

$$\boxed{C = 2\, \alpha\, (n-d)}$$

La fiabilité est très bonne, prenons-la égale à 1

$$\frac{E(X_2)}{N} = [G - \alpha (n-d)]$$

<u>coût de la recherche</u> "au hasard" ou <u>par tâtonnements</u> avec des nombres plausibles. Si on admet que l'enfant cherche "sans mémoire" et peut faire plusieurs fois le même choix. Soit Y la V.A nombre de tentatives pour trouver la valeur exacte. Supposons que l'élève cherche les nombres plausibles dans un intervalle de diamètre 2 d, et supposons qu'il fasse ses choix avec une probabilité uniforme.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2d} \cdot i\, (1 - \frac{1}{2d})^{i-1}$$

$$= \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i\, (2 - \frac{1}{2d})^{i-1} = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i\, p^{i-1}$$

$$= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p^i \right) = \frac{1}{2d} \lim_{n \to \infty} \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p^n}{1-p} \right)$$

$$= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1-p^n}{1-p} \right) = \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$\boxed{E(Y) = 2\,d}$$

Et le coût d'un calcul est $c = 2\,\alpha\,d$ d'où

$$E(X) = 2\,\alpha\,d \cdot E(Y) =$$

$$\boxed{E(X) = 4\,\alpha\,d^2}$$

dans le cas où $n = 0$ ou $d = n$ il existe une procédure de coût nul.

Finalement, on peut après comparaison de ces différents coûts par des estimations des rapports entre le paramètre, dresser une carte du domaine de meilleure efficacité des différentes procédures qui a l'allure de la figure 2.

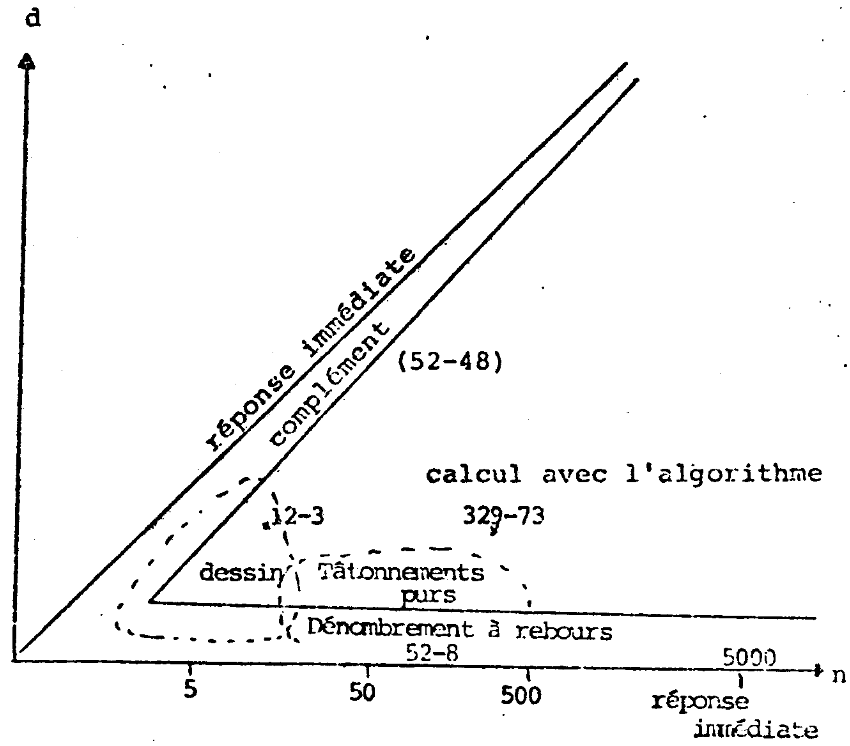

figure 2.

La procédure a" fournit aux enfants un moyen de vérification anticipé qui modifie la situation. Celle-ci se présente alors comme si, après le choix d'un nombre, par exemple 42, avant que l'enfant parie, on lui disait : "si le nombre que tu dis est juste, il y a 42 pièces dans ce sac et 8 ici, si tu comptais les pièces, combien en trouverais-tu ? (50). La réponse est-elle juste ?

En général, il n'est pas nécessaire de formuler la question de façon aussi précise ni même de la formuler du tout.

Cette procédure peut apparaître d'ailleurs, d'abord au moment de la vérification réelle comme moyen rapide pour l'un des enfants de prouver que le pari de l'autre est perdu. L'intériorisation du procédé de vérification et son inclusion dans la méthode de recherche modifie la situation en ce sens que l'élève peut augmenter de façon décisive le nombre de ses tentatives à n et d constant. De ce fait, la quantité d'information qu'il aura à traiter sera plus grande et l'usage de relations nouvelles va se trouver économiquement justifiée dans des stratégies auxquelles la faible densité en essais de la situation initiale n'aurait pas laissé de possibilité d'apparaître.

3.3.5 - *L'intervention de propriétés mathématiques et leur apprentissage sous la forme d'un modèle implicite.*

Nous venons de voir que les différentes procédures ne sont pas équivalentes. On peut essayer de vérifier que les procédures effectives observées sont conformes aux prévisions dans les différents domaines de meilleure efficacité calculés. Mais le but de ces études est de permettre au maître de provoquer l'apparition de procédures nouvelles par le choix d'un problème dans un domaine nouveau ainsi que l'appropriation de propriétés mathématiques. Voici par exemple une suite de stratégies apparue dans la situation (52-8) décrite ci-dessus, chez un enfant qui utilisait la procédure de tâtonnements (Gaël). Nous les avons rangées par ordre croissant d'efficience qui est l'ordre d'apparition observé (à partir de γ)

[α] Essais au hasard mais on peut essayer plusieurs fois le même nombre si on ne les marque pas ; et si on ne le range pas, la recherche d'un nouveau nombre devient vite coûteuse.

[β] Essais systématiques : on essaie les nombres les uns après les autres jusqu'à l'obtention de la bonne réponse :
35 (35 + 8 = 43 alors pas 35), 36, ... 44 (44 + 8 = 52) 44
Réponse.

[γ] Encadrement du résultat :
"le choix de 35 donne 43 qui est trop petit, alors 35 est trop petit". L'enfant choisit alors 48 par exemple, il oscille autour de la bonne réponse sans s'en approcher (l'enfant utilise ici implicitement la monotonie des translations).

[δ] Correction des encadrements : 43 est beaucoup plus petit que 52, 35 est beaucoup plus petit que le nombre cherché, 56 est trop grand, il faut prendre un nombre entre 35 et 48, plès près de 48 : on observe que les nombres proposés sont à l'intérieur de l'intervalle déterminés par les premiers nombres choisis.

[ε] Utilisation de la différence : 48 donne 56 qui est trop grand de 4, il faut prendre 48-4 (La procédure a ramené le problème à une procédure effectuable.)

Ces exemples montrent comment une propriété mathématique intervient comme moyen de résoudre un problème. Ici ces propriétés sont mises en oeuvre implicitement (l'élève ne pourrait sans doute pas les formuler et encore moins les prouver).

β n'exige que la capacité de faire une liste. Curieusement tous les enfants de 7 à 10 ans ne pensent pas ou ne savent pas utiliser les listes comme moyen de contrôler un dénombrement ou une procédure exhaustive. Peut-être est-ce parce que les désignations d'ensembles ont été introduites en tant que "savoirs" et les dénombrements en tant qu'activité automatique formelle et non en tant que moyen de solution de problèmes ou de contrôle d'une situation γ, V, X, étant le premier nombre choisi par l'élève (par exemple 35 Y étant le nombre visé d la différence (par exemple Y = 52 d = 8) et $f(X_1) = X_1 + d$ (par ex. $f(X_1) = 43$. Si $f(X_1)$ est trop petit (par ex. $43 < 52$) il faut prendre X_2 plus grand.

soit que le dernier nombre examiné (par exemple ici que 43 : l'élève choisit $48 > 43$

soit que x_1 : (ex : $38 > 35$)

mais sans que la correction tienne compte d'une estimation de la différence.

ξ) est un perfectionnement de γ. La correction tient compte de l'encadrement du nombre visé entre deux images :

si $f(x_{n-1}) < Y$ et si $f(x_n) > Y$

alors X_{n+1} est choisi entre x_{n-1} et x_n.

δ réclame le traitement d'un plus grand nombre de données (par exemple 35 → 43 < 52 et 48 → 56 > 52 alors le nombre suivant est choisi entre 35 et 48. Cette méthode conduit l'élève à nouveau à une énumération, qui va solliciter et renforcer sa connaissance des nombres et de la numération (par exemple, pour trouver le prédécesseur de 40).

Le modèle implicite qui permet de contrôler cette procédure comprend la topologie de $\mathbb{N}$ et un "théorème en acte" : la "translation est monotone".

c) ici la mesure des distances dans N remplace la simple comparaison à un repère et la translation conserve les différences. Cette procédure peut être mise en place par économie et anticipation des résultats de la procédure précédente, ou par une systématisation suivie d'une description et d'une analyse si la situation didactique favorise les attitudes réflexives.

3.3.6 - *La situation-problème comme situation d'apprentissage.*

1°) Remarquons que chacune des procédures que nous venons d'étudier peut s'appuyer sur les précédentes en ce sens qu'elle en est un perfectionnement plus économique du point de vue de l'action et moins incertaine en ce sens qu'elle réduit l'incertitude, le champ des possibles entre lesquels l'enfant hésite. Mais si la procédure la plus performante est oubliée ou si elle échoue pour une raison quelconque, la procédure précédente peut être utilisée et donner lieu à nouveau à la création de la suivante : l'apprentissage peut fonctionner à nouveau. Les connaissances qui sous-tendent ces procédures sont donc prises dans un paradygme où les unes peuvent remplacer les autres et leur servir de signification, de reformulation, de décomposition, d'explication...

Il est facile d'imaginer comment l'utilisation de cette situation et la manipulation des variables didactiques (n, d, N) peut permettre l'apprentissage de la soustraction non pas tant en proposant aux élèves les connaissances, mais en leur proposant des situations qui leur donnent du sens en les rendant nécessaires ou utiles.

2°) Pour que l'élève "comprenne" l'énoncé, il ne suffit pas qu'il sache "interpréter" les mots qui y figurent, il faut aussi qu'il imagine une manière d'y répondre, "qu'il puisse envisager une solution, au moins partielle à l'aide de ce qu'il sait déjà" (R. Douady 1980) qu'il ait ce que nous appelons, une stratégie de base, même si elle fait beaucoup de place au hasard (dans notre exemple α fait parfaitement l'affaire). On peut donc choisir un premier problème dans un domaine tel que la meilleure stratégie de l'élève puisse conduire au résultat, mais au prix d'un "effort" sustanciel qui peut être évalué par son coût (dans lequel l'incertitude intervient). Puis, au fur et à mesure qu'apparaîtront des stratégies nouvelles et après que l'élève ait eu la satisfaction de voir son efficacité s'améliorer, le maître peut proposer des problèmes dans un nouveau domaine.

3°) Il est clair que pour que l'effort de construction d'une nouvelle stratégie vaille la peine, il faut qu'elle soit plus efficace que celle qu'elle va remplacer, ce qui implique d'une part, que l'on pense qu'elle va être utile "assez souvent" et que l'adaptation de connaissances qu'elle nécessite ne soit pas trop coûteuse.

En fait, cette adaptation n'est "bon marché" que dans le cas de ce que Piaget appelle une assimilation. Mais nous avons pu montrer ailleurs (Brousseau ( ) que la filiation des connaissances ou des théories ne pourrait pas être réduite seulement à une succession d'assimilation et d'apports de petites quantités d'informations (et ce, d'autant plus que l'on veut que les connaissances fonctionnent, comme solutions de problèmes et que l'on veut que l'élève participe comme nous verrons plus loin que c'est utile au choix des problèmes).

Le plus souvent, une nouvelle solution réclame une réorganisation des connaissances, un changement de point de vue... Dès lors, il y a intérêt à choisir les nouveaux problèmes de telle manière (c'est-à-dire dans un domaine tel) que la nouvelle solution associée à la connaissance visée soit beaucoup plus économique que l'ancienne. Ce qui oblige à renoncer à de petites progressions régulières le long des variables didactiques et à opter pour des sauts informationnels suffisants. Toutefois, si la stratégie de base devient vraiment trop visiblement inefficace ou impossible, le problème risque de n'avoir plus de sens pour l'élève (sous ma direction, ce problème a été étudié par

J.M Digneau (19).

Nous dirons que la construction d'une nouvelle procédure se fait d'autant mieux que le problème se trouve au voisinage du point où l'efficacité relative de la stratégie correspondante est la plus élevée.

Cette efficacité relative est définie comme le rapport entre son coût et le coût de la meilleure des stratégies concurrentes. Elle peut s'évaluer même si l'on ne connaît pas les coûts eux-mêmes.

4°) La probabilité de créer ces nouvelles procédures est une fonction croissante du nombre d'occasions qui sont offertes à l'élève de le faire, on pourrait penser qu'il existe toujours un N assez grand pour amener cette probabilité aussi voisine de 1 qu'on le désire, mais ce n'est pas exact et d'autres mécanismes didactiques doivent entrer en jeu - nous y reviendrons plus loin (tout de même on peut se rapporter à la querelle entre Chomsky et Skinner ou plus tard Suppes et Nelson).

5°) La possibilité d'organiser de tels processus a été étudiée à plusieurs reprises et à l'occasion de concepts mathématiques très divers. Il ne faudrait pas faire de ce procédé le modèle de tout apprentissage de connaissances, mais il est certain que son usage a été quelque peu ignoré ou négligé.

Les méthodes des études visant à rechercher un processus optimal sont évidentes mais extrêmement coûteuses, ce qui explique qu'elles soient si rares (voir cependant Bessot et Richard (19). La question de savoir si le processus fait partie de la connaissance et donc peut être proposé comme un objectif en soi, a été étudiée par M. Darche ( ) sans qu'il soit possible pour l'instant de se prononcer. Il est probable que les problèmes et surtout les processus de filiations tels que ceux que nous venons d'évoquer sont les moyens d'établir les rapports constitutifs des concepts et de leur fonctionnement, aussi bien de leurs rapports syntaxiques (structurels, logico-mathématiques) que fonctionnels (pragmatiques ou sémantiques sans qu'on puisse les confondre. Au contraire, "l'oubli" des conditions d'acquisition de la connaissance doit faire partie du processus de détachement nécessaire à la connaissance (je ne dis pas "à l'abstraction", concept had-hoc qui n'explique rien et qui est à la mathématisation ce que la vertu dormitive de l'opium a été à la thérapeutique de la morphine).

On peut toutefois penser que la représentation de la soustraction n'est pas réduite à la connaissance d'une stratégie de solution accompagnée de celle d'un prétendu sens de l'opération qui permettrait de l'appliquer, mais qu'elle comporte vraisemblablement la capacité de contrôler plusieurs stratégies en passant de l'une à l'autre selon les circonstances, c'est ce qui organise les connaissances en concept.

Remarquons bien qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre la découverte d'une connaissance et sa mise en oeuvre par une "compréhension" de la situation. La tendance à l'économie favorise le recours à des "automatismes" qui sont accompagnés d'une perte du sens, c'est-à-dire la cessation d'envisager certaines choix possibles. L'acquisition d'un "bon automatisme", c'est-à-dire d'un algorithme, permet un fonctionnement où le sujet ne fait aucun recours au sens. (aux choix possibles, donc aux connaissances qui les commandent). La "compréhension" est en fait la possibilité de restaurer certains moyens de contrôles (par forcément les mêmes) et d'engendre les alternatives à rejeter.

6°) Mais l'organisation d'un processus n'est pas "réduite" comme on pourrait le croire d'après cette partie de notre exposé au choix par le professeur d'une suite de problèmes dont la "résolution" va produire la connaissance comme une sorte de résidu d'activité. Il s'agira aussi de faire approprier par l'élève le processus de <u>production des questions et des problèmes</u>.

Au niveau le plus bas : la décision de "rejouer", de tenter une nouvelle fois de réussir, doit être remise à l'élève. Pour cela, il faut deux conditions :

- d'une part que la situation-problème s'y prête. On exprime parfois cela en disant qu'elle doit être ouverte. Ce terme dont on a beaucoup usé n'a jamais été correctement éclairci et nous devons revenir sur le sens qu'il convient de lui donner ici.

- d'autre part, que le sujet "entre dans le jeu" ce

qui dépend de l'enjeu - non pas au sens de la récompense, mais au sens du désir, - et de la signification psychologique de la situation. Le terme de motivation ne convient pas très bien car il laisse penser que le désir du sujet serait un moteur qui puiserait sa source hors du procès de connaissance qui ne serait que consommateur de motivation. En fait, le jeu avec la situation-problème peut être producteur de la seule motivation authentique : une motivation endogène. Nous avons commencé à étudier ce phénomène avec F. Kone (1981). La gestion du désir de l'élève fait partie de l'analyse didactique des processus et de la tâche des professeurs (voir aussi G. Dumas "l'affectivité en mathématiques")
Exemple : Comparer les deux problèmes suivants A et B :

A : "démontrez que les trois hauteurs d'un (de tout) triangle sont sont concurrentes"

B : "dessinez un triangle dont vous tracerez les trois hauteurs en prenant bien garde de ne pas présenter un cas particulier (il faudra le prouver à ses camarades)"

Le défi, même implicite, est certes un moyen de "motiver" l'élève, mais je pense qu'il s'appuie beaucoup plus sur la structure de la situation créée que sur des attitudes psychologiques. Un défi sur une situation fermée n'a aucun sens et aucun effet.

A un niveau plus "élevé" du point de vue cognitif, mais de nature très comparable, la remise entre les mains de l'élève du pouvoir de "choisir" les questions qu'il va traiter - ou plutôt de les élaborer - va faire l'objet d'une négociation, celle du contrat didactique, sujet dont nous allons dire un mot plus loin. Il est clair que ce ne peut être réglé par une simple décision pédagogique de proposer des situations ouvertes (décision qui ne dépendrait pas du contenu cognitif). La plupart des situations didactiques et des problèmes n'ont pas été choisis pour faire poser de nouvelles questions qu'il est nécessaire d'examiner, et dans ces conditions le choix du problème suivant ne peut relever que de la fantaisie du hasard ou de l'idéologie épistémologique (en particulier de l'épistémologie scolaire) et a les plus grandes chances de ne rien produire d'utile.

7°) L'étude des situations susceptibles de provoquer le démarrage d'une véritable dialectique scientifique et d'une authentique genèse d'un concept, sort du cadre de cette étude dans la mesure où l'on essaie de cerner la notion de problème au sens classique. Mais il n'y aurait pas d'obstacles insurmontables à considérer comme des problèmes d'un type nouveau, les situations de communication, de preuve et d'institutionnalisation qui sont étudiées actuellement par de nombreux chercheurs, comme moyens de stimuler et de simuler les processus de genèse des connaissances en situation scolaire. Il faut bien remarquer que ces types de problèmes et les dialectiques qui s'y attachent n'ont que très rarement et très accidentellement été pris en considération par les promoteurs des pédagogies du problème. Or, il s'agit de faire intérioriser par le sujet tous les termes du procès de connaissance (aussi bien le "sur-moi" cognitif à qui il faut prouver ce que l'on croit, que l'interlocuteur intérieur à qui il faut parler le langage commun ou que le "moi" qui réclame sans cesse des actions, des décisions et des jugements pour "exister"), il faut bien admettre que les "problèmes et les conditions qui s'y attachent ne sont qu'une partie, essentielle certes, mais insuffisante du processus.

De nombreux travaux (par exemple Lakatos, mais aussi
) montrent qu'il n'y a pas de procès standard qui produisent toutes les connaissances, par voie royale - il faut vivre chaque aventure et les réductions ne sont pas plus évidentes que les productions.

8°) Evidemment un même texte pourra être, selon l'âge ou le niveau des élèves, ou selon le contrat didactique, obtenu par le maître, soit un exercice, soit un problème d'application, soit un problème au sens classique, ou encore une situation de "découverte" etc... (Mais il est clair que le contrat ne permet pas de rattraper dans un problème une structure déficiente, un choix malheureux des valeurs des variables... etc). Mais examinons, toujours sur notre exemple comment ce contrat didactique peut à ce point changer la nature d'un problème par l'intervention de l'idéologie épistémologique du professeur.

Considérons le problème (·) proposé explicitement ou implicitement comme problème d'application (au sens où l'entend Glaeser dans sa classification (19). Cela veut dire que l'on a déjà rencontré des problèmes déclarés semblables - par exemple comme problème introductif - et exhibé une solution, qu'on a érigé un problème "semblable en problème-type - c'est-à-dire convenu qu'on allait devoir s'y référer. Et si l'élève ne sait pas faire le problème il est "convenu" qu'on rappellera le problème "type" et sa solution, ou l'explication qui l'aura accompagné pour faire à nouveau l'économie d'une recherche.

Exemple : "nous a ..s rencontré plusieurs fois ce genre de problèmes souviens-t i... par exemple... quelle opération avons-nous faite ? et ici qu'est-ce qu'il faut faire ... au lieu de ... nous avons ici quoi ? et on retranche quoi ?... applique la même méthode... fais un dessin..."

La règle qui s'impose dans ce discours, c'est qu'il y a une méthode, qu l'on a apprise et qu'il faut "appliquer"... laquelle, pourquoi, quels sont les éléments à mettre en correspondance ? et cela devient "quelle opération faut-il faire ?" Quels sont les signes, les indicateurs qui peuvent me mettre sur la voie : la dernière leçon ? les mots inducteurs...

Le contrat didactique a imposé à l'élève une autre problématique et une incertitude exogène centrée sur les raisons "didactiques" du choix du problème, sur le désir du professeur etc... et pas du tout sur la question posée et les connaissances en jeu.

Ce fait est bien connu des professeurs qui, en réaction, doivent "jouer" par le choix des problèmes à casser les idées fausses "les sous-compréhensions" dirait Pluvinage que leur contrat a pu produire.

Par exemple, je ~~vous~~ laisse découvrir la dialectique erreurs/corrections que peut engendrer la suite d'exercices suivants :

1. Quel est le plus grand décimal x tel que

$$105,001 \geq 57,3801 + x$$

même question avec > supérieur strictement.

2. Encadrement à 10^{-5} près de 2,8

3. On sait que $3{,}25 < x < 3{,}28$
et que $27{,}11 < y < 27{,}12$

Quel est le meilleur encadrement pour $y - x$ et $\frac{y}{x}$ que vous pouvez trouver avec des décimaux à deux chiffres après la virgule.

4. $d \leq \frac{22}{21} < d + 10^{-3}$. Quel est le plus petit décimal s'il existe qui satisfait cette relation ? Le plus grand ? intervalle solution ?
(suite de problèmes posés à des élèves-insituteurs).

Ce deuxième contrat, où chaque nouveau problème conduit à rejeter une erreur possible (peut-être est-ce le "contre-exemple" de Glaeser), est beaucoup plus proche d'une genèse d'un concept que le premier, mais il est tout aussi déformant que lui. L'analyse des différents types de contrats qui se nouent et des raisons de leurs succès et de leurs échecs est à peine commencée mais il est clair que l'analyse d'une situation-problème et son observation de façon quasi-isolée (du système éducatif) donne des renseignements précieux mais tout à fait insuffisants puisque le contrat change le sens du problème posé.