GUY BROUSSEAU

LES GRANDEURS DANS LA SCOLARITE OBLIGATOIRE[1]

Abstract :

The concept of magnitude used to be a fundamental concept of mathematics teaching it is now hardly studied hidden under various structures. The survey of the numerous types of magnitude is only approached in the teaching of other disciplines. His text presents a didactical genesis of all kinds of magnitudes, based on situations proper to explicit definition and meaning. It is meant to be used effectively by mathematics teachers a primary and lower secondary levels of education

1. INTRODUCTION ET METHODOLOGIE

1.1. UN PROBLEME DE MACRO-DIDACTIQUE

Il s'agit ici d'identifier les problèmes de didactique liés à la notion de grandeur et à l'apprentissage des " grandeurs " dans la scolarité obligatoire. Mon intérêt pour ce sujet n'est pas récent. J'ai l'impression d'assister, impuissant, à des dégradations drastiques des conditions de son enseignement sous l'effet de forces incoercibles et ignorées par mes contemporains. Peut-être ces craintes ne sont-elles, que l'effet de l'âge, qui rend moins optimiste, mais je relève beaucoup de dysfonctionnements nouveaux. Il me semble d'autre part qu'il ne sert à rien de jouer les Cassandre : dans le meilleur des cas, identifier des phénomènes et leur trouver des explications donne toujours l'impression qu'avec quelques décisions empiriques opportunes on pourra les contrôler. Je crois donc qu'il vaut mieux travailler à donner en même temps les analyses scientifiques et les moyens théoriques et techniques de produire des solutions appropriées.

Il existe nombre d'études sur différents aspects de l'enseignement des grandeurs, mais ces études portent presque toujours seulement sur quelques aspects particuliers de la question.

C'est le cas de toutes celles qui ont pour objet la proposition de situations, l'observation des réactions des élèves à ces situations, celle de leurs apprentissages, la description de leçons réalisées dans des classes, etc. J'ai songé un instant à évoquer ici la liste des situations que j'avais personnellement conçues ou observées dans ce domaine. Je n'y ai renoncé que pour l'instant car réunir les travaux de micro-ingénierie[2] didactique que nous connaissons dans ce domaine pourrait être bien utile.

---

[1] Je remercie vivement Michèle Artigue pour sa patience, pour l'aide qu'elle m'a apporté et pour les corrections qu'elle m'a suggérées.

Les pages qui suivent n'étaient que l'amorce d'un texte qui devait en comprendre trois autres, qui ne pouvaient pas être communiqués dans le cadre du cours, mais que j'espérais pouvoir faire passer 'off '. Ce texte n'a pas pu être achevé, chaque nouvelle étude soulevait de nouvelles questions. On trouvera dans le cédérom une version plus longue comprenant des bribes : sur l'enseignement ds grandeurs au 20ème siècle, sur la classification des grandeurs scolaires et sur les situations utilisables pour leur enseignement dans la scolarité obligatoire, sur les phénomènes, sur les obstacles et sur les voies qui pourraient s'ouvrir.

[2] Micro-ingénierie : type d'ingénierie étudiant ou produisant une situation unique faiblement évolutive, ou une séquence courte, relative à l'usage ou à l'apprentissage d'*une* connaissance bien déterminée et limitée. Certains utilisent à l'opposé le terme de Macro-ingénierie pour désigner l'étude ou la production de conditions (organisation, ordonnancement etc.) portant sur des processus longs et donc sur des ensembles de connaissances. Cette position n'est pas illégitime mais il faut faire attention : Si la micro-ingénierie est bien l'ingénierie de la Micro-didactique, qui a pour objet l'analyse de la détermination simultanée des situations

Les autres études consistent essentiellement en un travail relevant d'une ou de plusieurs disciplines telles que les mathématiques, l'épistémologie, l'histoire des mathématiques, la psychologie, la sociologie ou la pédagogie etc. et de ces travaux déclarés " préalables " - et le plus souvent fort respectables au demeurant -, suivi d'inférences directes et de conclusions dans le domaine de la didactique, sans véritables études spécifiques ni justifications scientifiques.
Il s'en trouve d'ailleurs fort peu qui portent sur l'enseignement de sujets mathématiques aussi complexes que les grandeurs et leur mesure.
Je ne récuse nullement l'usage d'informations importées d'autres disciplines, bien au contraire, et je trouve parfaitement légitime d'établir celles dont nous avons besoin dans les disciplines qui peuvent le mieux les fournir, mais je récuse a priori toute inférence directe tirée de ces informations, pour l'enseignement, sans un examen critique adéquat dans le champ de la didactique proprement dite. Cette attitude m'a toujours condamné à essayer de présenter des alternatives, et me voici donc aujourd'hui confronté à ce défi d'esquisser ce que seraient les études macrodidactiques1 du concept de grandeur. Ce projet peut sembler une gageure, car le concept de Grandeur est si intimement lié depuis si longtemps aux progrès de l'humanité en général et à celui des mathématiques en particulier, il apparaît sous des formes si variées, dans un si grand nombre de circonstances différentes, dans les pratiques de sociétés si diverses, il intervient dans l'enseignement sur une période si longue, il est lié à tant d'autres sujets mathématiques qu'il est très hasardeux de postuler a priori la validité didactique de la simple juxtaposition des approches indépendantes classiques[3] . C'est du moins ce que je chercherai à établir par l'observation de quelques phénomènes.
Mais ces caractéristiques montrent bien qu'éclaircir les conditions théoriques et pratiques de l'enseignement des grandeurs et de leurs mesures est typiquement une question de macro-didactique dans tous les sens du terme.

C'est en effet un concept

i) qui est très utilisé, bien qu'avec des sens assez différents, par de nombreuses institutions importantes et différentes,
ii) qui est très ancien et qui a donc laissé dans la culture des traces des diverses étapes de son développement,

---

(conditions), des connaissances en jeu et des comportements qui en manifestent l'enseignement et l'apprentissage, la Macro-ingénierie n'est pas l'ingénierie de la Macro-didactique, laquelle a pour objet l'étude des interactions didactiques entre de grandes institutions ou entre de grands systèmes didactiques réels à propos de larges agrégats de connaissances.

[3] Les études de l'enseignement d'une connaissance mathématique scolaire assez particulière, comme un théorème ou une propriété, ont souvent été composées d'une suite plus ou moins diversifiée d'approches : mathématique, historique (du théorème et de son enseignement) qui fournit l'essentiel des problèmes relatifs à la notion, linguistique, psychologique (comportements de sujets sur divers exercices et apprentissages), psychopédagogiques ou sociologiques (comportements de professeurs par exemple) etc. Cette liste est loin d'être exhaustive. Chaque approche pour être « valide » doit être menée suivant les méthodes et à l'aide des concepts de la discipline correspondante et par conséquent presque « indépendamment » des autres approches. Ainsi une analyse historique ne peut guère profiter d'études mathématiques trop actuelles ou d'études proprement didactiques si elles sont trop originales, ou psychologiques… La simple juxtaposition de ces approches donne une image certes intéressante mais qui risque d'être trompeuse de l'enseignement d'une notion, en ce sens que rien ne garantit la validité des inférences nées de l'exportation finalement naïves d'un énoncé « vrai » d'un domaine, dans un autre. Plus la notion mathématique à l'étude devient à la fois générale et complexe plus les études classiques sont partielles et plus leur juxtaposition a-critique risque de laisser échapper des phénomènes essentiels. La théorie « classique » des situations propose une méthode de conjonction des énoncés assez employée en micro-didactique et en micro ingénierie, mais encore très peu étudiée en macro-didactique.

iii) qui a fait l'objet " récemment" d'évolutions profondes dans les institutions scientifiques ce qui a accru les divergences " transpositives " didactiques[4] ,
iv) qui est étroitement lié à de nombreuses connaissances mathématiques fondamentales,
v) de sorte qu'il s'apprend dans des processus naturels et scolaires précoces et très prolongés.
A l'énoncé de ces caractères, il est déjà clair que chacun apporte son lot de difficultés et d'incompatibilités avec ce qu'apportent les autres et par conséquent réagit sur eux. On peut en inférer que la macrodidactique ne pourra pas être un simple agrégat d'études sur des agrégats de constituants de la relation didactique.

Il s'agira ici pour moi d'esquisser les types de recherches que l'on peut attendre des didacticiens des mathématiques dans ce domaine. J'ai probablement présumé de mes forces, mais il me fallait saisir l'occasion pour la dernière fois peut être - d'affronter ce problème. Ce que je ne pourrai pas montrer, je le suggèrerai et d'autres peut être le prolongeront.

1.2. CADRE METHODOLOGIQUE

1.2.1. APPROCHE CLASSIQUE

A cause des conditions iv) et v), l'approche mathématique soutenue par des pédagogies et des didactiques " classiques " s'est longtemps imposée à l'enseignement. Dans le dernier tiers du XXième siècle l'approche psychogénétique a appuyé certaines réformes voulues par les mathématiciens au titre de iii) et a la fois a fourni l'essentiel des recherches et a pesé son poids sur l'enseignement.
L'ouvrage de Nicolas Rouche " le sens de la mesure ", a fait le point, il y a une dizaine d'années sur les approches de ce type. La bibliographie de cet ouvrage fait ressortir que très peu d'études prennent les grandeurs directement comme objet. La plupart ne s'y intéressent essentiellement que comme une voie vers les nombres et vers la mesure. Et elles le font essentiellement en restant dans le domaine " des objets mentaux " et des concepts mathématiques.
Rouche choisit de prolonger les travaux de Freudenthal et de partir des " phénomènes ". Cette méthode est à première vue déjà débarrassée des impedimenta et des incohérences de la pratique et de certaines réalités et s'écarte des limitations excessives des modèles axiomatiques. Un phénomène est " toute relation souvent familière entre des ensembles, des formes, des grandeurs ou des nombres et qui se présente à l'esprit comme matériau et point d'appui de la pensée mathématique à ses débuts ". Malgré cela, Freudenthal (1983) se trouve encore devant un tel dédale qu'il s'exclame " j'espère au moins que je ne me noierai pas dans cet océan ". Nicolas Rouche connaît ces difficultés, il est intéressant de noter les raisons pour lesquelles il persiste :

> Ce livre a pour objet d'exposer bon nombre de phénomènes qui impliquent des grandeurs et des nombres (irrationnels non compris !) Mais, nous l'avons déjà dit, l'ensemble de ces phénomènes est extrêmement touffu, ce qui rend difficile de les exposer clairement. Pour éviter que le lecteur ne se perde, il fallait trouver un fil conducteur. Or ce fil ne pouvait être celui du développement réel de ces notions dans l'esprit des enfants, et ce pour plusieurs raisons. La première est que plusieurs des phénomènes en question peuvent demeurer (éventuellement sans dommage) définitivement absents de l'esprit de certains enfants. La seconde est que, sur bien des points, chaque enfant progresse à sa façon et qu'il faudrait d'abord dégager une improbable façon moyenne ou typique.

[4] Remarque : le mot « Grandeur » est ignoré dans l'index de l'Encyclopaedia Universalis, mais il apparaît dans 1250 articles, la plupart scientifiques.

> La troisième enfin est que la progression d'un enfant particulier que l'on prendrait pour témoin n'est pas suffisamment explicite (il se passe beaucoup plus de choses dans l'esprit que ce que l'observation peut déceler).
> Le fil conducteur ne pouvait pas être non plus celui de la genèse historique, car des phénomènes aussi élémentaires et fondamentaux que l'addition des grandeurs, l'ordre, les fractionnements simples, etc. remontent plutôt à la préhistoire, aux balbutiements de l'homo sapiens, perdu dans la nuit des temps… Hanz Freudenthal a tenté de dresser le vaste inventaire commenté des phénomènes qui conduisent non seulement aux grandeurs, aux nombres rationnels aux proportions mais quasiment à l'ensemble des mathématiques élémentaires. (Rouche 1992, 21)

1.2.3. APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Aujourd'hui, l'approche anthropologique - en particulier praxéologique - paraît a priori mieux adaptée pour décrire de façon ouverte la diversité des situations réelles créées par i), ii) et iii) dans diverses institutions, surtout s'il ne s'agit que de comprendre les difficultés.

Il est en effet indispensable pour le didacticien de pouvoir distinguer les différents sens et usages des termes relatifs aux grandeurs et à la mesure, suivant les institutions et les époques auxquelles il s'intéresse. Il doit donc aussi, en particulier, fixer les termes et les modèles qu'il utilise pour cette analyse. Ils lui sont propres et ils peuvent devoir différer de ceux qu'il étudie[5] .

Mais pour pouvoir fournir des instruments didactiques et culturels de résolution et d'ajustement des flux didactiques, il est nécessaire de coller de façon à la fois plus ample et plus précise aux phénomènes spécifiques que l'on y rencontre, et pour cela en construire des " modèles " qui permettront :

- d'une part de rechercher une certaine cohérence entre les observations éparses,
- d'autre part d'établir un pont entre les pratiques actuelles et les alternatives qui pourraient être envisagées.

C'est pourquoi sur ces points, en didactique comme en économie, l'approche anthropologique ne me semble pas entièrement satisfaisante. Je vais utiliser la théorie des situations pour guider mon étude. Comme nous l'avons constaté à plusieurs reprises, les deux approches se complètent sans se contredire. Mon but est de tenter d'organiser l'univers des grandeurs et de leur mesure.

1.2.4. APPROCHE AVEC LA THEORIE DES SITUATIONS

Il s'agit toujours de représenter les connaissances mathématiques par des situations caractéristiques (aussi fondamentales, i.e. aussi simples et générales, que possible), qui les " fonctionnalisent " sous diverses formes par le jeu de leurs variables cognitives et didactiques. Chaque situation de ce type engendre une famille de situations qui appellent comme moyen de solution des formes diverses de cette connaissance.

Il est alors possible d'ordonner (plus ou moins grossièrement) ces situations, en fonction de leur complexité. En première approche, les organisations axiomatiques des connaissances proposent des hiérarchies possibles entre lesquelles la modélisation par des situations permet de choisir de façon plus fine en fonction d'une complexité plus réaliste. En particulier, il est

---

[5] Cette position soulève parfois une certaine incompréhension et même une certaine hostilité chez les scientifiques dont le métier consiste justement à fournir les meilleurs modèles supposés devoir s'imposer dans la culture. Bien que la relativisation des connaissances et l'axiomatique ne soient pas des idées entièrement nouvelles, elles choquent toujours un peu car on a tendance à les assimiler au relativisme. Un positionnement externe comme celui d'anthropologue semble de nature à permettre une meilleure acceptation. A titre personnel, je revendique un positionnement de ces études interne aux mathématiques.

alors possible de " justifier " les apprentissages par différents types de causes et de raisons d'apprentissages, logiques et ergonomiques, c'est-à-dire accessibles aux élèves, accessibles à leur adaptation et/ou à leur compréhension. Cette méthode doit répondre à la nécessité de rendre cohérente la genèse et l'usage des connaissances mathématiques par des procédés qui n'acceptent pas toute liaison " mathématique " ou logique comme un " modèle " possible d'articulation de l'apprentissage.
C'est autour de cette approche par la théorie des situations didactiques que nous avons choisi d'organiser notre étude. Elle nous conduit en particulier à déterminer l'objet " grandeur " dont nous nous préoccupons par des procédés spécifiques. Il s'agit de définir les concepts mathématiques par leur fonction dans des situations et de les organiser suivant l'ergonomie de ces situations. Comme ce procédé diffère un peu des moyens classiques, nous n'en présentons ci-après, que les éléments essentiels avec quelques efforts que j'espère didactiques.

2. LE CONCEPT DE GRANDEUR

2.1. SCHEMA THEORIQUE INITIAL

Dans un texte destiné à la commission inter IREM " premier Cycle ", Colmez (1995) présente ainsi un cadre théorique de la " construction d'une grandeur " :

$$\begin{tikzcd} \text{Objets} \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "g"'] & & \text{Nombres} \\ & \text{Grandeurs :} \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

On établit, sur un ensemble d'objets, un protocole expérimental de comparaison, d'assemblages, de découpages et de transformations qui permet de définir :
· d'une part une application m de l'ensemble des objets vers un ensemble de nombres (généralement R ou R+)
· d'autre part une application g de l'ensemble des objets vers un nouvel ensemble (les grandeurs), et une bijection m de l'ensemble des grandeurs vers l'ensemble des nombres de sorte que :

$$m = \mu \circ g$$

L'application g ne dépend que du protocole expérimental. Les applications m et μ dépendent de l'objet choisi comme étalon, dont la grandeur est prise comme unité.
Dans tous les cas il est théoriquement possible de définir une application m, puis l'application g (indépendante du choix de m) ou de définir directement g puis les applications m et μ correspondantes.

Ce texte est assez caractéristique de la position des mathématiciens qui, d'une part identifient souvent grandeurs et grandeurs mesurables et qui, d'autre part, utilisent indifféremment plusieurs acceptions du mot " grandeurs "[6]. Nous allons néanmoins le prendre

---

[6] On peut identifier différents usages vernaculaires du terme « grandeur ». :
i) *La grandeur* (singulier), la qualité de « ce qui est susceptible d'être grand ou petit » en toute généralité, comme dans la définition de D'Alembert.
ii) *Une grandeur* au sens de « un type de variables mathématiques, physiques, biologiques, psychologiques sociologiques, économiques etc. dites de même espèce, c'est à dire comparables entre elles ». En ce sens, la longueur, la masse, le temps (les durées), l'aire, la probabilité, le prix, la vitesse de sédimentation, etc. sont des grandeurs. Les grandeurs classiques sont 'mesurables' par une application ad hoc dans des structures numériques positives. Mais le terme s'étend aussi à des variables seulement 'repérables' ou comparables, suivant un certain critère. Ces variables simplement ordonnées comme la température ou l'intelligence ne se prêtent pas aux opérations élémentaires courantes en particulier la somme ou la différence.Le terme 'grandeur' a été souvent employé dans l'histoire dans ce sens avec l'espoir d'identifier ensuite une grandeur mesurable correspondante. Le terme 'grandeur' s'étend enfin, surtout en Physique à des variables 'réelles', comme les

comme base de notre étude pour la soumettre à la méthode typique de la Théorie des situations (T.S.).
Observons toutefois que chaque composante : objet, grandeur et nombres reste à définir par des ensembles de situations qui mobiliseront des dispositifs et des enjeux spécifiques. La collection des objets, celle des grandeurs, et celle des structures numériques que nous allons explorer seront donc évoquées par des agrégats de situations. Nous appellerons familièrement " univers " ces agrégats. Ainsi les univers d'objets, de grandeurs, et de nombres pourront être distingués de l'idée ou de la connaissance théorique et culturelle des " objets ", des grandeurs et des nombres.
Le schéma devient alors le suivant. La différence principale consiste en l'interprétation des flèches. Il ne s'agit plus d'applications mais de situations qui mettent en jeu des éléments des divers univers. S(m) représente des situations où des manipulations d'objets et de nombres rendent nécessaires certaines connaissances caractéristiques d'une mesure.

$$\begin{tikzcd}
\text{Univers des Objets} \arrow[rr, "S(m)"] \arrow[dr, "S(g)"'] & & \text{Univers des Nombres} \\
& \text{Univers des Grandeurs} \arrow[ur, "S(m)"'] &
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de préciser ces situations, et si possible d'en donner UNE genèse.

2.2. DES COMPARAISONS A L'ORDINATION

En négligeant les univers intermédiaires, on trouve à l'origine, des objets et à la fin, des nombres. On peut en inférer que certaines " manipulations " d'objets peuvent être facilitées à l'aide d'une modélisation par des " nombres " ou par des structures mathématiques "similaires".
(1) de quelle nature sont les manipulations qui vont mobiliser, rendre fonctionnels (adéquats et économiques) ces genres de modèles ?
(2) qu'est-ce qui va rendre nécessaire le recours à une nouvelle composante, qui sera une grandeur (au sens ii) ou iii) de la note 6) ?

2.2.1. LES COMPARAISONS DEUX A DEUX.

Dans une situation, le motif de l'action du sujet est le choix d'une des issues, préférable aux autres, quelle qu'en soit la raison. Nous pouvons nous représenter cette situation sans rien

---

grandeurs qui se représentent par des réels (positifs ou non): les puissances, les angles etc., ou même non strictement numériques : grandeurs complexes, vectorielles (comme la vitesse dans l'espace), tensorielles etc.

iii) *Une grandeur spécifiée* est une variable appartenant à l'un des types ci-dessus, déterminée (spécifiée) par des circonstances ou des objets particuliers, en particulier lorsqu'elle intervient dans des problèmes effectifs. C'est donc une variable : la longueur des trajets d'un représentant, la taille des enfants, le prix d'un produit, la vitesse de tel mobile, la probabilité de tel événement, etc. Les raisonnements et les calculs s'effectuent sur ces grandeurs qui sont les variables proprement dites des problèmes, en ce sens que chacune d'elle est constituée par l'ensemble des valeurs qu'elle est susceptible de prendre.

iv) Une *valeur* précise – constante - d'une grandeur spécifiée: par exemple la longueur de telle table, “le” volume de tel cube précis. Il lui correspond la classe de toutes les valeurs déterminées par des mesures en correspondance linéaire (se déduisant les unes des autres par un changement d'unité). Elle peut être une inconnue, elle n'est pas une variable. Par exemple ce nombre unique ne peut pas être « proportionnel » *à* quoi que ce soit : il faut le replacer dans une grandeur. Il s'agit donc ici essentiellement de la quatrième acception.

perdre de sa généralité comme une situation de comparaison, et même comme une comparaison d'objets. Ce qui peut faire soupçonner à un observateur l'existence d'une connaissance chez le sujet est la reproduction régulière des mêmes comportements dans des situations que lui, l'observateur, trouve similaires par le fait qu'elles requièrent la mise en jeu de ce que lui, l'observateur, considère comme la même connaissance (encore faut-il que le choix ne soit pas déterminé par la situation de telle façon que la faculté de connaître du sujet n'intervienne pas).

Supposons que l'identification des situations et des objets, leur reconnaissance par la constitution de classes et de hiérarchies soit suffisante (sans négliger les cas où la grandeur est un élément de reconnaissance des objets).

Le sujet choisit régulièrement un même objet dans des situations similaires. Il peut même avoir conscience de l'alternative, auquel cas nous dirons qu'il est dans une situation de comparaison.

Par exemple, il choisit toujours une cale de même épaisseur pour stabiliser un meuble. Cela ne signifie pas que le sujet " connaît " l'épaisseur. Il lui suffit d'essayer plusieurs cales et de prendre celle qui est adéquate. La connaissance doit se manifester comme instrument de décision anticipée, de prévision. Ici la plupart des chercheurs prennent en compte l'influence prépondérante des perceptions qui résultent chez l'enfant de ses expériences primitives pour expliquer des comportements plus techniques ou plus sociaux. Pour comprendre le fonctionnement de la situation, il faut se priver de cette facilité. Par exemple, le sujet doit choisir entre deux objets, sur la présentation de l'un, l'autre étant absent et le seul critère distinctif étant effectivement la taille. Alors il doit se référer à un modèle mental - une connaissance - de ce caractère de l'objet absent. Cette connaissance devant être suffisante pour prendre la décision et minimale du point de vue des caractères nécessaires, elle pourrait être - pour l'observateur - une application sur un ensemble ordonné à deux éléments (qui pourraient être 0 et 1).

Cette situation est très générale, elle permet, par exemple, de représenter le choix, entre deux énoncés bien formés, de celui qui est toujours vrai.

2.2.3. COMPARAISONS ENTRE PLUSIEURS ISSUES

Considérons un ensemble de situations qui ne diffèrent - pour l'observateur - que par la variation d'une variable. La connaissance de cette variable par le sujet se manifestera par des anticipations régulières et cohérentes.

Pour déterminer dans ce cas les situations qui nous intéressent, supposons que le sujet a devant lui un ensemble de boîtes identiques qui contiennent chacune un bout d'allumette. Les bouts d'allumettes sont tous de longueur différente. Le sujet n'a le droit d'ouvrir à la fois que deux boîtes, et il peut alors comparer les deux bouts d'allumettes en les plaçant l'un contre l'autre. Il les remet ensuite dans leur boîte avant de faire de nouvelles comparaisons. Plusieurs questions peuvent lui être posées qui finissent de déterminer les situations, par exemple trouver le bout d'allumette le plus long.

Oublions maintenant qu'il s'agit d'allumettes et de longueurs : le sujet doit choisir entre A, B et C :

Il choisit A contre B, puis B contre C… s'il choisit ensuite C contre B ou même s'il a besoin de confronter effectivement C et B, nous dirons qu'il ne possède aucune des

connaissances qui permettraient à l'observateur d'ordonner AB C. (pour le sujet, A B et C ne peuvent pas déterminer une grandeur)[7] .
L'étude de l'organisation des préférences comme modèle de la genèse des grandeurs devrait logiquement intervenir ici, mais elle sortirait du cadre de ce cours [8].
La stratégie caractéristique d'une conception minimale d'une " grandeur " est la suivante : le sujet prend un premier objet, le compare à un autre, puis un autre, jusqu'à ce qu'il trouve un objet plus grand, qui remplace le premier… et le processus continue. Le dernier objet qui n'est pas dominé est le plus grand de la collection. La relation doit être transitive et elle doit aussi être antisymétrique (sinon l'algorithme échoue).
A ce stade, l'idée d'une grandeur est ce qui conduit un sujet à adopter ces stratégies d'agrégation de comparaisons deux à deux, tendant à établir dans l'ensemble des objets auxquels il s'intéresse, un ordre total. Le sujet peut avoir une idée locale de grandeur (qui guide ses comparaisons 2 à 2, mais cette idée peut ou non, selon les cas aboutir à un ordre total. Les causes d'échec sont diverses :
- existence de cycles, auquel cas l'idée d'une grandeur basée sur ces comparaisons 2 à 2 doit être abandonnée
- impossibilité de comparer certains couples dans le cas de demi treillis (arbres ou treillis)
Dans certains cas, le sujet peut essayer de dissocier ses comparaisons et d'envisager la combinaison de deux " grandeurs " ou plus.
Le contre exemple le plus banal de préordre qui ne conduit pas à une grandeur est l'inclusion dans un ensemble fini. Mais cette structure ressemble déjà tellement à une grandeur que parfois certains s'y trompent et y importent un vocabulaire et des conceptions empruntés aux grandeurs : ex. : " le tout est plus grand que la partie "
L'existence d'objets équivalents conduit à la création de classes d'objets ordonnées par passage au quotient.
Si le processus aboutit, le sujet conçoit effectivement une " grandeur " définie sur cet ensemble.
En d'autres termes, l'idée de grandeur est attachée à un ordre total qui assure l'unicité de la chaîne produite.

A ce stade " une grandeur pourrait donc être conçue comme un ensemble d'objets muni d'un ordre total ".

2.2.4. ORDINATIONS D'UN ENSEMBLE

L'intérêt de concevoir l'ordination totale d'un ensemble apparaît clairement dans les stratégies de mise en ordre d'un ensemble. Il ne s'agit plus de trouver le plus grand objet d'une collection (ou le premier) mais de déterminer la place de chacun par rapport à tous les autres.
La comparaison totale par couples demande $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons par couples. La réitération simple du processus de recherche du plus grand, puis le plus grand de ceux qui restent, etc. permet la réalisation de la tâche mais n'offre aucune économie par rapport à la comparaison

[7] La cohérence du sujet et de ses comportements entre dans la définition de ce qu'est un sujet et de ce qu'est une grandeur comme le montre le paradoxe de Condorcet : une population de votants ne forment pas « un » sujet politique, et l'ordre de trois candidats n'est pas une « grandeur » puisque l'agrégation des opinions à leur sujet peut être incohérente. La conception d'une grandeur exige au moins une concordance significative d'opinions.

[8] Le lecteur pourra consulter M. Barbut et Frey, « Techniques ordinales en analyse des données, algèbre et combinatoire » Hachette et la thèse de Pilar Orus Baguena (Bordeaux 1 (1992)

totale. L'économie due à l'usage de la transitivité de l'ordre apparaît dès lors que l'on utilise les étapes de la recherche du plus grand.
Comme précédemment, le sujet prend un premier objet x_0 , le compare à un autre, puis un autre, jusqu'à ce qu'il trouve un objet plus grand x_1, mais avant qu'il ne remplace le premier objet par le nouveau, il détermine (il isole par exemple) l'ensemble X_0 des objets qu'il vient de comparer et qui sont plus petits que le premier essayé… le processus continue et à chaque remplacement, l'objet xi délaissé pour un plus grand se trouve associé à une collection X_{i-1} d'objets de taille plus faible que son prédécesseur. Le dernier objet X_n qui n'est pas dominé est toujours le plus grand de la collection, mais son successeur prédécesseur immédiat est à rechercher seulement dans l'ultime collection X_{n-1}. Le précédent dans la même ou dans la précédente etc. L'économie est aussi évidente que la complexité. Ce qui n'empêche pas les enfants de l'utiliser " spontanément " dans le cas de grandeurs simples. Cette stratégie suppose une transitivité récurrente qui caractérise la structure minimale d'une " grandeur ".

L'ordination " arbitraire " d'un ensemble, notion que Briand [Briand 1999] a étudiée sous le nom d'énumération relève du même processus pour identifier ou comparer la composition de deux collections (ou la validité d'une liste). L'ordination que nous venons d'évoquer est beaucoup plus complexe par le fait qu'elle n'est pas arbitraire. C'est cette complexité supplémentaire qui caractérise le fait qu'il faut tenir compte d'une " grandeur ".

2.2.5. INTERET D'UNE ECHELLE UNIVERSELLE D'ORDINATION (RANGS)

Un ensemble de rangs exprimé par des nombres (mots indépendants de l'ensemble d'objets)
- permet d'exprimer et de modéliser toutes les ordinations,
- et en particulier de simplifier les manipulations nécessaires.

Il s'agit là d'un " théorème " de la Théorie des Situations Didactiques que nous ne "démontrerons " pas ici.
Remarquons que maintenant la modélisation mobilise O comme ensemble d'objets et R comme ensemble de rangs (exprimés par des nombres). L'application m du schéma de COLMEZ est un isomorphisme d'ordre, mais cette application, appelons la " a ", est locale et provisoire, elle n'a rien du caractère universel d'une grandeur. Nous utilisons ici provisoirement le terme " grandeur " dans la langue de travail des observateurs, il n'est pas encore défini.

2.2.6. LES TRANSFORMATIONS DANS L'ENSEMBLE DES OBJETS

Le schéma général des situations d'ordination que nous avons choisi est très simplifié et très restrictif. La fonction essentielle de la représentation de l'ordre dans un ensemble par une échelle ordinale est une fonction de modélisation. Nous avons montré comment la considération de rangs permet de traiter des classes de problèmes, plus rapidement ou plus économiquement que la manipulation directe des objets correspondants. Mais le modèle n'est utilisable que dans la mesure où les transformations qui affectent les objets de la grandeur restent compatibles avec l'isomorphisme d'ordre défini ci-dessus. Ces transformations sont souvent spécifiques de chaque " type " de grandeur (au sens ii).

2.3. LES STRUCTURES DES GRANDEURS

2.3.1. NECESSITE DE CONSIDERER LES MANIPULATIONS DES OBJETS

Mais n'allons pas trop vite et remarquons que l'enjeu de notre situation doit s'imposer au sujet de façon implicite (!) car elle présente un défaut majeur : la compréhension de la consigne

" trouver le plus " grand " objet " suppose chez le sujet la connaissance préalable de la grandeur en question… alors que l'on cherche à la lui faire définir !

Il est par conséquent nécessaire de poser le problème en terme de résultats effectifs : par exemple, il s'agit dans une collection, de saisir un objet susceptible de rentrer dans un trou assez petit, ou au contraire " vaincre " tous les autres dans des confrontations etc. Toutes les manipulations effectives d'objets ne sont pas compatibles avec leur ordination : on peut les déplacer mais pas les casser par exemple. Certains objets sont remplaçables par d'autres pour certains effets, d'autres non etc.

Ainsi, la pratique des situations qui requièrent les manipulations d'objets dans la perspective de réaliser des comparaisons unifiées et stables est indispensable à leur conception et à leur apprentissage.

Aussi la considération de ces manipulations est nécessaire aussi bien pour définir les grandeurs spécifiées que pour produire la genèse de la connaissance de chaque type de grandeurs.

Il apparaît alors que notre schéma minimal O -> a -> R doit être complété par un ensemble G d'objets déterminés par les manipulations dans O , compatibles avec les objectifs des situations d'ordination.

G est la grandeur (au sens iii de la note) associée à la classe de situations d'ordination introduite ci-dessus. Nous venons de justifier son existence, sa prise en considération par l'observateur. Il reste à montrer son adéquation et les économies qu'elle procure dans les anticipations puis dans la construction de nouvelles ordinations. Mais nous pouvons déjà proposer une réponse à la question (2) posée au début de cette étude.

" une grandeur est un ensemble de classes d'objets, stables par rapport aux manipulations ou aux transformations compatibles avec la résolution d'une situation d'ordination ". Cette " définition " englobe les grandeurs non mesurables et les grandeurs mesurables.

2.3.2. LE DEDOUBLEMENT ENTRE LES GRANDEURS ET LEUR STRUCTURE MATHEMATIQUE

C'est pourquoi il convient de considérer séparément les grandeurs et leur structure mathématique.

La connaissance des structures mathématiques des grandeurs est nécessaire pour identifier et différencier les conditions dans lesquelles vont pouvoir être déterminées certaines applications de grandeurs dans des ensembles de nombres. Ces structures sont beaucoup moins nombreuses que les grandeurs elles-mêmes. Leur généralité permet de résoudre certains problèmes de façon beaucoup plus économique. Nous voyons que la conception des structures de grandeurs (le mot n'existe pas en mathématique) répond à des situations d'une tout autre nature que la simple ordination d'objets : il s'agit de déterminer des types d'applications (mesure, intégration) et des ensembles de nombres (naturels, rationnels, réels, etc.) possédant les propriétés minimales requises pour tel ou tel type de situations.

Le schéma initial s'interprète pour l'instant de la façon suivante :

Objets	Grandeur	Structure Mathématique	Fonction « mesure »	structure numérique
Univers des Objets	U. Grandeur Classes d'objets	ordre total	isomorphisme d'ordre	Rangs Naturels Décimaux [9]

Les rangs sont dans le cas simple une section commençante de N par exemple mais la somme dans N n'y a pas de sens.

2.4. DE L'ORDINATION AUX GRANDEURS REPERABLES

2.4.1. GRANDEURS REPERABLES

a) La mesure peut être conçue comme un moyen économique de résoudre des familles de situations d'ordination.
En effet, si le sujet peut prévoir qu'il aura à réordonner les mêmes objets, par exemple dans le cas où la collection à ranger viendrait à augmenter en cours de travail, il doit mettre au point des stratégies plus économiques que la réordination totale à chaque fois.
Des dispositions matérielles ou spatiales comme celles que nous avons évoquées plus haut et surtout l'utilisation des couples (objets , rang) inventés pour cela, peuvent simplifier cette réordination : chaque objet nouveau n'a à être confronté qu'à une seule suite croissante d'objets pour trouver sa place.
Mais si les conditions sont plus sévères, par exemple si la trace matérielle de l'ordination précédente est détruite, le coût des réordinations devient prohibitif.
b) Apparaît alors l'intérêt d'associer à chaque objet une place fixe dans une sorte d'échelle " absolue " de " rangs ". Pour rester stable, une telle échelle absolue devrait " contenir " toutes les échelles possibles. Cette échelle devrait donc être un ensemble dense de nombres. Cela est relativement facile à concevoir mais la dénomination de ces rangs absolus pose des problèmes. D'autre part, la relation " successeur " serait perdue.

Soit (E ,<) une grandeur. Nous cherchons un ensemble A et une application croissante f de (E, <) dans A, telle que pour toute partie X de E, et r étant l'isomorphisme d'ordre de X sur une section commençante de N.

$$f(x1) < f(x2) \Rightarrow r(x1) < r(x2)$$

Sur un ensemble E fini le problème théorique est trivial, mais si le sujet ne connaît que " des " parties finies telles que X, en nombre non déterminé, tout se passe comme si E était infini.
Les grandeurs qui permettent la construction d'une telle échelle absolue sont *des grandeurs repérables*.

2.4.2. LES OPERATIONS SUR LES OBJETS

Certaines manipulations sur les objets comme la mise bout à bout de deux segments, ou la pose de deux masses dans le même plateau d'une balance produisent des objets nouveaux qui peuvent (souvent mais pas toujours) entrer dans les mêmes situations d'ordination.

[9] Dans le cas d'un ordre total « évolutif » comme l'ordre lexicographique.

L'ensemble G correspondant inclut alors des classes d'objets, des transformations compatibles, et des opérations stables dans ces classes d'objets. Il est nécessaire de bien distinguer qu'il s'agit de transformations et d'opérations matérielles déterminées, effectives et compatibles avec des situations effectives. Il ne s'agit pas de leur représentation mathématique. La confusion est fréquente dans les institutions scolaires où la réalisation effective est nécessairement remplaçable par sa description, bien plus économique et où la culture a depuis longtemps confondu les deux domaines. On parle de la somme de deux segments comme de celle de deux angles. Cette expression n'appartient ni au domaine des grandeurs spécifiées ni même à celui des types de grandeurs qui sont distinctes justement à cause des formes d'opérations qu'ont y effectue.

2.5. DES GRANDEURS REPERABLES A LA MESURE DES GRANDEURS

2.5.1. LES MESURES " NATURELLES "

La construction d'une échelle compatible avec les opérations et avec les transformations spécifiques dans l'ensemble des objets, repose maintenant sur l'existence d'un premier ensemble numérique approprié. Les entiers naturels vont apparaître dans la mesure de la grandeur probablement la plus primitive : le cardinal des collections finies. Les méthodes d'énumération des collections que nous avons évoquées plus haut et la considération de classes d'objets " équivalents " conduit à des comparaisons de collections suivant divers critères, dont le cardinal. Nous avons proposé diverses situations qui déterminent la mesure des cardinaux et qui permettent la genèse des nombres naturels dans les conditions culturelles actuelles où le nombre est omniprésent dans la culture [G. GUITEL 1975].

Les objets de la grandeur " cardinaux finis " sont des collections finies d'objets bien identifiés, la structure de cette grandeur est celle de l'ensemble des parties d'un ensemble fini aussi grand que nécessaire. Les transformations compatibles sur les collections d'objets sont celles qui " conservent " les collections elles mêmes, et celles qui conservent le cardinal sont les bijections. Les injections déterminent un ordre total dans P(E) et par passage à l'ensemble quotient, on obtient bien une échelle discrète : une section commençante de N aussi longue qu'on veut.

Nous ne décrirons pas ici en termes de situations les raisons qui font apparaître ces caractères comme déterminants, mais nous renvoyons le lecteur aux nombreuses situations didactiques qui ont été élaborées par la recherche didactique pour l'enseignement de cette grandeur (et ajouter une référence au moins). Il est clair par exemple que le moyen fondamental pour comparer des cardinaux est l'injection et que les " opérations " d'adjonction ou de retrait de parties disjointes est le moyen de réaliser des collections " plus grandes " ou " plus petites ", dans les situations où la comparaison est justifiée (par exemple, par une compétition).

L'adoption d'un échelle universelle passe par la désignation de ses éléments par des mots distincts, indépendants de la nature des objets qui composent les collections, ce qui exige évidemment des formes plus complexes de situations d'action et de formulation. Le modèle en est bien connu.

La détermination du cardinal d'un ensemble par n'importe quelle méthode est son dénombrement, celle qui procède par énumération est le comptage. A l'application mathématique " mesure ", la pratique fait correspondre diverses méthodes effectives de mesurage.

Le schéma théorique des univers prend la forme suivante :

Objets	Grandeur	Structure Mathématique	mesure	structure numérique
collections	Cardinal, Classes de collections équipotentes,	ensembles de parties,	dénombrements	naturels

Notons que le " cardinal fini " satisfait les conditions traditionnelles données pour définir une grandeur mesurable : l' "équipotence " et la " réunion disjointe " d'objets permettent de définir l'égalité et la somme de leurs mesures.

2.5.2. LES GROUPEMENTS-UNITE

Dans les situations de dénombrement naturel, la détermination des objets n'est pas arbitraire. Le coût de la mesure d'une collection par dénombrement un à un, et celui de son expression dans le système de numération le plus simple - une barre par objet par exemple -, est une fonction linéaire de coefficient 1, du cardinal de cette collection. Dans certaines conditions, ce coût s'avère à la longue excessif. Surgit alors l'idée de " compter par paquets " (par exemple à l'aide d'une grille pour compter des perles ou des billes), ce qui permet de réduire le coefficient de la fonction mesure (qui n'est plus exactement linéaire). L'idée de groupement réduit à la fois le coût du mesurage et celui de l'écriture du nombre. Elle est la base de l'idée d'unité. Le comptage de groupements égaux est le modèle du mesurage des " grandeurs " continues, et la base de la conception des nombres comme rapports entre deux quantités, c'est-à-dire du nombre abstrait. Dans le dénombrement naturel simple, il n'y a aucune raison de considérer un objet comme une unité représentant d'autres objets, et de comprendre un nombre comme composé d'un certain nombre de fois un même objet. La formulation montre d'elle-même la contradiction. L'objet comme unité résulte de la considération d'un objet comme un groupement à un seul objet, cas particulier du dénombrement par groupes. De même, on comprend que le cardinal 1 ne soit pas un nombre (et a fortiori le zéro), puisqu'il ne suscite aucun mesurage…

Le schéma est alors le suivant :

Objets	Grandeur	Structure Mathématique	mesure	structure numérique
groupement-unité	Cardinal fini	ensembles de parties		
Collections de collections	Cardinal fini	espace mesurable discret	dénombrement	naturels

2.5.3. LES CHANGEMENTS D'UNITES ET LA NUMERATION

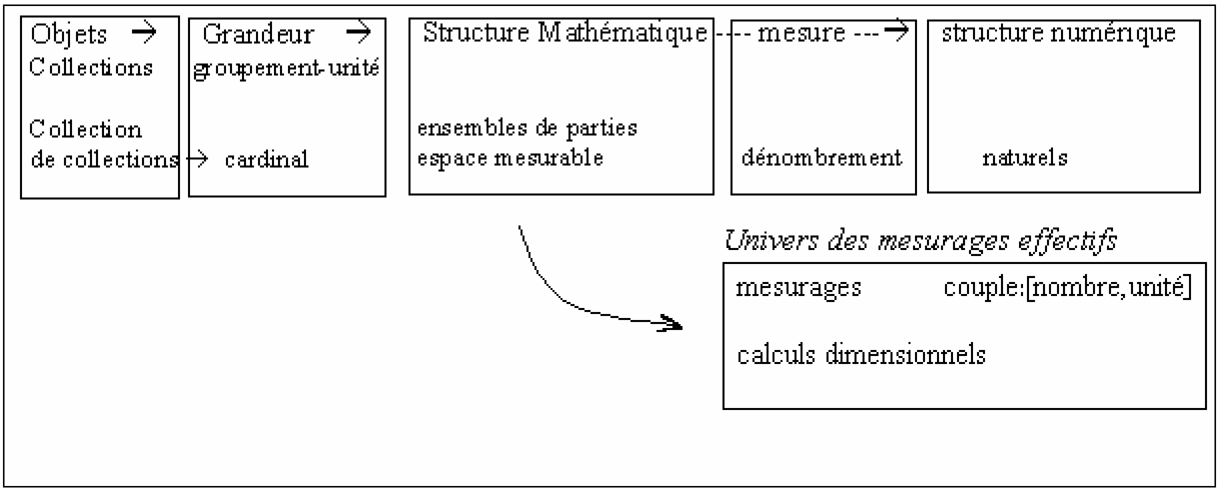
Avec l'apparition des groupements unités, un nouvel univers de situations et de connaissances apparaît, ou plutôt une dissociation des univers considérés jusque là. En effet, pour un même objet ou une même collection, ce système peut attribuer plusieurs valeurs numériques, par exemple :

- 28 (ou 28 barres) qui indique le nombre d'objets,
- 7, le nombre de groupements-unité de 4
- ou 4 si les groupements-unités comprennent 7 objets etc.

Même si des conventions précises limitent le nombre des expressions admises, cette multiplicité des valeurs numériques possibles pour un même objet crée un nouvel univers de situations et de connaissances : celui de la prévision des résultats de mesurages suivant les changements d'unités utilisés. Il n'y a plus " une " mesure effective pour un objet, mais toute une famille, dont les éléments se déduisent les uns des autres suivant le choix de l'unité. On peut alors garder le schéma précédent et remplacer la structure numérique d'arrivée par une structure vectorielle : le résultat du mesurage est un couple formé d'un nombre et de l'indication d'une unité. Mais on peut aussi considérer ces situations comme constituant un univers à part. La raison de conserver l'univers des nombres est évidemment que les problèmes les plus importants relatifs aux grandeurs ne sont pas affectés par les changements d'unités. Il y a un intérêt théorique à séparer ces types de questions. Il y a aussi un intérêt pratique : la plupart des phénomènes auxquels on s'intéresse et dans lesquels la mesure est impliquée - notamment en physique -, sont indépendants des unités choisies. C'est ainsi que se traduit maintenant l'idée qu'il existe pour les grandeurs une valeur intrinsèque associée à un objet particulier : SA longueur, SON poids. Réactions différentes pour laisser de côté l'univers des changements d'unités : les utilisateurs sont conduits à raisonner sur les objets en termes de " grandeur " et les mathématiciens sur les nombres avec l'idée d'une mesure unique.

Les problèmes de choix et de calculs des unités dans les mesurages est illustré par la situation " Mesure des masses " étudiée par Colmez puis par Nadine BROUSSEAU (1987) .

Nous pouvons appeler l'univers des situations dans lesquelles il faut traiter de ces nouveaux objets l'univers des mesurages effectifs qui complexifie ainsi le schéma initial :



2.5.4. LES MESURAGES DISCRETS DANS LES " GRANDEURS " NON DISCRETES

Le dénombrement sert alors de modèle pour les grandeurs non discrètes. Le problème essentiel sera de déterminer une forme unitaire et des méthodes de recouvrement de l'objet[10] à mesurer : déplacements, juxtaposition et pavage, après quoi il suffira de compter les pavés unités du recouvrement.

Nous avons toujours cinq univers, l'étude effective des différentes grandeurs mobilise toujours, à la fois, l'univers de ce que nous avons appelé " grandeur " et celui de leur structure

[10] Nous utilisons métaphoriquement le vocabulaire du recouvrement du plan mais il faut entendre qu'il s'agit de n'importe quel type de grandeur. Par exemple, la détermination d'une forme unitaire pour la mesure de l'aire a pour correspondant la détermination des segments et des intervalles, celle des dates et des laps de temps…

mathématique. Même si les mathématiciens ne considèrent que celui des structures utilisables, peut-être pourrait-on les rassembler en un univers unique celui des grandeurs ?

Dans cette phase, les progrès reposent essentiellement sur la détermination et le choix des formes unitaires, des méthodes de juxtaposition etc. c'est-à-dire sur l'étude de l'univers des objets et celui de la grandeur dont il est question. Ces problèmes, y compris les croyances des élèves et les problèmes de métrologie liés aux appareils, sont présentés dans la leçon " Le poids d'un récipient "[11]

Cependant, deux nouveaux types de situations liés à deux problèmes voisins mais distincts apparaissent déjà : l'encadrement et la création de structures numériques appropriées. Remarquons que ces problèmes se conçoivent et sont motivés par la considération des grandeurs munies implicitement au moins de la structure d'espace mesurable.

2.5.5. DEUX AUTRES UNIVERS CLASSIQUES :

L'encadrement naturel des valeurs de grandeurs discrètes préfigure les problèmes d'approximation et pose le problème de construire un ensemble numérique dense pour achever le projet du mesurage

a) l'approximation dans les grandeurs non discrètes.

La structure d'arrivée du mesurage comprend deux types de composantes numériques : par exemple deux valeurs approchées, l'une par excès l'autre par défaut, ou bien l'une indiquant une valeur dite " approchée ", l'autre déterminant un intervalle d'erreur ou " de confiance " : ce peut-être un seul nombre, le diamètre d'un intervalle, ou une distribution de fréquence ou de probabilité sur cet intervalle etc.

b) la densification et la complétion des naturels

Ces problèmes peuvent être posés exclusivement dans l'univers des nombres, mais les rapports avec les problèmes de mesurage sont évidents. Ils ont été abondamment illustrés et étudiés, en particulier dans l'ouvrage " Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire " [N. et G. Brousseau, IREM de Bordeaux 1987]

Remarquons que la complétion directe proposée par Régine Douady montre l'intérêt qu'il peut y avoir à ignorer certains méandres historiques dans la genèse des instruments cognitifs modernes.

2.6. VERS UNE ECHELLE " ABSOLUE " DE " LA GRANDEUR "

2.6.1. EN RESUME

Chacun des univers de situations que nous avons évoqués sont le lieu de problèmes spécifiques dont l'étude fait partie de l'univers en question et tend à le développer de manière indépendante :

- la détermination des objets, les structures de classifications et la prise en considération de nouveaux objets (par exemple les fonctions, objet de mesures),
- la détermination, la dissociation ou la combinaison de grandeurs pour fabriquer des modèles toujours plus précis et fiables pour des champs plus étendus de phénomènes que l'on examine,
- l'étude des structures mathématiques qui peuvent servir dans cette entreprise,
- celle de l'intégration et des types de fonctions pour étendre les mesures à de nouveaux objets,

[11] Le poids d’un récipient ou l’étude par des élèves de problèmes de mesurage », dans Grand N, n°50, pp65-87.

- la création de structures mathématiques " numériques " nouvelles qui permettent de faire entrer de nouveaux objets dans la logique de la mesure (échelles d'intervalles, dimensions d'espaces, fractals, etc.)
Nous nous sommes arrêtés ci-dessus aux mesures réelles positives, car nous verrons que l'inventaire de leurs applications dans l'enseignement obligatoire est déjà très volumineux.
Mais il est intéressant toutefois de suivre encore un peu la logique de la recherche de modèles pour représenter " ce qui est grand ou petit " en la poursuivant dans deux direction.

2.6.2. L'OBJECTIVATION DE LA GRANDEUR PAR DES MESURES DE MESURES

Toutes les mesures de grandeurs aboutissent à des valeurs numériques et tous les systèmes de mesurage tendent à représenter les valeurs des grandeurs des objets par des expressions familières des valeurs numériques traitées : elles ne doivent guère posséder plus de quatre chiffres significatifs et se présenter comme comprises entre 0 et 100, parfois entre 0 et 1 Cet écrasement tend à anéantir la possibilité de comparer entre elles des grandeurs spécifiées différentes. Deux voies principales s'ouvrent pour la rétablir :
- l'ordre " objectif " de grandeur, qui se réfère à un rangement total des objets suivant une grandeur et qui " mesure " les tailles à l'aide d'une échelle exponentielle qui remplace ainsi les rapports linéaires dont la portée se révèle trop courte. Une bonne image scolaire de cette mesure est la taille des nombres familière aux enfants.
- La rareté relative - i.e. la place dans une fonction de répartition - dans sa catégorie. Un objet est " grand " s'il est plus grand que la plupart des objets de sa catégorie.
Cette dernière modélisation donne apparemment au terme " grandeur " un sens relatif puisqu'il dépend de ce qui est connu d'une société ou d'un sujet. En fait, puisque les valeurs obtenues sont des scalaires qui ne dépendent plus ni de la nature de l'objet, ni d'aucune unité, cette mesure permet des comparaisons entre des grandeurs spécifiées différentes et même de types différents. Par exemple, la phrase insolite : " ce lapin est plus gros que ce cheval n'est grand " a un sens.
Des expériences menées dans les années 70 ont montré que l'initiation à ces types de mesures statistiques et même probabilistes n'était pas hors de portée des élèves de l'école primaire. Ce qui ne veut pas dire qu'il faille absolument la faire.

3. CONCLUSIONS

Nous avons arrêté notre étude au seuil de ce qui fait habituellement la partie principale de l'étude des grandeurs, des mesures et des nombres. De nombreux textes traitent déjà ces questions dans un esprit proche de celui que nous venons de proposer.
Le but de ce texte était de montrer les moyens de traduire en termes de situations les principales caractéristiques du concept de grandeur. Nous avons naturellement ordonné leur présentation de façon à faire ressortir un schéma général pour une genèse de ce concept. Il serait absurde de considérer que ce schéma doit être suivi par toute genèse didactique, il n'est destiné qu'à servir de base aux études qu'il convient alors d'entreprendre pour élaborer et discuter une telle genèse qui ne peut être que le résultat d'études et de compromis entre diverses conditions dont de nombreuses n'ont pas été évoquées ici.
Il n'est pas plus " le " modèle didactique pour l'enseignement que ne le serait un exposé axiomatique ou la description détaillée d'une genèse historique de ce concept. Simplement, il devrait permettre de mieux évaluer les caractéristiques d'une genèse particulière.
Les problèmes de macro didactique qui restent maintenant à examiner sont les suivants :

· La détermination des genèses didactiques - au sens concret de suites de situations didactiques - pour les différentes grandeurs, et de leurs mesures, compatibles avec le développement intellectuel des enfants. Le nombre des possibilités de genèses différentes paraît infini si on se contente de n'envisager que les relations " logiques ". Mais la " mise en situation " de ces relations fait vite intervenir d'autres caractères économiques plus restrictifs.

· L'évaluation des coûts et des rendements de ces genèses. Les variables qui interviennent dans cette évaluation sont nombreuses et actuellement mal quantifiables, elles concernent notamment :

· l'exploitation des expériences non scolaires des élèves (c'est l'évolution des pratiques non scolaires du mesurage qui est à la base des évolutions et des difficultés des enseignements),

· le temps total devant être consacré dans ces situations aux diverses formes d'apprentissage nécessaires,
· la facilité de mise en œuvre didactique et donc le coût des matériels nécessaires et accessoirement celui de l'adaptation de la compétence des professeurs,
· les résultats scolaires : locaux, c'est-à-dire qui tiennent compte du nombre d'élèves ayant " acquis " des connaissances " suffisantes " relativement aux différentes situations " caractéristiques ", ou plus généraux - qui tiennent compte de l'intérêt ou de l'importance de ces acquisitions pour les apprentissages ultérieurs ou pour les utilisations…
· La recherche des genèses minimales compatibles avec les horaires envisageables et un niveau raisonnable des connaissances finalement acquises. Tout ne peut pas être enseigné mais tout ce qui n'est pas utilisé dans les filières les plus longues ne peut pas être banni des enseignements, surtout à l'élémentaire. En particulier, l'évolution qui a fait disparaître les " grandeurs " du vocabulaire des mathématiques, en les renvoyant dans le domaine des sciences, a créé un problème de référence pour l'enseignement élémentaire

Ces éléments ont pour objet de guider les choix politiques liés à l'enseignement. " Beau programme " mais que l'on aurait tort de ne pas prendre en considération pour orienter les recherches de didactique.
J'espère que cette esquisse aura donné une idée sur une des façons dont la théorie des situations peut intervenir concrètement dans une étude de macro ingénierie et de macro-didactique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARBUT M. et MONJARDET, B. 1970 *Ordre et classification, Algèbre combinatoire, 1 et 2*, Librairie Hachette Paris

BESSOT, A. et EBERHARD, M. (1983) Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 4.3, 293-324.

BOULEAU, N., (1999) *Philosophies des mathématiques et de la modélisation du chercheur à l'ingénieur,* Paris : L'harmattan.

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération, *Recherches en Didactique des mathématiques,* 19.1. 41-75.

BROUSSEAU N. (1987), *La mesure au CM1*, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU N. et G (1986), *Rationnels et Décimaux*, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU N. et G. (1992) Le poids d'un récipient ou l'étude par des élèves de problèmes de mesurage, *Grand N,* 50, 65-87.

BROUSSEAU G. (1999) *Les univers de la mesure*, communication interne (commission Kahane), version préalable dans Brousseau N ; et G. (1992).

CHEVALLARD Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 19.2, 221-266.
COLMEZ F. (1995) Place et rôle des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques de l'Ecole Primaire au Lycée, in *Contribution aux journées de la commission Inter-IREM " premier Cycle* ".
DHOMBRES J. (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*, Paris, CEDIC/ Fernand Nathan
DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil objet, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7.2.
DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.-J. (1989), Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics* 20.4, 387-424.
FREUDENTHAL H. (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel Dordrech.
GUITEL G. (1975) *Histoire Comparée des Numérations écrites* " Paris, Flammarion.
KAZIN, M. et KOTCHARIAN, M. (1980) Dimensionnelle (analyse et similitude) *Encyclopaedia universalis* 7. 497b
LEBESGUE H. (1931) *La mesure des grandeurs*, Genève : L'enseignement mathématique.
LICHNEROWICS A. (1994) Géométrie et relativité, in J.-P. Pier (ed), *Development of Mathematics 1900-1950* Basel : Birkhäuser.
LIZCANO E. (1993) *Imaginario colectivo y creacion matemàtica*, Barcelona : Gedisa ed.
Rapports " Géométrie " et " Calcul " de la commission KAHANE 1999
REVUZ, H (1980) Intégration et mesure, *Encyclopaedia universalis.*
ROUCHE N. (1992) *Le sens de la mesure*, Paris : Didier Hatier.
ROY, M. F. (2000), Géométrie algébrique réelle, in J.-P. Pier (ed) *Development of Mathematics* 1950-2000,Basel : Birkhäuser, pp. 939-965.
WHITNEY H. (1968a), The Mathematics of Physical Quantities, *American Mathematical Monthly,* 75, 115-138.
WHITNEY H. (1968b), Quantities srtuctures and dimensional analysis, *American Mathematical Monthly*, 76, 227-257.