GUY BROUSSEAU
17 RUE CESAR FRANCK
33 400 TALENCE
DAEST
UNIVERSITE « VICTOR SEGALEN » BORDEAUX 2

LES GRANDEURS DANS LA SCOLARITE OBLIGATOIRE

COURS POUR LA XIE ECOLE D'ETE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Téléphoe et Fac-similé : 33. (0) 556 805 993

Résumé.

Le concept de grandeur, autrefois base classique des mathématiques, n'y est plus guère étudié aujourd'hui que sous forme de diverses structures. L'étude des nombreux types nouveaux de grandeurs est renvoyée aux disciplines. Le présent texte propose une genèse didactique de toutes les formes de grandeurs, fondée sur les situations qui déterminent leur définition et leur sens, afin de proposer aux professeurs de mathématiques une transposition utilisable pour l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire.

Abstract :

The concept of magnitude, formerly classic basis of mathematics, is not there more hardly studied today that under shape of various structures. The survey of the numerous new types of magnitude is sent back to disciplines. In order to propose to the math professors an usable transposition for the math teaching in the obligatory education, the present text proposes a didactic génèse of all shapes of magnitudes, founded on *situations* that determine their definition and their meaning,

1

INTRODUCTION ET METHODOLOGIE

UN PROBLEME DE MACRO-DIDACTIQUE

Le but de la partie du cours que je dois assurer est d'identifier *les problèmes de didactique liés à la notion de grandeur et à l'apprentissage des « grandeurs » dans la scolarité obligatoire*

J'ai souhaité vous faire part de mes observations car mon intérêt pour ce sujet n'est pas récent. J'ai l'impression d'assister, impuissant, à des dégradations drastiques des conditions de son enseignement sous l'effet de forces incoercibles et ignorées par mes contemporains. Peut-être ces craintes ne sont que l'effet de l'âge, qui rend moins optimiste, mais je relève beaucoup de dysfonctionnements nouveaux. Il me semble d'autre part qu'il ne sert à rien de jouer les Cassandre : dans le meilleur des cas, identifier des phénomènes et leur trouver des explications donne toujours l'impression qu'avec quelques décisions empiriques opportunes on pourra les contrôler. Je crois donc qu'll vaut mieux travailler à donner en même temps les analyses scientifiques et les moyens théoriques et techniques de produire des solutions appropriées. C'est pourquoi je renverrai mes doutes à la fin de mon intervention

Il existe nombre d'études sur différents aspects de cet enseignement, mais ces études portent presque toujours seulement sur quelques aspects particuliers de la question.
C'est le cas de toutes les études qui ont pour objet la proposition de situations, l'observation des réactions des élèves à ces situations, celle de leurs apprentissages, la description de leçons réalisées dans des classes, etc. J'ai songé un instant à évoquer la liste des situations que j'avais

personnellement conçues ou observées dans ce domaine. Réunir les travaux de micro-ingénierie[1] didactique que nous connaissons dans ce domaine pourrait être bien utile.
Les autres études consistent essentiellement en un travail relevant d'une ou de plusieurs disciplines telles que les mathématiques, l'épistémologie, l'histoire des mathématiques, la psychologie, la sociologie ou la pédagogie etc. et de ces travaux déclarés « préalables » - et le plus souvent fort respectables au demeurant -, suivi d'inférences *directes* et de conclusions dans le domaine de la didactique, sans véritables études spécifiques ni justifications scientifiques.
Il s'en trouve d'ailleurs fort peu qui portent sur l'enseignement de sujets mathématiques aussi complexes que les grandeurs et leur mesure.
Je ne récuse nullement l'usage d'informations importées d'autres disciplines, bien au contraire, et je trouve parfaitement légitime d'établir celles dont nous avons besoin dans les disciplines qui peuvent le mieux les fournir, mais je récuse a priori toute inférence directe tirée de ces informations, pour l'enseignement, sans un examen critique adéquat dans le champ de la didactique proprement dite. Cette attitude m'a toujours condamné à essayer de présenter des alternatives, et me voici donc aujourd'hui confronté à ce défi d'esquisser ce que seraient les études macrodidactiques[1] du concept de grandeur. Le projet de l'étudier exclusivement avec les faibles moyens de la didactique naissante semble donc une gageure intenable.

Car le concept de Grandeur est si intimement lié depuis si longtemps aux progrès de l'humanité en général et à celui des mathématiques en particulier, il apparaît sous des formes si variées, dans un si grand nombre de circonstances différentes, dans les pratiques de sociétés si diverses, il intervient dans l'enseignement sur une période si longue, il est lié à tant d'autres sujets mathématiques qu'il est très hasardeux de postuler a priori la validité didactique de la simple conjonction des approches indépendantes classiques. C'est du moins ce que je chercherai à établir par l'observation de quelques phénomènes.
Mais ces caractéristiques montrent bien qu'éclaircir les conditions théoriques et pratiques de l'enseignement des grandeurs et de leurs mesures est typiquement une question de *macro-didactique* dans tous les sens du terme.

C'est en effet un concept

i) qui est très utilisé, bien qu'avec des sens assez différents, par de nombreuses institutions importantes et différentes,
ii) qui est très ancien et qui a donc laissé dans la culture des traces des diverses étapes de son développement
iii) qui a fait l'objet « récemment » d'évolutions profondes dans les institutions scientifiques ce qui a accru les divergences « transpositives » didactiques[2]
iv) qui est étroitement lié à de nombreuses connaissances mathématiques fondamentales
v) de sorte qu'il s'apprend dans des processus naturels et scolaires précoces et très prolongés

A l'énoncé de ces caractères, il est déjà clair que chacun apporte son lot de difficultés et d'incompatibilités avec ce qu'apportent les autres et par conséquent réagit sur eux. On peut en

[1] Micro-ingénierie : type d'ingénierie étudiant ou produisant une situation unique faiblement évolutive, ou une séquence courte, relative à l'usage ou à l'apprentissage d'*une* connaissance bien déterminée et limitée. Certains utilisent à l'opposé le terme de Macro-ingénierie pour désigner l'étude ou la production de conditions (organisation, ordonnancement etc.) portant sur des processus longs et donc sur des ensembles de connaissances. Cette position n'est pas illégitime mais il faut faire attention : Si la micro-ingénierie est bien l'ingénierie de la Micro-didactique, qui a pour objet l'analyse de la détermination simultanée des situations (conditions), des connaissances en jeu et des comportements qui en manifestent l'enseignement et l'apprentissage, la Macro-ingénierie n'est pas l'ingénierie de la Macro-didactique, laquelle a pour objet l'étude des interactions didactiques entre de grandes institutions ou entre de grands systèmes didactiques réels à propos de larges agrégats de connaissances.

[2] Note : le mot « Grandeur » est ignoré dans l'index de l'Encyclopaedia Universalis, mais il apparaît dans 1250 articles, la plupart scientifiques.

inférer que la macrodidactique ne pourra pas être un simple agrégat d'études sur des agrégats de constituants de la relation didactique.

Il s'agira ici pour moi d'esquisser les types de recherches que l'on peut attendre des didacticiens des mathématiques dans ce domaine. J'ai probablement présumé de mes forces, mais il me fallait saisir l'occasion que vous m'offriez – pour la dernière fois peut être – d'affronter le problème. Ce que je ne pourrai pas montrer, je le suggèrerai et vous le prolongerez… je compte sur votre compréhension, sur votre indulgence et sur votre confiance dans l'avenir.

CADRE METHODOLOGIQUE

1 APPROCHE CLASSIQUE

A cause des conditions iv) et v) l'approche mathématique soutenue par des pédagogies et des didactiques « classiques » s'est longtemps imposée à l'enseignement. Dans le dernier tiers du XX^{ième} siècle l'approche psychogénétique a appuyé certaines réformes voulues par les mathématiciens au titre de iii) et a la fois a fourni l'essentiel des recherches et a pesé son poids sur l'enseignement.

L'ouvrage de Nicolas Rouche « le sens de la mesure », a fait le point, il y a une dizaine d'années sur les approches de ce type. La bibliographie de cet ouvrage fait ressortir que très peu d'études prennent les grandeurs directement comme objet. La plupart ne s'y intéressent essentiellement que comme une voie vers les nombres et vers la mesure. Et elles le font essentiellement en restant dans le domaine « des objets mentaux » et des concepts mathématiques.

Rouche choisit de prolonger les travaux de Freudenthal et de partir des « phénomènes ». Cette méthode est à première vue déjà débarrassée des impedimenta et des incohérences de la pratique et de certaines réalités et s'écarte des limitations excessives des modèles axiomatiques. Un phénomène est « toute relation souvent familière entre des ensembles, des formes, des grandeurs ou des nombres et qui se présente à l'esprit comme matériau et point d'appui de la pensée mathématique à ses débuts ». Malgré cela, Freudenthal se trouve encore devant un tel dédale qu'il s'exclame « j'espère au moins que je ne me noierai pas dans cet océan »[3]. Nicolas Rouche connaît ces difficultés, il est intéressant de noter les raisons pour lesquelles il persiste :

> *Ce livre a pour objet d'exposer bon nombre de phénomènes qui impliquent des grandeurs et des nombres (irrationnels non compris !) Mais, nous l'avons déjà dit, l'ensemble de ces phénomènes est extrêmement touffu, ce qui rend difficile de les exposer clairement. Pour éviter que le lecteur ne se perde, il fallait trouver un fil conducteur. Or ce fil ne pouvait être celui du développement réel de ces notions dans l'esprit des enfants, et ce pour plusieurs raisons. La première est que plusieurs des phénomènes en question peuvent demeurer (éventuellement sans dommage) définitivement absents de l'esprit de certains enfants. La seconde est que, sur bien des points, chaque enfant progresse à sa façon et qu'il faudrait d'abord dégager une improbable façon moyenne ou typique. La troisième enfin est que la progression d'un enfant particulier que l'on prendrait pour témoin n'est pas suffisamment explicite (il se passe beaucoup plus de choses dans l'esprit que ce que l'observation peut déceler).*
>
> *Le fil conducteur ne pouvait pas être non plus celui de la genèse historique, car des phénomènes aussi élémentaires et fondamentaux que l'addition des grandeurs, l'ordre, les fractionnements simples, etc. remontent plutôt à la préhistoire, aux balbutiements de l'homo sapiens, perdu dans la nuit des temps… [Hanz Freudenthal a tenté de dresser le] vaste inventaire commenté des phénomènes qui conduisent non seulement aux grandeurs, aux nombres rationnels aux proportions mais quasiment à l'ensemble des mathématiques élémentaires »*[4].

[3] Hanz Freudenthal, Didactical phénoménology of mathematical structures, Reidel Dordrech (1983)

[4] Nicolas Rouche, le sens de la mesure Didier Hatier 1992 p. 21

2 . APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Aujourd'hui, l'approche anthropologique – en particulier praxéologique - paraît a priori mieux adaptée pour décrire de façon ouverte la diversité des situations réelles créées par i), ii) et iii) dans diverses institutions, surtout s'il ne s'agit que de comprendre les difficultés.

Il est en effet indispensable pour le didacticien de pouvoir distinguer les différents sens et usages des termes relatifs aux grandeurs et à la mesure, suivant les institutions et les époques auxquelles il s'intéresse. Il doit donc aussi, en particulier, fixer les termes et les modèles qu'il utilise pour cette analyse. Ils lui sont propres et ils peuvent devoir différer de ceux qu'il étudie[5].

Mais pour pouvoir fournir des instruments didactiques et culturels de résolution et d'ajustement des flux didactiques, il est nécessaire de coller de façon à la fois plus ample et plus précise aux phénomènes spécifiques que l'on y rencontre, et pour cela en construire des « modèles » qui permettront

- d'une part de rechercher une certaine cohérence entre les observations éparses
- d'autre part d'établir un pont entre les pratiques actuelles et les alternatives qui pourraient être envisagées.

C'est pourquoi sur ces points, en didactique comme en économie, l'approche anthropologique ne me semble pas entièrement satisfaisante. Je vais utiliser la théorie des situations pour guider mon étude. Comme nous l'avons constaté à plusieurs reprises, les deux approches se complètent sans se contredire. Mon but est de tenter d'organiser l'univers des grandeurs et de leur mesure.

3. APPROCHE AVEC LA THEORIE DES SITUATIONS

Il s'agit toujours de représenter les connaissances mathématiques par des situations caractéristiques (aussi fondamentales, i.e. aussi simples et générales, que possible), qui les « fonctionnalisent » sous diverses formes par le jeu de leurs variables cognitives et didactiques. Chaque situation de ce type engendre une famille de situations qui appellent comme moyen de solution des formes diverses de cette connaissance.

Il nous a alors été possible d'ordonner (plus ou moins grossièrement) ces situations, en fonction de leur complexité. En première approche, les organisations axiomatiques des connaissances proposent des hiérarchies possibles entre lesquelles la modélisation par des situations permet de choisir de façon plus fine en fonction d'une complexité plus réaliste. En particulier, il est alors possible de « justifier » les apprentissages par différents types de causes et de raisons d'apprentissages, logiques et ergonomiques, c'est-à-dire accessibles aux élèves, accessibles à leur adaptation et/ou à leur compréhension. Cette méthode doit répondre à la nécessité de rendre cohérente la genèse et l'usage des connaissances mathématiques par des procédés qui n'acceptent pas toute liaison « mathématique » ou logique comme un « modèle » possible d'articulation de l'apprentissage.

Nous présenterons, sinon le résultat final de cette étude, du moins un état avancé.

4. PLAN DE L'ETUDE

La présentation de quelques unes de ces situations sera précédée d'une étude ayant pour objet d'identifier leurs composantes les plus générales et en particulier de déterminer l'objet « grandeur » dont nous nous préoccupons.

[5] Cette position soulève parfois une certaine incompréhension et même une certaine hostilité chez les scientifiques dont le métier consiste justement à fournir les meilleurs modèles supposés devoir s'imposer dans la culture. Bien que la relativisation des connaissances et l'axiomatique ne soient pas des idées entièrement nouvelles, elles choquent toujours un peu car on a tendance à les assimiler au relativisme. Un positionnement externe comme celui d'anthropologue semble de nature à permettre une meilleure acceptation. A titre personnel, je revendique un positionnement de ces études interne aux mathématiques.

2

LE CONCEPT DE GRANDEUR

SCHEMA THEORIQUE INITIAL

Dans un texte destiné à la commission inter IREM « premier Cycle »[6], François Colmez présente ainsi un cadre théorique de la « construction d'une grandeur » :

$$\begin{tikzcd} \text{Objets} \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "g"'] & & \text{nombres} \\ & \text{grandeurs} \arrow[ur, "\mu"] & \end{tikzcd}$$

> *On établit, sur un ensemble d'objets, un protocole expérimental de comparaison, d'assemblages, de découpages et de transformations qui permet de définir :*
>
> - *d'une part une application m de l'ensemble des objets vers un ensemble de nombres (généralement* R *ou* R+*)*
> - *d'autre part une application g de l'ensemble des objets vers un nouvel ensemble (les grandeurs), et une bijection* μ *de l'ensemble des grandeurs vers l'ensemble des nombres de sorte que* $m = \mu \circ g$
>
> *L'application g ne dépend que du protocole expérimental. Les applications m et* μ *dépendent de l'objet choisi comme étalon, dont la grandeur est prise comme unité.*
>
> *Dans tous les cas il est théoriquement possible de définir une application m, puis l'application g (indépendante du choix de m) ou de définir directement g puis les applications m et les applications* μ *correspondantes.*

Ce texte est assez caractéristique de la position des mathématiciens qui, d'une part identifient souvent grandeurs et grandeurs mesurables et qui, d'autre part, utilisent indifféremment plusieurs acceptions[7] du

---

[6] François COLMEZ, « place et rôle des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques de l'Ecole Primaire au Lycée » Contribution aux journées de la commission Inter IREM « premier Cycle » Juin 95

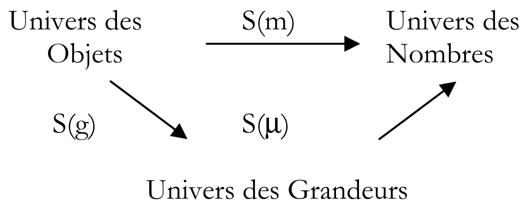
[7] on peut identifier différentes usages vernaculaires du terme « grandeur ». :

i) *La grandeur* (singulier), la qualité de « ce qui est susceptible d'être grand ou petit » en toute généralité, comme dans la définition de D'Alembert.

ii) *Une grandeur* au sens de « un type de variables mathématiques, physiques, biologiques, psychologiques sociologiques, économiques etc. dites de même espèce, c'est à dire comparables entre elles ». En ce sens, La longueur, La masse, le temps (les durées), L'aire, La probabilité, Le prix, La vitesse de sédimentation, etc. sont des grandeurs. Les grandeurs classiques sont "mesurables" par une application ad hoc dans des structures numériques positives. Mais le terme s'étend aussi à des variables seulement "repérables" ou comparables, suivant un certain critère. Ces variables simplement ordonnées comme la température ou l'intelligence ne se prêtent pas aux opérations élémentaires courantes en particulier la somme ou la différence. Le terme « Grandeur » a été souvent employé dans l'histoire dans ce sens avec l'espoir d'identifier ensuite une grandeur mesurable correspondante. Le terme "grandeur" s'étend enfin, surtout en Physique à des variables « réelles », comme les grandeurs qui se représentent par des réels (positifs ou non): les puissances, les angles etc., ou même non strictement numériques : grandeurs complexes, vectorielles (comme la vitesse dans l'espace), tensorielles etc.

(footnote continued)

mot « grandeurs ». Nous allons néanmoins le prendre comme base de notre étude pour la soumettre à la méthode typique de la Théorie des situations (T.S.).
Observons toutefois que chaque composante : objet, grandeur et nombres reste à définir par des ensembles de situations qui mobiliseront des dispositifs et des enjeux spécifiques. La collection des objets, celle des grandeurs, et celle des structures numériques que nous allons explorer seront donc évoquées par des agrégats de situations. Nous appellerons familièrement « univers » ces agrégats. Ainsi les univers d'objets, de grandeurs, et de nombres pourront être distingués de l'idée ou de la connaissance théorique et culturelle des « objets » des grandeurs et des nombres.
Le schéma devient alors le suivant. La différence principale consiste en l'interprétation des flèches. Il ne s'agit plus d'applications mais de situations qui mettent en jeu des éléments des divers univers. S(m) représente des situations où des manipulations d'objets et de nombres rendent nécessaires certaines connaissances caractéristiques d'une mesure.



Il s'agit de préciser ces situations, et si possible d'en donner UNE genèse. Nous reviendrons à la fin du chapitre sur ce point

DES COMPARAISONS A L'ORDINATION

En négligeant les intermédiaires, on y trouve, à l'origine, des objets et à la fin, des nombres. On peut en inférer que certaines « manipulations » d'objets peuvent être facilitées à l'aide une modélisation par des « nombres » ou par des structures mathématiques « similaires ».
(1) de quelle nature sont les manipulations qui vont mobiliser, rendre fonctionnels (adéquats et économiques) ces genres de modèles ?
(2) et qu'est-ce qui va rendre nécessaire le recours à une nouvelle composante, qui sera une grandeur (au sens ii) ou iii) de la note 6) ?

LES COMPARAISONS DEUX A DEUX.

Dans une situation, le motif de l'action du sujet est le choix d'une des issues, préférable aux autres, quelle qu'en soit la raison. Nous pouvons nous représenter cette situation sans rien perdre de sa généralité comme une situation de comparaison, et même comme une comparaison d'objets. Ce qui peut faire soupçonner à un observateur, l'existence d'une connaissance chez le sujet, est la reproduction régulière des

iii) *Une grandeur spécifiée* est une variable appartenant à l'un des types ci-dessus, déterminée (spécifiée) par des circonstances ou des objets particuliers, en particulier lorsqu'elle intervient dans des problèmes effectifs. C'est donc une variable : la longueur des trajets d'un représentant, la taille des enfants, le prix d'un produit, la vitesse de tel mobile, la probabilité de tel événement, etc. Les raisonnements et les calculs s'effectuent sur ces grandeurs qui sont les variables proprement dites des problèmes, en ce sens que chacune d'elle est constituée par l'ensemble des valeurs qu'elle est susceptible de prendre.

iv) Une *valeur* précise – constante - d'une grandeur spécifiée: par exemple la longueur de telle table, "le" volume de tel cube précis. Il lui correspond la classe de toutes les valeurs déterminées par des mesures ne diffèrent entre elles que par leur unité. Elle peut être une inconnue, elle n'est pas une variable. Par exemple ce nombre unique ne peut pas être « proportionnel » *à* quoi que ce soit : il faut le replacer dans une grandeur. Il s'agit donc ici essentiellement de la quatrième acception.

mêmes comportements dans des situations que lui, l'observateur, trouve similaires par le fait qu'elles requièrent la mise en jeu de ce que lui, l'observateur, considère comme la même connaissance (Encore faut-il que le choix ne soit pas déterminé par la situation de telle façon que la faculté de connaître du sujet n'intervienne pas).
Supposons que l'identification des situations et des objets, leur reconnaissance par la constitution de classes et de hiérarchies soit suffisante (sans négliger les cas où la grandeur est un élément de reconnaissance des objets).
Le sujet choisit régulièrement un même objet dans des situations similaires. Il peut même avoir conscience de l'alternative, auquel cas nous dirons qu'il est dans une situation de comparaison.
Par exemple, il choisit toujours une cale de même épaisseur pour stabiliser un meuble. Cela ne signifie pas que le sujet « connaît » l'épaisseur. Il lui suffit d'essayer plusieurs cales et de prendre celle qui est adéquate.
La connaissance doit se manifester comme instrument de décision anticipée, de prévision. Ici la plupart des chercheurs prennent en compte l'influence prépondérante des perceptions qui résultent chez l'enfant de ses expériences primitives pour expliquer des comportements plus techniques ou plus sociaux. Pour comprendre le fonctionnement de la situation, il faut se priver de cette facilité. Par exemple, le sujet doit choisir entre deux objets, sur la présentation de l'un, l'autre étant absent et le seul critère distinctif étant effectivement la taille. Alors il doit se référer à un modèle mental – une connaissance - de ce caractère de l'objet absent. Cette connaissance devant être suffisante pour prendre la décision et minimale du point de vue des caractères nécessaires, elle pourrait être - pour l'observateur - une application sur un ensemble ordonné à deux éléments (qui pourraient être 0 et 1).
Cette situation est très générale, elle permet, par exemple, de représenter le choix entre deux énoncés bien formés de celui qui est toujours vrai (connaissance drastique qui contient toutes les mathématiques).

COMPARAISONS ENTRE PLUSIEURS ISSUES

Considérons un ensemble de situations qui ne diffèrent – pour l'observateur - que par la variation d'une variable. La connaissance de cette variable par le sujet se manifestera par des anticipations régulières et *cohérentes*.
Pour déterminer dans ce cas les situations qui nous intéressent, supposons que le sujet a devant lui un ensemble de boîtes identiques qui contiennent chacune un bout d'allumette. Les bouts d'allumettes sont tous de longueur différente. Le sujet n'a le droit d'ouvrir à la fois que deux boîtes, et il peut alors comparer les deux bouts d'allumettes en les plaçant l'un contre l'autre. Il les remet ensuite dans leur boîte avant de faire de nouvelles comparaisons. Plusieurs questions peuvent lui être posées qui finissent de déterminer les situations, par exemple trouver le bout d'allumette le plus long.
Oublions maintenant qu'il s'agit d'allumettes et de longueurs : le sujet doit choisir entre A, B et C :
Il choisit A contre B, puis B contre C… s'il choisit ensuite C contre B ou même s'il a besoin de confronter effectivement C et B nous dirons qu'il ne possède aucune des connaissances qui permettraient à l'observateur d'ordonner AB C. (pour le sujet, A B et C ne peuvent pas déterminer une grandeur)[8].
L'étude de l'organisation des préférences comme modèle de la genèse des grandeurs devrait logiquement intervenir ici, mais elle sortirait du cadre de ce cours[9].
La stratégie caractéristique d'une conception minimale d'une « grandeur » est la suivante : le sujet prend un premier objet, le compare à un autre, puis un autre, jusqu'à ce qu'il trouve un objet plus grand, qui remplace le premier… et le processus continue. Le dernier objet qui n'est pas dominé est le plus grand de la collection. La relation doit être transitive et elle doit aussi être antisymétrique (sinon l'algorithme échoue.

[8] La cohérence du sujet et de ses comportements entre dans la définition de ce qu'est un sujet et de ce qu'est une grandeur comme le montre le paradoxe de Condorcet : une population de votants ne forment pas « un » sujet politique, et l'ordre de trois candidats n'est pas une « grandeur » puisque l'agrégation des opinions à leur sujet peut être incohérente. La conception d'une grandeur exige au moins une concordance significative d'opinions.

[9] Le lecteur pourra consulter M. Barbut et Frey, Techniques ordinales en analyse des données algèbre et combinatoire et l'article de Pilar Orus Baguena sur sa thèse

A ce stade, l'idée d'une grandeur est ce qui conduit un sujet à adopter ces stratégies d'agrégation de comparaisons deux à deux, tendant à établir dans l'ensemble des objets auxquels il s'intéresse, un ordre total. Le sujet peut avoir une idée locale de grandeur (qui guide ses comparaisons 2 à 2, mais cette idée peut ou non, selon les cas aboutir à un ordre total. Les causes d'échec sont diverses :

- existence de cycles, auquel cas l'idée d'une grandeur basée sur ces comparaisons 2 à 2 doit être abandonnée
- impossibilité de comparer certains couples dans le cas de demi treillis (arbres ou treillis)

Dans certains cas, le sujet peut essayer de dissocier ses comparaisons et d'envisager la combinaison de deux « grandeurs » ou plus.
Le contre exemple le plus banal de préordre qui ne conduit pas à une grandeur est l'inclusion dans un ensemble fini. Mais cette structure ressemble déjà tellement à une grandeur que parfois certains s'y trompent et y importent un vocabulaire et des conceptions empruntés aux grandeurs : ex. : « le tout est plus grand que la partie »

L'existence d'objets équivalents conduit à la création de classes d'objets ordonnées par passage au quotient.
Si le processus aboutit, le sujet conçoit effectivement *une* « grandeur » définie sur cet ensemble.
En d'autres termes, l'idée de grandeur est attachée à un ordre *total* qui assure l'unicité de la chaîne produite.

A ce stade « une grandeur pourrait donc être conçue comme un ensemble d'objets muni d'un ordre total ».

ORDINATIONS D'UN ENSEMBLE

L'intérêt de concevoir l'ordination totale d'un ensemble apparaît clairement dans les stratégies de mise en ordre d'un ensemble. Il ne s'agit plus de trouver le plus grand objet d'une collection (ou le premier) mais de déterminer la place de chacun par rapport à tous les autres.
La comparaison totale par couples demande $\frac{n\,(n-1)}{2}$ comparaisons par couples. La réitération simple du processus de recherche du plus grand, puis le plus grand de ceux qui restent, etc. permet la réalisation de la tâche mais n'offre aucune économie par rapport à la comparaison totale. L'économie due à l'usage de la transitivité de l'ordre apparaît dès lors que l'on utilise les étapes de la recherche du plus grand.
Comme précédemment, le sujet prend un premier objet x_0 , le compare à un autre, puis un autre, jusqu'à ce qu'il trouve un objet plus grand x_1, mais avant qu'il ne remplace le premier objet par le nouveau, il détermine (il isole par exemple) l'ensemble X_0 des objets qu'il vient de comparer et qui sont plus petits que le premier essayé… le processus continue et à chaque remplacement, l'objet x_i délaissé pour un plus grand se trouve associé à une collection X_{i-1} d'objets de taille plus faible que son prédécesseur. Le dernier objet X_n qui n'est pas dominé est toujours le plus grand de la collection, mais son successeur immédiat est à rechercher seulement dans l'ultime collection X_{n-1}. Le précédent dans la même ou dans la précédente etc. L'économie est aussi évidente que la complexité. Ce qui n'empêche pas les enfants de l'utiliser « spontanément » dans le cas de grandeurs simples. Cette stratégie suppose une transitivité récurrente qui caractérise la structure minimale d'une « grandeur ».

L'ordination « arbitraire » d'un ensemble, notion que Joël Briand a étudiée sous le nom d'énumération relève du même processus pour identifier ou comparer la composition de deux collections (ou la validité d'une liste). L'ordination que nous venons d'évoquer est beaucoup plus complexe par le fait qu'elle n'est pas arbitraire. C'est cette complexité supplémentaire qui caractérise le fait qu'il faut tenir compte d'une « grandeur ».

INTERET D'UNE ECHELLE UNIVERSELLE D'ORDINATION (RANGS)

Un ensemble de rangs exprimé par des nombres (mots indépendants de l'ensemble d'objets)

- permet d'exprimer et de modéliser toutes les ordinations
- et en particulier de simplifier les manipulations nécessaires

Ce « théorème » de T.S. n'est pas traité dans le cours
Remarquons que maintenant la modélisation mobilise O comme ensemble d'objets et R comme ensemble de rangs (exprimés par des nombres). L'application m du schéma de François Colmez est un isomorphisme d'ordre, mais cette application, appelons la « a », est locale et provisoire, elle n'a rien du caractère universel d'une grandeur . Nous utilisons ici provisoirement le terme « grandeur » dans la langue de travail des observateurs, il n'est pas encore défini.

LES TRANSFORMATIONS DANS L'ENSEMBLE DES OBJETS

Le schéma général des situations d'ordination que nous avons choisi est très simplifié et très restrictif. La fonction essentielle de la représentation de l'ordre dans un ensemble par une échelle ordinale est une fonction de modélisation. Nous avons montré comment la considération de rangs permet de traiter des classes de problèmes, plus rapidement ou plus économiquement que la manipulation directe des objets correspondants. Mais le modèle n'est utilisable que dans la mesure où les transformations qui affectent les objets de la grandeur restent compatibles avec l'isomorphisme d'ordre défini ci-dessus. Ces transformations sont souvent spécifiques de chaque « type » de grandeur (au sens ii).

LES STRUCTURES DES GRANDEURS

NECESSITE DE CONSIDERER LES MANIPULATIONS DES OBJETS

Mais n'allons pas trop vite et remarquons que l'enjeu de notre situation doit s'imposer au sujet de façon implicite (!) car elle présente un défaut majeur : la compréhension de la consigne « trouver le plus « grand » objet » suppose chez le sujet la connaissance préalable de la grandeur en question… alors que l'on cherche à la lui faire définir !
Il est par conséquent nécessaire de poser le problème en terme de résultats effectifs : par exemple, il s'agit dans une collection, de saisir un objet susceptible de rentrer dans un trou assez petit, ou au contraire « vaincre » tous les autres dans des confrontations etc. Toutes les manipulations effectives d'objets ne sont pas compatibles avec leur ordination : on peut les déplacer mais pas les casser par exemple. Certains objets sont remplaçables par d'autres pour certains effets, d'autres non etc.
Ainsi, la pratique des situations qui requièrent les manipulations d'objets dans la perspective de réaliser des comparaisons unifiées et stables est indispensable à leur conception et à leur apprentissage.
Aussi la considération de ces manipulations est nécessaire aussi bien pour définir les grandeurs spécifiées que pour produire la genèse de la connaissance de chaque type de grandeurs.
Il apparaît alors que notre schéma minimal O → a → R doit être complété par un ensemble G d'objets déterminés par les manipulations dans O , compatibles avec les objectifs des situations d'ordination.
G est la grandeur (au sens iii de la note) associée à la classe de situations d'ordination introduite ci-dessus. Nous venons de justifier son existence, sa prise en considération par l'observateur. Il reste à montrer son adéquation et les économies qu'elle procure dans les anticipations puis dans la construction de nouvelles ordinations. Mais nous pouvons déjà proposer une réponse à la question (2) du début de ce paragraphe.

« une grandeur est un ensemble de classes d'objets, stables par rapport aux manipulations ou aux transformations compatibles avec la résolution d'une situation d'ordination ». Cette « définition » englobe les grandeurs non mesurables et les grandeurs mesurables.

LE DEDOUBLEMENT ENTRE LES GRANDEURS ET LEUR STRUCTURE MATHEMATIQUE

C'est pourquoi il convient de considérer séparément les grandeurs et leur structure mathématique.
La connaissance des structures mathématiques des grandeurs est nécessaire pour identifier et différencier les conditions dans lesquelles vont pouvoir être déterminées certaines applications de grandeurs dans des ensembles de nombre. Ces structures sont beaucoup moins nombreuses que les grandeurs elles-mêmes. Leur généralité permet de résoudre certains problèmes de façon beaucoup plus économique. Nous voyons

que la conception des structures de grandeurs (le mot n'existe pas en mathématique) répond à des situations d'une tout autre nature que la simple ordination d'objets : il s'agit de déterminer des types d'applications (mesure, intégration) et des ensembles de nombres (naturels, rationnels, réels, etc.) possédant les propriétés minimales requises pour tel ou tel type de situations.
Le schéma initial s'interprète pour l'instant de la façon suivante

U. Objets → U. Grandeur → U. structure :ordre total ---- U.(isomorphisme d'ordre) -- U.nombres (rangs)

Les rangs sont une section commençante de N par exemple mais la somme dans N n'a pas de sens

DE L'ORDINATION AUX GRANDEURS REPERABLES

GRANDEURS REPERABLES

a) La mesure peut être conçue comme un moyen économique de résoudre des familles de situations d'ordination.
En effet, si le sujet peut prévoir qu'il aura à réordonner les mêmes objets, par exemple dans le cas où la collection à ranger viendrait à augmenter en cours de travail, il doit mettre au point des stratégies plus économiques que la réordination totale à chaque fois.
Des dispositions matérielles ou spatiales comme celles que nous avons évoquées plus haut et surtout l'utilisation des couples {objets ; rang} (inventés pour cela) peuvent simplifier cette réordination : chaque objet nouveau n'a à être confronté qu'à une seule suite croissante d'objets pour trouver sa place.
Mais si les conditions sont plus sévères, par exemple si la trace matérielle de l'ordination précédente est détruite, le coût des réordinations devient prohibitif.
b) Apparaît alors l'intérêt d'associer à chaque objet une place fixe dans une sorte d'échelle « absolue » de « rangs ». Pour rester stable, une telle échelle absolue devrait « contenir » toutes les échelles possibles. Cette échelle devrait donc être un ensemble dense de nombres, relativement facile à concevoir mais où la dénomination de ces rangs absolus pose des problèmes. D'autre part, la relation « successeur » serait perdue.

Soit (E ,<) une grandeur. Nous cherchons un ensemble A et une application croissante f de (E, <) dans A, telle que pour toute partie X de E, et r étant l'isomorphisme d'ordre de X sur une section commençante de N.

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow r(x_1) < r(x_2)$$

Sur un ensemble E fini le problème théorique est trivial, mais si le sujet ne connaît que « des » parties finies telles que X, en nombre non déterminé, tout se passe comme si E était infini.
Les grandeurs qui permettent la construction d'une telle échelle absolue sont des ***grandeurs repérables***

LES OPERATIONS SUR LES OBJETS

Certaines manipulations sur les objets comme la mise bout à bout de deux segments, ou la pose de deux masses dans le même plateau d'une balance produisent des objets nouveaux qui peuvent (souvent mais pas toujours) entrer dans les mêmes situations d'ordination.
L'ensemble **G** correspondant inclut alors des classes d'objets, des transformations compatibles, et des opérations stables dans ces classes d'objets. Il est nécessaire de bien distinguer qu'il s'agit de transformations et d'opérations matérielles déterminées, effectives et compatibles avec des situations effectives. Il ne s'agit pas de leur représentation mathématique. La confusion est fréquente dans les institutions scolaires où la réalisation effective est nécessairement remplaçable par sa description, bien plus économique et où la culture a depuis longtemps confondu les deux domaines. On parle de la somme de deux segments comme de celle de deux angles. Cette expression n'appartient ni au domaine des grandeurs

spécifiées ni même à celui des types de grandeurs qui sont distinctes justement à cause des formes d'*opérations* qu'ont y *effectue*.

DES GRANDEURS REPERABLES A LA MESURE DES GRANDEURS

LES MESURES « NATURELLES »

La construction d'une échelle compatible avec les opérations et avec les transformations spécifiques dans l'ensemble des objets, repose maintenant sur l'existence d'un premier ensemble numérique approprié. Les entiers naturels vont apparaître dans la mesure de la grandeur probablement la plus primitive : le cardinal des collections finies. Les méthodes d'énumération des collections que nous avons évoquées plus haut et la considération de classes d'objets « équivalents » conduit à des comparaisons de collections suivant divers critères, dont le cardinal. Nous avons proposé diverses situations qui déterminent la mesure des cardinaux et qui permettent la genèse des nombres naturels dans les conditions culturelles actuelles où le nombre est omniprésent dans la culture[10].
Les objets de la grandeur « cardinaux finis » sont des collections finies d'objets bien identifiés, la structure de cette grandeur est celle de l'ensemble des parties d'un ensemble fini aussi grand que nécessaire. Les transformations compatibles sur les collections d'objets sont celles qui « conservent » les collections elles mêmes, et celles qui conservent le cardinal sont les bijections. Les injections déterminent un ordre total dans P(E) et par passage à l'ensemble quotient, on obtient bien une échelle discrète : une section commençante de N aussi longue qu'on veut.
Nous ne décrirons pas ici en termes de situations les raisons qui font apparaître ces caractères comme déterminants, mais nous renverrons le lecteur aux nombreuses situations didactiques dont nous donnerons la liste dans le chapitre suivant. Il est clair par exemple que le moyen fondamental pour comparer des cardinaux est l'injection et que les « opérations » d'adjonction ou de retrait de parties disjointes est le moyen de réaliser des collections « plus grandes » ou « plus petites », dans les situations où la comparaison est justifiée (par exemple, par une compétition).
L'adoption d'un échelle universelle passe par la désignation de ses éléments par des mots distincts, indépendants de la nature des objets qui composent les collections, ce qui exige évidemment des formes plus complexes de situations d'action et de formulation. Le modèle en est bien connu.
La détermination du cardinal d'un ensemble par n'importe quelle méthode est son dénombrement, celle qui procède par énumération est le comptage. A l'application mathématique « mesure », la pratique fait correspondre diverses méthodes effectives de mesurage.
Le schéma théorique des univers prend la forme suivante :

Objets →	Grandeur →	Structure Mathématique ---- mesure ---→	structure numérique
Collections	Cardinal	Ensemble des parties de E	dénombrement naturels

Notons que le « cardinal fini » satisfait les conditions traditionnelles données pour définir une grandeur mesurable : l' «équipotence » et la « réunion disjointe » d'objets permettent de définir l'égalité et la somme de leurs mesures.

LES GROUPEMENTS-UNITE

Dans les situations de dénombrement naturel, la détermination des objets n'est pas arbitraire. Le coût de la mesure d'une collection par dénombrement un à un, et celui de son expression dans le système de numération le plus simple – une barre par objet par exemple -, est une fonction linéaire de coefficient 1, du cardinal de cette collection. Dans certaines conditions, ce coût s'avère à la longue excessif. Surgit alors l'idée de « compter par paquets » (par exemple à l'aide d'une grille pour compter des perles ou des billes), ce qui permet de réduire le coefficient de la fonction mesure (qui n'est plus exactement linéaire). L'idée de groupement réduit à la fois le coût du mesurage et celui de l'écriture du nombre. Elle est la base de l'idée

[10] Sur les origines des nombres, consulter Geneviève Guittel, Histoire comparée des numérations écrites, Flammarion, Paris 1975

d'*unité*. Le comptage de groupements égaux est le modèle du mesurage des « grandeurs » continues, et la base de la conception des nombres comme rapports entre deux quantités, c'est-à-dire du nombre abstrait. Dans le dénombrement naturel simple, il n'y a aucune raison de considérer un objet comme une unité représentant d'autres objets, et de comprendre un nombre comme composé d'un certain nombre de fois un *même* objet. La formulation montre d'elle-même la contradiction. L'objet comme unité résulte de la considération d'un objet comme un groupement à un seul objet, cas particulier du dénombrement par groupes. De même, on comprend que le cardinal 1 ne soit pas un nombre (et à fortiori le zéro), puisqu'il ne suscite aucun mesurage…
Le schéma est alors le suivant

Objets →	Grandeur →	Structure Mathématique	---- mesure ---→	structure numérique
Collections	groupement-unité			
Collection	ensembles de parties			
de collections →	cardinal	espace mesurable	dénombrement	naturels

LES CHANGEMENTS D'UNITES ET LA NUMERATION

Avec l'apparition des groupements unités, un nouvel univers de situations et de connaissances apparaît, ou plutôt une dissociation des univers considérés jusque là. En effet, pour un même objet ou une même collection, ce système peut attribuer plusieurs valeurs numériques :

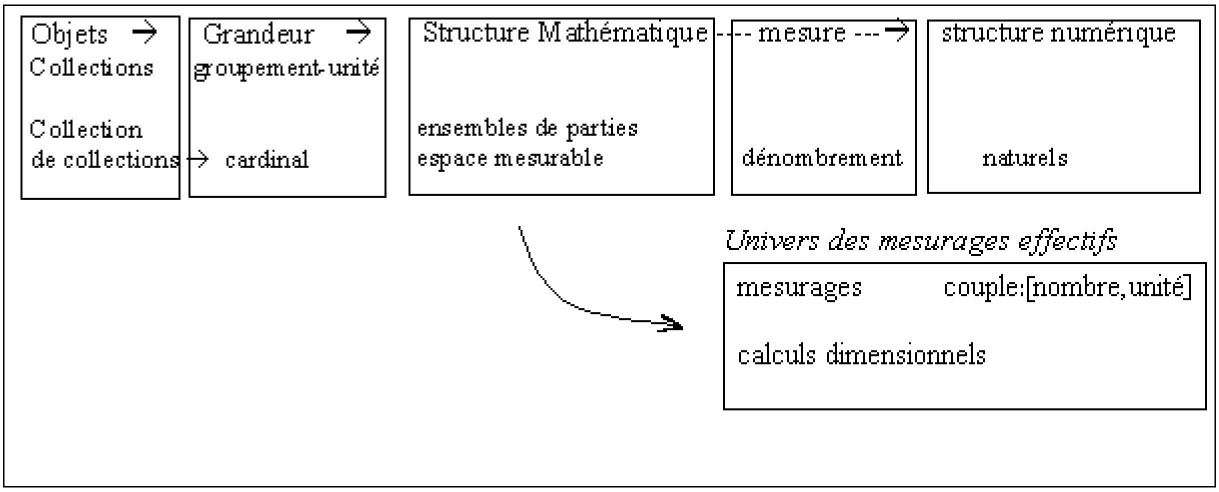
28 (ou 28 barres) qui indique le nombre d'objets,
et 7 le nombre de groupements-unité de 4
ou 4 si les groupements-unités comprennent 7 objets etc.

Même si des conventions précises limitent le nombre des expressions admises, cette multiplicité des valeurs numériques possibles pour un même objet crée un nouvel univers de situations et de connaissances : celui de la prévision des résultats de mesurages suivant les changements d'unités utilisés. Il n'y a plus « une » mesure effective pour un objet, mais toute une famille, dont les éléments se déduisent les uns des autres suivant le choix de l'unité. On peut alors garder le schéma précédent et remplacer la structure numérique d'arrivée par une structure vectorielle : le résultat du mesurage est un couple formé d'un nombre et de l'indication d'une unité. Mais on peut aussi considérer ces situations comme constituant un univers à part. La raison de conserver l'univers des nombres est évidemment que les problèmes les plus importants relatifs aux grandeurs ne sont pas affectés par les changements d'unités. Il y a un intérêt théorique à séparer ces types de questions. Il y a aussi un intérêt pratique : la plupart des phénomènes auxquels on s'intéresse et dans lesquels la mesure est impliquée – notamment en physique -, sont indépendants des unités choisies. C'est ainsi que se traduit maintenant l'idée qu'il existe pour les grandeurs une valeur intrinsèque associée à un objet particulier : SA longueur, SON poids. Réactions différentes pour laisser de côté l'univers des changements d'unités : les utilisateurs sont conduits à raisonner sur les objets en termes de « grandeur » et les mathématiciens sur les nombres avec l'idée d'une mesure unique.

Les problèmes de choix et de calculs des unités dans les mesurages est illustré par la situation « mesure des masses » étudiée par François Colmez puis par N. Brousseau[11].

Nous pouvons appeler l'univers des situations dans lesquelles il faut traiter de ces nouveaux objets l'univers des *mesurages effectifs* qui complexifie ainsi le schéma initial

[11] N. Brousseau, la mesure en cours moyen 1ère année, IREM de Bordeaux, 1987



LES MESURAGES DISCRETS DANS LES « GRANDEURS » NON DISCRETES

Le dénombrement sert alors de modèle pour les grandeurs non discrètes. Le problème essentiel sera de déterminer une *forme unitaire* et des méthodes de recouvrement[12] de l'objet à mesurer : déplacements, juxtaposition et pavage, après quoi il suffira de compter les pavés unités du recouvrement.

Objets →	Grandeur →	Structure Mathématique ----	mesure ---→	structure numérique
		espace mesurable	dénombrement	naturels

Nous avons toujours cinq univers, l'étude effective des différentes grandeurs mobilise toujours, à la fois, l'univers de ce que nous avons appelé « grandeur » et celui de leur structure mathématique. Même si les mathématiciens ne considèrent que celui des structures utilisables, peut-être pourrait-on les rassembler en un univers unique celui des grandeurs ?
Dans cette phase, les progrès reposent essentiellement sur la détermination et le choix des formes unitaires, des méthodes de juxtaposition etc. c'est-à-dire sur l'étude de l'univers des objets et celui de la grandeur dont il est question. Ces problèmes, y compris les croyances des élèves et les problèmes de métrologie liés aux appareils, sont présentés dans la leçon « le poids d'un récipient »[13]
Cependant, deux nouveaux types de situations liés à deux problèmes voisins mais distincts apparaissent déjà : l'encadrement et la création de structures numériques appropriées. Remarquons que ces problèmes se conçoivent et sont motivés par la considération des grandeurs munies implicitement au moins de la structure d'espace mesurable.

DEUX AUTRES UNIVERS CLASSIQUES :

L'encadrement naturel des valeurs de grandeurs discrètes préfigure les problèmes d'approximation et pose le problème de construire un ensemble numérique dense pour achever le projet du mesurage

a) l'approximation dans les grandeurs non discrètes.

La structure d'arrivée du mesurage comprend deux types de composantes numériques : par exemple deux valeurs approchées, l'une par excès l'autre par défaut, ou bien l'une indique une valeur dite « approchée », l'autre détermine un intervalle d'erreur ou « de confiance » : ce peut-être un seul nombre, le diamètre d'un intervalle, ou une distribution de fréquence ou de probabilité sur cet intervalle etc.

b) la densification et la complétion des naturels

---

[12] Nous utilisons métaphoriquement le vocabulaire du recouvrement du plan mais il faut entendre qu'il s'agit de n'importe quel type de grandeur. Par exemple, la détermination d'une forme unitaire pour la mesure de l'aire a pour correspondant la détermination des segments et des intervalles, celle des dates et des laps de temps…

[13] - Le poids d'un récipient ou l'étude par des élèves de problèmes de mesurage », en Grand N, n°50,

Ces problèmes peuvent être posés exclusivement dans l'univers des nombres, mais le rapport avec les problèmes de mesurage sont évidents. Ils ont été abondamment illustrés et étudiés, en particuliers dans l'ouvrage « Rationnels et décimaux »

Remarquons que la complétion directe proposée par Régine Douady montre l'intérêt qu'il peut y avoir à ignorer certains méandres historiques dans la genèse des instruments cognitifs modernes.

VERS UNE ECHELLE « ABSOLUE » DE « LA GRANDEUR »

Chacun des univers de situations que nous avons évoqués sont le lieu de problèmes spécifiques dont l'étude fait partie de l'univers en question et tend à le développer de manière indépendante :

- la détermination des objets et les structures de classifications et la prise en considération de nouveaux objets (par exemple les fonctions, objet de mesures),
- la détermination, la dissociation ou les combinaisons de grandeurs pour fabriquer des modèles toujours plus précis et fiables pour des champs plus étendus de phénomènes que l'on examine,
- l'étude des structures mathématiques qui peuvent servir dans cette entreprise,
- celle de l'intégration et des types de fonctions pour étendre les mesures à de nouveaux objets,
- la création de structures mathématiques « numériques » nouvelles qui permettent de faire entrer de nouveaux objets dans la logique de la mesure (échelles d'intervalles, dimensions d'espaces, fractals, etc.)

Nous nous sommes arrêtés ci-dessus aux mesures réelles positives, car nous verrons que l'inventaire de leurs applications dans l'enseignement obligatoire est déjà très volumineux.

Mais il est intéressant toutefois de suivre encore un peu la logique de la recherche de modèles pour représenter « ce qui est grand ou petit » en la poursuivant dans deux directions.

L'OBJECTIVATION DE LA GRANDEUR PAR DES MESURES DE MESURES

Toutes les mesures de grandeurs aboutissent à des valeurs numériques et tous les systèmes de mesurage tendent à représenter les valeurs des grandeurs des objets par des expressions familières des valeurs numériques traitées : elles ne doivent guère posséder plus de quatre chiffres significatifs et se présenter comme comprises entre 0 et 100, parfois entre 0 et 1 Cet écrasement tend à anéantir la possibilité de comparer entre elles des grandeurs spécifiées différentes. Deux voies principales s'ouvrent pour la rétablir :

l'ordre « objectif » de grandeur, qui se réfère à un rangement total des objets suivant une grandeur et qui « mesure » les tailles à l'aide d'une échelle exponentielle qui remplace ainsi les rapports linéaires dont la portée se révèle trop courte. Une bonne image scolaire de cette mesure est la taille des nombres familière aux enfants.

La rareté relative – i.e. la place dans une fonction de répartition – dans sa catégorie. Un objet est « grand » s'il est plus grand que la plupart des objets de sa catégorie.

Cette dernière modélisation donne apparemment au terme « grandeur » un sens relatif puisqu'il dépend de ce qui est connu d'une société ou d'un sujet. En fait, puisque les valeurs obtenues sont des scalaires qui ne dépendent plus ni de la nature de l'objet, ni d'aucune unité, cette mesure permet des comparaisons entre des grandeurs spécifiées différentes et même de types différents. Par exemple, la phrase insolite : « ce lapin est plus gros que ce cheval n'est grand » a un sens.

Des expériences menées dans les années 70 ont montré que l'initiation à ces types de mesures statistiques et même probabilistes n'était pas hors de portée des élèves de l'école primaire. Ce qui ne veut pas dire qu'il faut absolument la faire.

Espaces Mesurables | intégration mesure | structure numérique

		Espaces Mesurables	intégration mesure	structure numérique	
Objets	Classes	Grandeur	Structure	application	structure
			« contingence »		modèle (calculs)
	Ens. Ordonné Stable de classes				
				mesurage A	magnitudes
				mesurage B	distribution
					place dans une distribution de fréquence
					place dans une échelle « absolue » (ordre de grandeur)

CONCLUSIONS

Nous avons arrêté notre étude au seuil de ce qui fait habituellement la partie principale de l'étude des grandeurs, des mesures et des nombres. De nombreux textes traitent déjà ces questions dans un esprit proche de celui que nous venons de proposer

Le but de ce chapitre était de montrer les moyens de traduire en termes de situations les principales caractéristiques du concept de grandeur. Nous avons naturellement ordonné leur présentation de façon à faire ressortir un schéma général pour une genèse de ce concept. Il serait absurde de considérer que ce schéma doit être suivi par toute genèse didactique, il n'est destiné qu'à servir de base aux études qu'il convient alors d'entreprendre pour élaborer et discuter une telle genèse qui ne peut être que le résultat d'études et de compromis entre diverses conditions dont de nombreuses n'ont pas été évoquées ici.

Il n'est pas plus « le » modèle didactique pour l'enseignement que ne le serait un exposé axiomatique ou la description détaillée d'une genèse historique de ce concept. Simplement, il devrait permettre de mieux évaluer les caractéristiques d'une genèse particulière.

Les problèmes de macro didactique qui restent maintenant à examiner sont les suivants :

- La détermination des genèses didactiques – au sens concret de suites de situations didactiques – pour les différentes grandeurs, et de leurs mesures, compatibles avec le développement intellectuel des enfants. Le nombre des possibilités de genèses différentes paraît infini si on se contente de n'envisager que les relations « logiques ». Mais la « mise en situation » de ces relations fait vite intervenir d'autres caractères économiques plus restrictifs.

- L'évaluation des coûts et des rendements de ces genèses. Les variables qui interviennent dans cette évaluation sont nombreuses et actuellement mal quantifiables, elles concernent notamment :

    - l'exploitation des expériences non scolaires des élèves (c'est l'évolution des pratiques non scolaires du mesurage qui est à la base des évolutions et des difficultés des enseignements)

- le temps total devant être consacré dans ces situations aux diverses formes d'apprentissage nécessaires,
- la facilité de mise en œuvre didactique et donc le coût des matériels nécessaires et accessoirement celui de l'adaptation de la compétence des professeurs,
- les résultats scolaires : locaux, c'est-à-dire qui tiennent compte du nombre d'élèves ayant « acquis » des connaissances « suffisantes » relativement aux différentes situations « caractéristiques », ou plus généraux - qui tiennent compte de l'intérêt ou de l'importance de ces acquisitions pour les apprentissages ultérieurs ou pour les utilisations…

- La recherche des genèses minimales compatibles avec les horaires envisageables et un niveau raisonnable des connaissances finalement acquises. Tout ne peut pas être enseigné mais tout ce qui n'est pas utilisé dans les filières les plus longues ne peut pas être banni des enseignements, surtout à l'élémentaire. En particulier, l'évolution qui a fait disparaître les « grandeurs » du vocabulaire des mathématiques, en les renvoyant dans le domaine des sciences, a créé un problème de référence pour l'enseignement élémentaire

Ces éléments ont pour objet de guider les choix politiques liés à l'enseignement. « Beau programme » mais que l'on aurait tort de ne pas prendre en considération pour orienter les recherches de didactique. Nous nous en servirons de manière presque entièrement subjectives pour discuter quelques phénomènes actuels dans la dernière partie.

J'espère que cette esquisse aura donné une idée sur une des façons dont la théorie des situations peut intervenir concrètement dans une étude de macro ingénierie et de macro-didactique.

4. A PROPOS DU RESTE DU COURS ET DU CD ROM

Le paragraphe ci-dessus n'était que l'amorce d'un texte qui devait en comprendre trois autres, qui ne pouvaient pas être communiqués dans le cadre du cours, mais que j'espérais pouvoir faire passer « off ». Ce texte n'a pas pu être achevé, chaque nouvelle étude soulevait de nouvelles questions et je n'en ai communiqué que quelques bribes : sur l'enseignement des grandeurs au 20$^{\text{ième}}$ siècle, sur la classification des grandeurs scolaires et sur les situations utilisables pour leur enseignement dans la scolarité obligatoire, sur les phénomènes, sur les obstacles et sur les voies qui pourraient s'ouvrir. Comme j'ai fait quelques allusions à ces réflexions dans mon exposé oral, et pour que les auditeurs intéressés les retrouvent je livre ces bribes à la discrétion des organisateurs s'ils les trouvent intéressantes pour leurs lecteurs et si elles trouvent place sur le CD Rom. .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BARBUT M. et MONJARDET, B. 1970 *Ordre et classification, Algèbre combinatoire, 1 et 2,* Librairie Hachette Paris

BESSOT, A. et EBERHARD, M. (1983) Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en Didactique des mathématiques,* **4.3**,

BOULEAU, N., (1999) *Philosophies des mathématiques et de la modélisation du chercheur à l'ingénieur,* Paris : L'harmattan

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération, *Recherches en Didactique des mathématiques,* **19**.1. 41-75,

BROUSSEAU Nadine, *La mesure au CM1*, IREM de Bordeaux, 1987

BROUSSEAU N. et G. *Rationnels et Décimaux,* IREM de Bordeaux, 1986

BROUSSEAU N. et G. (1992) Le poids d'un récipient ou l'étude par des élèves de problèmes de mesurage, *Grand N*, **50**, 65-87

BROUSSEAU G. « Les univers de la mesure ». communication personnelle à la commission Kahane (1999) mais il en existe une version préalable dans « La mesure au CM1 », IREM de Bordeaux, 1987 et dans « Le poids d'un récipient ou l'étude par des élèves de problèmes de mesurage », en Grand N, n°50, IREM de Grenoble, 1992, pp. 65-87

CHEVALLARD Yves, (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, **19**.2, 221-266.

COLMEZ, F. (1995) Place et rôle des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques de l'Ecole Primaire au Lycée *Contribution aux journées de la commission Inter-IREM " premier Cycle* " Juin 95

DHOMBRES J., (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*, Paris, CEDIC/ Fernand Nathan

DOUADY, R., (1986) Jeux de cadres et dialectique outil objet, *Recherches en Didactique des mathématiques*, **7**.2.

DOUADY, R, et PERRIN-GLORIAN, M.-J., Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, Educational Studies in Mathematics **20**.4, 387-424

FREUDENTHAL H, (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel Dordrech

GUITEL G., (1975) *Histoire Comparée des Numérations écrites* " Paris, flammarion

KAZIN, M. et KOTCHARIAN, M. Dimensionnelle (analyse et similitude) *Encyclopaedia universalis* **7**. 497b (1980)

LEBESGUE, H. (1931) *La mesure des grandeurs*, Genève : L'enseignement mathématique

LICHNEROWICS, A., (1994) Géométrie et relativité, in Jean Paul Pier, ed. *Development of Mathematics 1900-1950* Basel : Birkhäuser

LIZCANO, E. (1993) *Imaginario colectivo y creacion matemàtica* ", Barcelona : gedisa ed 1993

Rapports " Géométrie " et " Calcul " de la commission KAHANE 1999

REVUZ, H, Intégration et mesure, Encyclopaedia universalis (1980)

ROUCHE N., (1992) Le sens de la mesure Paris : Didier Hatier

ROY, M. F., « Géométrie algébrique réelle » in Development of Mathematics 1950-2000 p. p. 939-965 Jean Paul Pier, ed. Birkhäuser (2000)

WHITNEY Hassler, 1968, « The Mathematics of Physical Quantities, p. 115-138 Part II : Quantities srtuctures and dimensional analysis, p. 227-257 The American Mathematical Monthly n° 75

3

Principales grandeurs scolaires. Situations et processus didactiques

LA CLASSIFICATION DES GRANDEURS

Il s'agit maintenant en prolongeant l'étude menée au chapitre précédent, de dresser a priori une liste des grandeurs susceptibles d'avoir été abordées sous une forme ou sous une autre dans l'ensemble des manuels du siècle dernier destinés aux élèves de la scolarité obligatoire, puis d'établir une liste de situations connues, observées ou réalisées, caractérisant les principales étapes de la constitution didactique de ces grandeurs. C'est à dire d'établir un canevas des *organisations mathématiques* et des *organisations didactiques* relevant des grandeurs
Les réflexions du chapitre précédent permettent d'identifier certaines étapes dans la genèse d'une grandeur, et une certaine hiérarchie entre certaines d'entre elles. Mais le champ des grandeurs est si vaste et si divers qu'il faut faire appel à d'autres variables pour le structurer en s'intéressant au caractère didactique de ces variables.
Rappelons qu'il faut bien distinguer, d'une part, la manière de traiter une grandeur par les élèves d'un certain âge, en rapport avec la structure que la situation fait apparaître comme pertinente pour sa résolution, et d'autre part, le savoir de l'observateur, qui ne sert que de moyen d'analyse.
Par exemple, le fait pour un enfant d'effectuer les opérations et les calculs dans un milieu ne comprenant qu'une ensemble de baguettes de longueurs multiples d'une unité (les baguettes Cuisenaire par exemple) permet certes de définir quelques manipulations et de développer quelques éléments d'un langage approprié aux longueurs de segments quelconques, mais la conception de l'enfant reste celle d'une topologie discrète, c'est-à-dire un modèle très réduit de la grandeur « longueur » (en ajoutant des baguettes intermédiaires dans le milieu on détruit les possibilités de prévision du résultat des opérations.

CONCLUSION : PRINCIPAUX CRITERES

A. Grandeur scalaire ou vectorielle

Cette variable reprend l'ancienne distinction nombres abstraits/ nombres concrets (ou vecteurs unidimensionnel). Les scalaires sont des rapports, des coefficients, des nombres opérants dans un ensemble (des opérateurs) etc. La genèse du chapitre précédent justifie que les rapports naturels soient considérés comme seconds par rapport aux naturels concrets. Par contre, on pourrait considérer que les rapports naturels sont premiers dans une genèse des fractions-mesures (concrètes) comme dans « Rationnels et Décimaux ». Les angles peuvent être parfois considérés comme des scalaires…

B. Grandeurs de base ou dérivées

Grandeurs de base :	objets :	segments	grandeur	longueur,	(dimension 1)
				masse	
		intervalles de temps		Temps :	
		« valeur d'échange»		prix	
Grandeurs dérivées : géométriques					
	Objets :	surfaces	grandeur	aire,	(dimension 2)
		solides	grandeur	volume	(dimension 3)
		secteur		angle	
		rotation		angles	(l'usage du même mot pour l'objet, pour la grandeur et pour la mesure me semble regrettable)

Grandeurs dérivées physiques : cinématiques (vitesse), mécaniques (force, travail, puissance, pression), électriques

C. Type de dérivation

Grandeurs intégrales :
Bidimensionnelles : aire, travail d'ouvriers, production de lait, etc.
Tridimensionnelles : volume, intérêt financier (temps, capital, taux)
Grandeurs dérivées : vitesse, poids volumique, débits,
formules complexes

D. Type d'ordre de la grandeur (et de sa mesure:

1. les rangs (ordre discret fini): le nombre de valeurs possibles prend alors une certaine importance :
3 valeurs : Ex. « petit, moyen, grand » ou « vrai, douteux, faux », ou « toujours vrai, selon les cas, toujours faux » , etc..
4 valeurs : impossible, improbable, assez probable, certain »
(ordre discret avec un premier élément : type ω)
n valeurs : les naturels
2. Les ordres discrets sans premier élément (type ζ) : les températures entières
2. les ordres dense :
alphabétique, type η (dénombrable)
les températures décimales
3. les grandeurs mesurables denses ou continues
pour les élèves : décimales, rationnelles,
3. Grandeurs dense et bornée (type θ)
par exemple les probabilités, les pourcentages « internes », certains taux etc.
4. Les grandeurs denses pour l'élève (éventuellement continues pour l'observateur), mesurables ou non, fournissent l'occasion d'un dédoublement entre cette grandeur et une échelle discrète d'intervalles : par exemple les dates et les durées, les segments et leurs abscisses etc.

E. Grandeurs repérables ou mesurables

F. Discrète ou dense

CARACTERE DIDACTIQUE DE CES CRITERES

En quoi ces critères ont-ils un caractère didactique ? Rappelons que pour qu'une variable soit « cognitive » il faut et il suffit qu'il existe une situation telle que deux valeurs différentes de cette variable changent la connaissance nécessaire à la solution (et donc les comportements optimaux de résolution) de cette situation. Et pour qu'une variable soit didactique, il suffit qu'elle soit cognitive et que ses variations permettent à l'enseignant de modifier sensiblement le résultat de sa stratégie optimale dans une situation didactique.

Scalaire

A priori un scalaire isolé paraît structurellement plus simple qu'un vecteur puisqu'il n'est composé que d'une information au lieu de deux. De plus la structure des scalaires est le plus souvent la même (la duale) que celle de l'ensemble sur lequel il opère. De plus les scalaires étant sémantiquement plus généraux que les ensembles particuliers sur lesquels ils opèrent, on pourrait espérer qu'étant plus familiers, ils seraient d'un maniement plus économique. Pourtant au chapitre précédent nous avons repéré que les scalaires (les rapports) ne commençaient à jouer un rôle qu'autant que des naturels apparaissaient dans les dénombrements par groupes, où des naturels « concrets » sont comparés (il en aurait été de même pour des différences).. Ils apparaissent donc comme des relations dans des ensembles de nombres-mesure. Dans les situations de dénombrement le remplacement de la procédure « mesure directe » par la procédure « rapport » dans le cas de grandes collections permet des économies substantielles (la variable est « cognitive »). Cette complexité plus grande conduit l'enseignant à n'enseigner la fonction scalaire des naturels qu'après la mesure des naturels.

Notons qu'il n'est peut être pas impossible d'imaginer une situation qui introduirait directement les naturels scalaires et les naturels concrets après… encore faut-il la trouver !

Grandeurs de base, dérivation, types de dérivation…

La façon d'établir le caractère didactique de ces variables est la même que ci-dessus, et les conclusions presque évidentes aujourd'hui. Il suffit d'évoquer les nombreuses situations (non didactiques) étudiées pour cela par les épistémologues généticiens et par les psychologues didacticiens et les non moins nombreuses situations étudiées par les didacticiens. Encore faut-il en dresser l'inventaire de ce point de vue (car ces recherches avaient souvent d'autres visées) et en conserver vivant le répertoire. Le paragraphe suivant évoque quelques bases de ce travail

GRANDEURS AYANT ETE PRESENTEES DANS LA SCOLARITE OBLIGATOIRE

Dimension	Type de grandeur	Activités	Niveaux scolaires CP	CE	CM	CO	Pro
Unidimensionnel I non scalaire	Cardinal fini	Enumérer					
		Ordonner par cardinaux					
		Equipotence					
		Comptage					
		Somme					
		Surcomptage					
		Produits					
		Numération					
	Longueur et distance	Comparaison Objets					
		Ordonner des Segments					
		Distances, ordonner					
		« Sommes » de segments					
		différence					
		Comparaison à l'unité					
		Unités légales					
		Changements d'unités					
		Procédés de mesurage					
		Besoin de densité,					
		Rationnels et décimaux					
		Distances marines					
		Système anglo-saxon					
		Longueur de courbes					
	Valeurs et monnaies	Troc, ordre de valeurs					
		Egalité, somme					
		Unités légales					
		Monnaies, change					
	Masses et poids	Comparaison, ordre					
		Egalité,					
		Sommes					
		Unités légales					
		Procédés de mesurage					
		Propriétés métrologiques					
		Changements d'unités					
		Décimaux et rationnels					
		Système anglo-saxon					
	Temps	Ordre temporel					
		dates					
		Mesurage du temps					
		durées					
		Comparaison de durées					
		Sommes de durées					
		Mesures légales					
		Opérations					
		conversions					

Unidimensionnel I (Non scalaire) Suite	Capacités	Comparaison, ordre					
		Sommes Mesurage					
		Unités légales					
		Opérations					
		Conversions					
		Système anglo-saxon					
	Angles *	Secteur, rotation					
		Ordonner, Egalité					
		Somme					
		Mesurage, rapporteur					
		Numération sexagésim.					
Unidimensionnel II Scalaire	Rapports naturels	Ordonner					
		Egalité de rapports					
		Somme de rapports					
		Produits de rapports					
		Numération II					
Multidimensionnel I Mesures produits	Aires planes	Objets, comparaison					
		Recouvrements,					
		Equivalences, figures					
		Mesurage d'aires					
		Calculs d'aires					
		Unités légales					
		Conversion					
		Unités agraires					
	Volumes	Objets, comparaison					
		Volumes pleins et creux					
		Equivalences, formes					
		Mesurage de volumes					
		Calculs de volumes,					
		Unités légales					
		Conversion					
		Unités « pratiques »					
Multidimensionnel II Mesures quotients et Mesures Dérivées	Vitesses	Comparaisons, rangement					
		Vitesse, distance, durée					
		Vitesse moyenne,					
		Changements d'unités-2					
		Sommes et différences					
	Débits (volumes, masse)	Comparaison, rangement					
		Débit, quantité, durée					
		Débit moyen, unités					
		Changements d'unités					
	Prix	Prix et quantités					
		Comparaisons de prix					
		Conversions					
		Prix de l'argent nominal					
	Masses Volumiques	Comparaison, rangement					
		Vol., mas., mélanges					

Autres grandeurs (physiques, …)	Energie, travail, puissance						
	Tension, intensité						
	information						

Grandeurs bornées Mesures à condition d'échelle	Pourcentages (scalaires)	Rapports, comparaisons					
		Expressions décimales					
		Pourcentages intérieurs					
		Généralisation à R					
	Statistiques Probabilités Economie	Effectifs et fréquences					
		Probabilités					
		Taux,					

Mesures sur R	Translations numériques	Altitudes, profondeurs					

Grandeurs non mesurables	Rangs	Température					
		performances					

Grandeur des « grandeurs »	Ordres de grandeur	Echelle exponentielle					
		Rareté relative					

GRANDEURS POUR LA SCOLARITE OBLIGATOIRE

Presque toutes les grandeurs présentées dans le tableau ci-dessus ont figuré explicitement ou implicitement dans des manuels destinés à « tous » les élèves de l'école primaire (6 à 14 ans). Nous avons exclu les grandeurs qui ne figuraient que dans des filières professionnelles (la pointure des souliers ou des chapeaux) ou dans des classes spécialisées (les mesures marines pour les écoles primaires côtières par exemple). Il est important de remarquer que, presque toutes étaient enseignées dans les cinq années élémentaires. Quelques unes seulement, comme les grandeurs électriques, n'ont figuré que dans les classes de fin d'études. L'étude des grandeurs à l'élémentaire trouvait sa justification dans le programme de fin d'études qui le prolongeait visiblement. Aujourd'hui l'enseignement professionnel ne joue plus ce rôle et l'enseignement élémentaire vise le Collège, d'où les grandeurs sont presque absentes. De sorte qu'il risque d'être difficile de maintenir ou de rétablir l'étude des grandeurs dans le premier sans aménager un peu le second.

Il s'agit maintenant au prochain chapitre d'étudier l'enseignement des grandeurs au cours du siècle dernier et d'essayer d'en comprendre son évolution, ses caractères : ses insuffisances comme ses avantages, avant de revenir dans le chapitre suivant sur l'inventaire des grandeurs étudiées.

ANNEXE AU CHAPITRE 4

SITUATIONS DIDACTIQUES ETUDIEES AU COREM A DIVERSES EPOQUES

LOGIQUE ET DESIGNATION FORMELLE D'OBJETS

Désignation d'élèves, d'objets, etc. (leçons non verbales) CM, → CP Livre Dunod Guy Brousseau (GB)
Le jeu de la boîte (qu'y a-t-il dans ma boîte) série de leçons EM (GB. & J. M. Digneau & Jacques Péres & G. Jousson)

- Création du répertoire
- Conception de listes
- représentation d'une petite collection, caractérisation graphique des objets
- création d'un code

Le jeu de la moufle (relations) E.M. (M. H. Salin-)
Codage de l'ordre (Jaques Péres)
Usage et construction de tableaux (G.B. & Rose Foucaud) ensemble produit (EM, CP)
Connecteurs logiques
Opérations $\cap$ et $\cup$ dans P(E) G.B. & N. Brousseau) CM1, CM2 Cahiers de l'IREM
Enumération de collections (G.B.& J. Briand) EM CP (leçons et logiciels)

RAISONNEMENTS

Graphes de relations et de successions (C. IREM 73)
Gestion d'un problème complexe (CE1)
Graphes de relations, de problèmes, de raisonnement et de solution en arithmétique (GB & D. Woillez)
Qui dira 20 ? (établir des théorèmes)
Le nombre le plus grand (conjectures et contre-exemples)
Le tapis des débats

ORDRE ET TOPOLOGIE

Désignation et codages de chemins (projet topologie, Antilles 1971 GB et G. Vinrich) CP
Désignation et codages de chemins (programmation de la tortue logo) E.M. (Jacques Péres & G. Jousson) E.M
Chemins de Hamilton (Cahiers IREM)
La jupe et autres situations de repérage (GB. & G. Galvez)
Le loup et l'agneau (logiciel d'ordinateur, GB & H. Ratsimbah-Rajhon) CM
Jeux de Taquin et de mise en ordre (GB & NB) 1973

NOMBRES NATURELS

Genèses

Processus Dunod (1964)
Processus (APMEP 1971)

Situations pour le dénombrement

Situations fondamentales du naturel (CP) Leçons

Situations fondamentales (logiciels d'ordinateur)
Dessin, Codage un à un, nombres
« mesure » vectorielle de collections

Situations pour l'addition de naturels

Codages additifs de naturels, substitution
Somme comme mesure de la réunion disjointe,
Addition de vecteurs
Addition comme translation numérique (ajouter tant)
Composition d'additions
Techniques d'addition (énumérations)

Situations pour la Numération

codage vectoriel de collections de groupements réguliers
Situation fondamentale (M. Bahra)
Le répertoire minimal des pesées avec une balance Roberval
Les pesées de plaques avec une balance Roberval

Situations pour la multiplication de naturels

Multiplication (sens et technique) : (Ref. Etudes préalables)

- Comme mesure (cardinal) de l'ensemble produit (Processus : calculer l'aire d'un rectangle) (Ateliers de Pédagogie TV 1973)
- comme addition répétée

codage multiplicatif de nombres (décomposition en facteurs)
Construction de formules au CE1 dans (N, x)
Apprentissages des tables, assortiments (GB et F. Genestoux)

Situations pour la soustraction de naturels

- Recherche du terme inconnu d'une somme (le cas de Gael)
- Dénombrement et calcul de la différence, du manque, du reste (cardinal de la différence – non symétrique - ensembliste)
- Comme translation numérique (formulation et raisonnement direct), comme translation inverse naturelle
- Différentes méthodes de calcul (les schtroumpfs)
- Composition de translations directes et inverses

Le jeu des envahisseurs

Situations pour la division euclidienne

- Soustraction répétée
- Recherche du terme inconnu d'un produit
- Qui dira « n » (Processus pour la réintroduction de la division)

Division euclidienne au CE et au CM1 (ORTF 72)
Concours de problèmes de division (Augustin)

Situations pour les mesures naturelles

Les pesées de plaques avec une balance Roberval
Le poids d'un récipient

MESURES RATIONNELLES DECIMALES DE DIVERSES GRANDEURS

Les mesures rationnelles

Commensuration

- Feuilles de papiers (épaisseurs) : équivalence, somme, multiplication par un scalaire
- Poids et capacités

Partage de l'unité

- équivalence des deux procédés

Topologie rationnelle et décimale : approximation

- le jeu des explorateurs
- Insertion de fractions dans un intervalle
- l'expression décimale des rationnels : division dans Q et D

NOMBRES RATIONNELS ET DECIMAUX

Les homothéties rationnelles

Produits et rapports de rationnels et de décimaux
Désignation de fractions (leçons non verbales) (1964) (6ième - 5ième)

LA CONNAISSANCE DE L'ESPACE

Situation fondamentale : reproduction de figures
Translations dans R^2 (GB & D. Fregona)
La jupe et autres situations de repérage (GB. & G. Galvez)
La distance entre deux drapeaux (figures solides et modélisation)

LA GEOMETRIE

Situation fondamentale : le centre du cercle circonscrit

L'ARITHMETIQUE ELEMENTAIRE

Concours de problèmes, Types de problèmes
Résolution arithmétique, résolution algébrique

L'ALGEBRE ELEMENTAIRE

Introduction de lettres comme constantes
Introductions de lettres comme variables dans des projets de calcul (expressions) attribution, substitution
Comparaisons de projets de calculs : deux calculs donneront ils le même résultat quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres (théorèmes)
Recherche de la valeur inconnue d'une lettre
Inégalités (GB et Mercedes Diez)

4

L'ENSEIGNEMENT DES GRANDEURS AU XX^{E} SIECLE

PLAN TRADITIONNEL DE L'ETUDE D'UNE GRANDEUR

L'étude des grandeurs prenait traditionnellement à l'école primaire la forme suivante :
Le travail sur les objets était en fait réduit à l'étude de formes géométriques et à leurs caractéristiques
Les grandeurs ne faisaient pas l'objet d'études propres, mais au mieux de quelques manipulations et découpages sans grand rapport avec la connaissance de la grandeur, ni avec sa mesure. Ce sont les procédés de mesure qui définissent les grandeurs :
Ainsi dans René Joly (1938-55) Arithmétique nouvelle du CM, l'étude des masses commence avec la leçon « Les mesures de poids » par la description d'une pesée et par l'inventaire des unités et sous unités de poids, suivi de deux leçons sur le quintal, la tonne et les mesures réelles ou effectives, puis de l'exposé de la pratique des pesées.
La première leçon sur les « surfaces » illustre bien le désarroi de l'auteur, même devant une grandeur « visible directement » comme l'aire. « Tandis que la clôture de ce parc se rapporte au périmètre, le gazon que broutent les vaches représente la surface » (!) Peu importe c'est le mesurage qui définit la grandeur. Suit une leçon sur le « décimètre carré » qui contient 100 « centimètres carrés » et sa généralisation immédiate aux « unités de surface » qui « sont de 100 en 100 fois plus grandes ou plus petites. Le fait que le décimètre carré ne soit pas le déci(mètre carré) n'est pas exprimé.
Suivent 6 leçons sur les mesures de surfaces : numération, aire du carré, du rectangle, calcul d'une dimension, surfaces agraires, aires augmentées ou diminuées, allées qui se croisent, puis l'aire du parallélogramme où l'on revient à la grandeur par la mesure. Viennent plus loin des problèmes de ventes de terrain et d'aires de triangles.

On trouve cependant un contre exemple dans le plan suivant (Chaumeil et Moreau, 1889) :
Après une étude des polygones : **Mesure des surfaces** p 107-111 où : on établit les formules de calcul de l'aire des divers polygones, justifiée par des recouvrements, on introduit les formules de l 'aire (appelée surface) du disque (appelé cercle), du secteur et du segment et où on démontre le théorème de Pythagore
Mesure de superficies p 118-123 où il s'agit de chercher combien de carrés des différentes unités sont nécessaires pour couvrir une surface, c'est-à-dire du système métrique et des mesures agraires…
Remarque, déjà certaines écritures algébriques sont utilisées pour évoquer les calculs à faire, sans qu'il soit précisé comment ces calculs seront justifiés par les élèves :

$$\frac{21\times H}{2} = 136{,}50 \qquad d'où \quad H = \frac{136{,}50\times 2}{21} = 13\,m$$

De sorte qu'en comptant la proportion des pages et le nombre d'exercices consacrés au système métrique par rapport à celles consacrées aux autres grands secteurs des mathématiques on peut se faire une idée de l'importance relative de l'étude des grandeurs dans un manuel.
Il aurait fallu évidemment compléter cette évaluation par d'autres, fondées sur l'analyse des programmes officiels et de leurs commentaires, et sur celle de journaux de classes ou d'épreuves telles que le certificat d'étude… mais cet énorme travail ne mérite d'être entrepris que s'il peut apporter des réponses à plus de questions plus précises que nous n'en avons formulé ici.

STRUCTURE D'UNE LEÇON DE MATHEMATIQUES

Pour évaluer le type et la quantité de travail effectué par l'élève il n'est pas inutile aussi de rappeler les structures des leçons de mathématique.

Jusqu'à la fin du XIXe siècle la forme standard des cours prend la forme d'une suite de questions et de réponses du genre :

- Q :« qu'appelle-t-on grandeur ? »
- R : « on appelle grandeur ou quantité tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme une somme d'argent, un nombre d'arbre, la hauteur d'un mur »
- Q :« qu'est que l'unité ? »
- R : « l'unité est une quantité connue qui sert à mesurer ou à évaluer toutes les quantités de la même espèce qu'elle »
- Q :« Qu'est-ce qu'un nombre ? »
- R : « un nombre est le résultat obtenu en comparant une quantité à son unité, il est concret si… »

Qui déterminent le savoir par ce que l'élève doit dire « par cœur » en réponse à une question conventionnelle précise. Même l'exécution des algorithmes fait parfois l'objet d'une description verbale complète : la règle. (cf H. Neveu, Arithmétique, Masson 1921)

A la fin du XIXe siècle une structure de leçon aux activités beaucoup plus variée tend à se substituer à la précédente.

	Travail	Durée
a	Correction du devoir du soir au tableau (par le maître, ou par un élève)	0 05
b	Calcul mental (procédé La Martinière), ou interrogation orale	0 05
c	Cours : Règle et définition, exemple	0 10
d	Questions orales pour vérifier la compréhension du texte	0 05
e	Exercices sur l'ardoise ou au brouillon,	0 05
f	Correction des exercices au tableau par un(e) élève ou par le maître	0 05
g	a) Problème : - lecture et explication de l'énoncé - résolution individuelle - présentation de la solution sur le cahier du jour - correction collective au tableau - copie des corrections par les élèves. (pendant que le professeur note les cahiers du jour	0 20 : *0 03* *0 06* *0 04* *0 05* *0 02*
h	le soir donnée des devoirs : exercices et petit problème	

Cette structure se modifiait suivant quelques modalités didactiques :

- L'enseignement d'une notion nouvelle comprenait essentiellement les parties: a, b, c, d, e, f, g,
- L'enseignement d'un algorithme : a, c, b, d, e, f, g,
- Une révision : a, b, e, f, d, c, g,
- L'étude d'une application : a, c, g, d, b, e, f,

Ainsi en un mois, l'élève faisait environ 75 exercices de calcul mental , 90 exercices écrits (dont 30 à la maison) et 30 problèmes « assez fermés (dont 15 à la maison et 1 sur le « cahier mensuel »).
Il répondait environ à 7 questions orales.
Les manipulations effectives autres que les calculs, étaient le plus souvent enfermées dans la phase « cours » du professeur. La participation des élèves à ces manipulations était nécessairement extrêmement réduites. Elles n'étaient pas un but mais un moyen supposé faciliter la compréhension et l'apprentissage. Mais ces moyens paraissaient bien douteux et bien coûteux en efforts matériel et en temps devant une « bonne » formulation, explication, répétition des calculs etc.
Par la suite, d'autres formules sont apparues sous la poussée des mouvements pédagogiques. Leur étude est rendue difficile par la variété (théorique au moins) des pratiques et par toute une série d'objurgations parfois contradictoires :
Les professeurs doivent faire des leçons personnelles (ne pas reproduire) originales (innovation), ne pas utiliser le manuel (sinon pour les exercices), mais échanger leurs méthodes avec leurs collègues (ce qui augmente la dispersion), faire travailler les enfants sur des fiches etc., avec du matériel…

Les élèves doivent comprendre plutôt qu'apprendre (par les procédés répétitifs) mais les élèves doivent être actifs et le professeur parler peu . Il doit « exploiter » les événements que ses dispositifs font naître plutôt que conduire les élèves à sa guise…Mais ils doivent évaluer tout ce qui a été appris (sans qu'on sache toujours ce qu'il faut faire en cas de difficultés excessives) et rester modeste, n'enseigner que ce qui peut être appris…
Toutes ces mesures augmentent l'instabilité du déroulement des leçons et dissimule leurs caractères communs effectifs aux yeux même des professeurs au bénéfice de caractères plutôt idéologiques.

STRUCTURES DE LEÇONS SUR LA MESURE DES GRANDEURS

1. Au début du siècle, le traitement des grandeurs dans les manuels est purement descriptif et verbal, mais il s'appuie sur des pratiques sociales très répandues et familières. Le texte évoque donc essentiellement :

- un exposé de savoirs (à apprendre par cœur) par le professeur, essentiellement

  a) une ou des techniques de mesurage. La variété des problème de métrologie liés aux mesurages effectifs, des techniques (double pesée), aux instruments (bascule, romaine, vernier…)

  - b). la définition et l'usage des unités (pratiques, effectives réelles, légales etc.)

- en ce qui concerne le travail de l'élève : des calculs

  - a). Dans le système métrique et les transformations d'unités,
  - b) et sur quelques problèmes « spécifiques » qui permettaient d'explorer implicitement des propriétés de l'espace mesuré : quelques exemples « d'exercices propres aux grandeurs » et spécifiques (EPG) tels que :

- longueurs : intervalles et bornes, périmètres de surfaces, relation d'ordre, échelles,
- masses : tare et récipients, comparaisons transformations d'expressions numérique, changements d'unités à cause de la maniabilité d'une grande échelle d'ordres de grandeur → alliages
- capacités : relations avec les volumes (→ débits robinets)
- aires augmentation, intersections, faces de solides,
- temps : bases (→vitesses, moyennes, trains,) etc.

2. La réforme de 1905 met l'accent sur l'expérience (laboratoires de mathématiques) surtout au sens de la *démonstration* par le professeur. Ces activités ne portent guère que sur les EPG qu'elles ont à charge d'illustrer et de faire comprendre. En fait c'est surtout l'ostension qui est réalisée dans les classes et suggérée dans les manuels. Par la suite, l'activité des élèves est mise en avant, d'abord collective puis à partir des années 30, puis individuelle (manipulation de matériels : baguettes etc.). Mais la production de matériel individuel se heurte à des difficultés économiques et leur usage à des difficultés pédagogiques presque insurmontables. Echec des valises et des compendiums individuels de calcul. Remplacement par des fiches.

3. Les années 70 voient apparaître des leçons spécifiques sur les grandeurs considérées comme espace mesurables : leçons pour poser les principaux problèmes des grandeurs (masses : François Colmez, angles M. Artigue, M.H. Salin et R. Berthelot, aire : Marie Jeanne Perrin, capacités et autres : N. et G. Brousseau…) Très faible diffusion.

LES MANUELS

Répartition des pages entre les trois secteurs des mathématiques dans 9 ouvrages du XX siècle

Année	Destination	Nbre Pages Nbre exerc.	Arithmétique	Système métrique	Géométrie	Observations Autres
1889	Livre du maître[14] Primaire et sup Chaumeil	154p 1000 pb	66,5 %	17,5 %	16 %	Compléments: racines, problèmes, Règles, déf. quest. Devoirs
	Alix Bazenant CM et Sup	184 p , 416 p avec sup	72,2 %	13,6 %	14,1 %	Même organisation
1921	Livre du maître Jacquemard	303 p 314p	92,6 %	7,4 %	0 %	Plus près d'un ouvrage de maths (Tombeck)
1923	Livre de l'élève CM et sup Brouet	91 p + dev 350 p avec suppléments	51,6 %	31,8 %	16,4 %	Même org. qu'en 1889
1923	Leçons et devoirs (Bresteau)	96 p + pb 254 p	43,75 %	23 %	33,3 %	Problèmes introductifs Plus de règles ni définitions
1945	Cours moyen Joly	305 317 p	81 %	13,5 %	5,5 %	Décompositions didactiques
1987	CM1 Eiler	191 p	50,6	25,3 %	24 %	Activités et rien
1995	Transmath Malaval 5ième	256 p	43 % Numérique	0 %	57 % Géométrique	Soutien
1996	Delord Vinrich 5ième	272 p	50 %	0 %	50 %	Luxuriance des contrats didactiques, bilans

L'EVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES GRANDEURS

LES TENDANCES

La solution des problèmes - mathématiques - a conduit les mathématiciens à distinguer et étudier séparément certains objets et concepts, puis à les abandonner lorsque leur connaissance avait été "éclaircie". Alors l'intérêt s'est consacré longtemps

- sur la construction de l'ensemble des nombres appropriés aux mesures,
- puis sur celles des procédés d'intégration, c'est-à-dire sur les fonctions-mesure
- et sur la structure des espaces susceptibles de supporter ces fonctions.

Au contraire, les questions de métrologie, la définition des "grandeurs" ou de leur "nature", et le choix de leurs unités est sortie du champ des mathématiques. Ainsi la complexité réelle des activités familières liées au mesurage est apparue de plus en plus grande et les connaissances correspondantes n'ont cessé d'être de plus en plus dispersées dans domaines de référence différents.
Or si l'enseignement élémentaire doit préparer au plus vite l'enseignement des notions scientifiques nécessaires aux études ultérieures des mathématiques, il ne peut pas éviter de se référer à des activités

[14] Il faut remarquer que si le livre contient plus d'informations que le livre de l'élèvesil ne s'en distingue ni par le langage, ni par les conceptions, ni par la présentation didactique et pédagogique de sorte qu'il semble que le savoir des maîtres soit un simple complément en prolongement « naturel » des connaissances du primaire. Cette observation justifie la présentce de ce type d'ouvrage dans le tableau.

familières. Ces deux projets ont paru longtemps assez simples à coordonner, assez en tout cas pour pouvoir n'être l'objet d'aucune étude systématique. Pourtant la pression "naturelle" pour préparer de façon aussi précoce que possible les élèves à l'étude des mathématiques actuelles a progressivement fini par faire voler en éclats la culture mathématique élémentaire classique, sans que l'on sache par quoi la remplacer. Voici une esquisse de ce processus.
L'algèbre a pénétré l'enseignement élémentaire jusqu'au cours préparatoire où les premiers calculs sont écrits comme des égalités numériques alors qu'ils sont lues comme des fonctions, ce qui affecte pour longtemps la signification des symboles mathématiques. Dans tous l'enseignement primaire, l'écriture des relations entre mesures a pu longtemps s'accommoder de l'indication des unités. Cette pratique aurait pu se prolonger au niveau supérieur et y trouver ses justifications mathématiques, ainsi que l'a montré Hassler Whitney[15]. Mais il est clair qu'elle aurait beaucoup compliqué l'apprentissage de l'algèbre au collège en mélangeant dans les formules des symboles de variables et les symboles d'unités[16], et par la suite il n'y avait pas trop de raison de maintenir ce genre d'écriture avec des étudiants avancés (la question se discute encore avec certains professeurs de physiques)
Depuis la fin du 19ième siècle, pour aligner les pratiques de l'école primaire sur celles du collège, plusieurs réformes des programmes de mathématiques ont essayé de ménager la place des unités dans ce qui était maintenant lu comme des "formules" :
Si certains ont pu écrire sporadiquement
3 m x 4 m = 12 m^2 en 1924 : 3 x 4 (mxm) = 12 (m^2) ; 1m^2 x 3x4 = 12 ; 100 $m^2 \equiv$ 1 dam^2 .
La pratique majoritaire est la suivante : Une seule unité, celle du résultat, écrite en exposant, l'autre est interprétée comme un scalaire :
dans 7 rangées de 4 arbres il y a 4 arbres x 7 = 7 arbres x 4 = 28 arbres. Evidemment on n'écrira pas 7 rangées x 4 arbres, donc on ne devrait pas écrire m x m x m ! On trouve
"Surface (en cm2) : 5 x 3 = 15 ^{cm2} "[17] avec "surface" pour "aire" et ":" comme pour la division !
Aussi parfois la convention dérape et on ne trouve l'unité qu'à la fin ("=" est en fait une flèche)
"Quantité restante : 180 : 0,90 = 200 verres"[18] "5 x 3 x 8 = 120 cm^3 "[19]
Les élèves doivent penser l'opération dans une seule grandeur, avec des rapports scalaires. Ces pratiques répondent à des objections récurrentes des mathématiciens et préparent la disparition de l'indication des unités : s'il ne peut y en avoir qu'une autant l'omettre. Quand Henri Lebesgue réclame le rejet de l'étude des grandeurs en mathématiques[20], l'affaire est entendue. Il faut attendre 1970 pour que le projet s'accomplisse.
On n'écrira que 3 x 4 = 12 quelle que soit l'unité (1970) . Cette dernière décision laisse à l'élève de traiter implicitement toutes les questions d'unités. Il peut alors observer alors que l'aire d'un même rectangle est aussi bien 28 que 122 (selon qu'il est pavé avec des carrés de côté a ou avec des carrés de côté a/2, ce détail étant invisible dans les formules)

Cette disparition s'est accompagnée de la mise en veilleuse de tous les problèmes classiques dits "d'arithmétique" dans lesquels le calcul des grandeurs servait de terrain de jeu à l'apprentissage des toutes les structures numériques de base.

---

15 Hassler Whitney : The matematics of physical quantities, ANM 1975 (1968)

16 L'usage des équations aux dimensions est ainsi renvoyé aux "utilisateurs" avec la pratique des interprétations multiples des formules où s'échangent les rôles de variables et de paramètres au gré des questions traitées.

17 A. Bresteau "Le calcul au certificat d'études primaires" Gedalge p 100

18 idem p 72

19 id p 181, ou Royer Armand Colin p180

20 "Ce sont les nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques, mais celles ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement"

CONCLUSIONS

Au cours de la scolarité obligatoire et surtout primaire, l'apprentissage des grandeurs était au siècle dernier à la charge presque exclusive du programme de mathématiques. Or plusieurs processus, principalement deux, menacent de rendre plus difficile l'enseignement de ces connaissances. Ce sont : le changement de rattachement épistémologique consécutif à l'évolution des sciences d'une part et l'évolution des technologies métrologiques et de calcul d'autre part.

L'évolution des mathématiques a conduit les mathématiciens à renvoyer la définition et l'étude des grandeurs aux différentes disciplines, car le développement de la modélisation scientifique conduit à la « mathématisation » de nombreux concepts nouveaux, tant dans les sciences humaines et économiques que dans les sciences de la nature, et de n'étudier que la structure des modèles d'espaces utilisés, les fonctions-mesures et leurs structures « numérique » d'arrivée. Concrètement, tout ce qui concerne les propriétés intrinsèques particulières des différentes grandeurs mesurables ou ordonnées, ainsi que les questions de métrologie et d'unités sortent du domaine des mathématiques (Par la suite même la mécanique et la dynamique subiront le même sort que l'astronomie, l'apparition continuelle de connaissances nouvelles importantes explique et justifie ces modifications de programmes). Cependant les autres disciplines interviennent beaucoup plus tard dans la scolarité (où elles se trouvent elles aussi « comprimées »). A l'école primaire ces enseignements restent à la charge des mathématiciens qui risquent de n'évaluer leur importance qu'à l'aune de l'usage qu'ils comptent en faire. Le manque d'intérêt des autres disciplines pour les niveaux où elles n'interviennent pas comme objet explicite d'enseignement n'est pas de nature à favoriser un rapport étroit de ces enseignements avec la science du moment (ou du moins la révision de ces rapports). Les réformes et les pratiques des années 70 et des suivantes illustrent parfaitement cette tendance.

Par la lecture algébrique des objets d'enseignement de l'école primaire, les calculs deviennent des égalités numériques… ce qui oblige l'expression des unités de mesure de disparaître. Par le discrédit jeté sur les exercices et sur les « cours », les connaissances pratiques et théoriques du - et sur le - système décimal de mesures s'amenuisent, malgré l'allongement des études.

L'autre cause de difficultés dans l'apprentissage des grandeurs, est l'évolution technologique des pratiques quotidiennes.

D'abord la mesure de la plupart des grandeurs passe aujourd'hui par des machines automatiques qui épargnent toute action d'identification, de comparaison, de report d'unités, et même de contact avec la matière objet de la mesure etc. Ensuite les résultats des mesures se présentent désormais sous une forme numérique. Ce qui a pour résultat de faire disparaître, ou plutôt de rendre plus difficile la perception et le traitement des renseignements topologiques contenus dans les représentations et les manipulations classiques des grandeurs. La perte de la dimension « analogique » dans la connaissance des grandeurs peut avoir des conséquences importantes pour l'enseignement et la compréhension des mathématiques elles-mêmes. L'exemple de ces difficultés est donné par l'histoire des représentations des paramètres nécessaires au pilotage des hélicoptères. Après être passés au tout numérique, il a fallu se rendre à l'évidence : le pilote doit prendre des décisions rapides pour réguler des variations de valeurs et les représentations analogiques évitent des calculs qui, même simples, sont coûteux en vies humaines dans les moments décisifs. Notre culture endormie par les succès de ses anciens systèmes d'enseignement n'est pas plus sensible aux risques d'accidents didactiques quand elle laisse se glisser dans la langue le même mot pour désigner le centième et la centaine d'une unité de monnaie. L'usage n'est pas menacé, mais l'enseignement de la numération et du système décimal oui, et directement.

Ensuite le développement et la diffusion universelle des moyens de calcul électronique fait complètement disparaître du milieu des élèves les calculs que l'on essaie de leur enseigner comme base de leur formation intellectuelle et « pratique » ! Les connaissances nécessaires à la domination des nouvelles tâches ne sont pas « concrètement » connues. On ne sait même pas sur quelle base les chercher. A fortiori les étapes de leur genèse ! Force est de constater que la division est devenue difficile à enseigner, en partie à cause du rétrécissement de son champ d'application dans les mesures, en partie à cause du retard pris dans l'apprentissage de la soustraction et dans la pratique des tables de multiplication (retards dû à diverses causes, pédagogiques, politiques, sociales, culturelles). Ces retards restreignent le temps de l'entraînement et de l'usage à l'âge où les élèves se plaisent à apprendre ce qu'on leur enseigne, si la culture leur dit que l'étude est le moyen de grandir…

Il est temps de coordonner nos recherches en macro-didactique des grandeurs et de leur mesure :
Recherches expérimentales pour mettre en évidence les faits, pour vérifier les causes,
Et surtout recherches d'ingénierie pour imaginer des réponses possibles.
Mais il est aussi urgent de développer nos connaissances théoriques et scientifiques dans ce domaine. Les nécessités qui président à l'agrégation d'apprentissages et d'enseignement sont trop méconnues dans une approche qui favorise excessivement la différentiation et l'émiettement aussi bien du savoir à enseigner que de la population des élèves.

5

OBSERVATIONS PERSPECTIVES ET CONCLUSION

OBSERVATIONS PREALABLES

a) l'enseignement rampant et précoce de l'algèbre est inéluctable avec des professeurs qui ne connaissent que les mathématiques didactiques des mathématiciens actuels et pas de didactique et qui restent entièrement soumis à leurs opinions spontanées et à leurs modes.
b) la perte de pratique et de motivation effective (culturelle) au calcul numérique humain, écrit ou mental est la conséquence inéluctable du développement des calculettes
c) l'usage généralisé des affichages numériques fait disparaître la pratique des relations topologiques au profit des numériques ce qui a des conséquences importantes et négatives sur l'apprentissage et la connaissance de l'analyse et de la topologie
d) la disparition de la vigilance scolaire sur les concepts mathématiques de base, conjuguée avec des injonctions pédagogiques peu soucieuses de la qualité objective de la pensée et de son expression chez les élèves, laisse la porte ouverte aux usages populaires les plus confus

PHENOMENES

1. L'introduction du traitement automatique de l'information et du calcul, et le développement de l'algèbre au sens large ont profondément modifié les pratiques mathématiques de toute la société. Ils devraient constituer une partie essentielle des mathématiques de la scolarité obligatoire. Mais l'influence de cette évolution sur l'enseignement dans la scolarité obligatoire n'est ni maîtrisée, ni même conçue de façon rationnelle: Seule son importance est reconnue.

2. Mais des connaissances mathématiques spécifiques, y compris certaines qui sont sorties des préoccupations actuelles des mathématiciens, restent indispensables au développement et à la formation des élèves, notamment ceux de la scolarité obligatoire. Elles forment les « mathématiques didactiques ». Leur contenu et leur signification doivent être l'objet d'études et de négociations culturelles et sociales appuyées sur une connaissance scientifique du fonctionnement des systèmes didactiques. En particulier une partie de l'étude des grandeurs et de leur mesure ne peut pas être pratiquement exclue de l'école primaire sous prétexte que cette étude ne fait plus partie des mathématiques actuelles. Le renvoi de leur étude aux autres disciplines pourrait être souhaité mais il se heurte à des difficultés didactiques bien plus grandes. Le point de départ se trouve dans les programmes de mathématiques eux-mêmes.

3. Pour la société, l'étude des mathématiques dans la scolarité obligatoire reste en bonne partie celle de « la grandeur »

Quelques mises au point dont voici l'inventaire seraient suffisantes et éviteraient de rompre une définition multimillénaire.

- Distinction entre la grandeur (les structures) et les grandeurs (physiques, économiques, etc.)
- Intégration de la grandeur des grandeurs (ordres de grandeur, rareté dans une distribution…)
- Intégration de la grandeur discrète : « cardinal d'un ensemble » *argumentation*
- Intégration des grandeurs ordonnées non mesurables : étude de leurs structures
- Intégration des « grandeurs » discrètes finies : probabilités, validité (logiques modales)
- Intégration de la classification et des hiérarchies non ordonnées (logique booléenne)

On peut y gagner beaucoup de clarification dans les rapports avec le public.

Le partage entre

- l’étude mathématique : celle des structures de départ et d’arrivée (divers espaces, intégration, structures numériques et autres,
- la conception des grandeurs pertinentes à une étude donnée,
- et la métrologie (méthodes de mesurage, systèmes d’unités)

est affaire d’histoire des sciences (la mesure d’Hausdorff et son application aux fractals ne fait pas encore partie de la physique par ex.)
Mais dans la scolarité obligatoire les professeurs de mathématiques ne peuvent pas s’aligner sur les pratiques des mathématiciens :

4. Le plus important serait donc l’étude à moyen terme d’un programme de « mathématiques didactiques » prenant en compte à la fois les programmes de l’école primaire et leurs « conséquences » aux niveaux supérieurs – et pas seulement l’inverse (comme s’il suffisait de savoir pour pouvoir…) envisagé dans la perspective d’une mise en œuvre progressive et concerté. Le plus urgent serait de commencer les études nécessaires et la ms en œuvre d’un véritable programme de recherches en didactique des mathématiques.

OBSTACLES

L’idéologie de la refondation totale de la société et de la culture par le moyen de l’école est une illusion totale et une utopie dangereuse. Le négationnisme à l’égard de la transposition et des problèmes de didactique aussi.

L’influence des dérives « naturelles », en tout cas extrascolaires, dans les usages des mathématiques est devenue aussi importante que celle de la transposition volontaire.

L’acceptation de ce compromis transpositif est probablement impossible sans un consentement de la communauté des mathématiciens et un tel consentement paraît impossible à obtenir dans les conditions actuelles

L’idée que puisqu’il existe une culture littéraire et une culture scientifique (?) il existerait des élèves à l’esprit scientifique et des élèves « à l’esprit littéraire » est une foutaise socio-médiatique, une de ces idées reçues sans discussion comme des évidences par des intellectuels peu soucieux de précision hors de leur domaine. Dans la grande majorité de la population les deux formes de connaissances sont fortement corrélées. La corrélation ne devient négative que par l’effet des formes d’examens utilisés dans les sélections.

Sur un échantillon de plus de 5000 titulaires de diverses licences candidats à l'IUFM, j'ai observé une très forte corrélation entre les résultats en français et en mathématiques.
Par contre en étudiant les résultats aux mêmes épreuves, mais seulement sur les quelque 400 élèves retenus, j'ai observé une bonne corrélation négative. C'est sur la base de cette corrélation que les recrutés fondent leur opinion au sujet de soi disant littéraires et scientifiques, et qu'ils l'imposent par leur influence à toute la société
Or il ne s'agit que d'un effet mécanique du mode de détermination des reçus.
Considérons le nuage des élèves placés dans le plan cartésien suivant leurs notes en français et en mathématiques a en gros la forme d'une ellipse allongée,
La note décisive est obtenue en faisant la somme des deux notes. La droite qui discrimine les reçus et les collés est donc parallèle à la deuxième bissectrice, et elle découpe dans ce nuage une lunule allongée le long de cette droite, la corrélation négative est d'autant plus forte que la sélection est plus sévère.
Si on recrutait les élèves qui ont une note supérieure à un seuil donné, indépendamment, dans chaque discipline, on supprimerait cet effet imbécile.

Qu'en est-il pour les illettrés. Mon analyse ne fonctionne par pour eux. Il y a même des raisons de penser que suivant la cause de l'illettrisme, le rapport entre les compétences linguistiques et les compétences mathématiques peut varier profondément.

Ce qui s'est produit depuis les années 70 : les structures d'abord puis la géométrie ont absorbé des durées d'enseignement et des ressources didactiques considérables au détriment de la connaissance des grandeurs

A l'école primaire par exemple, le professeur doit enseigner des sujets qui sont indispensables à la formation des élèves et des citoyens, mais qui sortis du champ des préoccupations des mathématiques sans pour autant rentrer dans celle des autres disciplines (pour autant qu'elles soient représentées, et même si elles le sont elles ne se chargent plus de leur partie mathématique.

L'ANALOGIQUE ET LE NUMERIQUE

L'histoire ne revient pas en arrière. Il est inutile de proposer le retour de l'enseignement des grandeurs tel qu'il a pu se donner depuis un siècle et demi. Il faut proposer des solutions nouvelles ou qui ont l'air nouvelles. L'introduction précoce de l'algèbre doit être étudiée sérieusement pour améliorer la proximité culturelle des professeurs et des élèves et pour limiter les effets de l'ignorance ou de l'enthousiasme excessif. Les propriétés topologiques et d'ordre des grandeurs mesurables pourraient être regroupées dans un chapitre centré sur les représentations analogiques des nombres et des calculs. Il s'agirait d'inventorier les moyens de représenter les nombres devenus plus familiers, par des grandeurs, et les calculs, par des phénomènes (physiques ou autres)… Rafraîchissant no ? comme disait Lucky Luke de la tequila.

BIBLIOGRAPHIE

KAZIN, M. et KOTCHARIAN, M. Dimensionnelle (analyse et similitude) Encyclopaedia universalis 7. 497b
REVUZ, H, Intégration et mesure, Encyclopaedia universalis

Henri LEBESGUE : La mesure des grandeurs, l'enseignement mathématique, Genève 1931

LICHNEROWICS, A., « Géométrie et relativité » in Development of Mathematics 1900-1950, Jean Paul Pier, ed. Birkhäuser

Nicolas ROUCHE, Le sens de la mesure Didier Hatier1992

ROY, M. F., « Géométrie algébrique réelle » in Development of Mathematics 1950-2000 Jean Paul Pier ed. Birkhäuser

Jean DHOMBRES, nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire, CEDIC/ Fernand Nathan 1978

François COLMEZ, « place et rôle des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques de l'Ecole Primaire au Lycée » Contribution aux journées de la commission Inter-IREM « premier Cycle » Juin 95

Marc BARBUT et B. MONJARDET, Ordre et classification, Algèbre combinatoire, 1 et 2, Librairie Hachette Paris 1970

Emmanuel LIZCANO , Imaginario colectivo y creacion matemàtica », gedisa ed 1993

WHITNEY HASSLER, 1968, « The Mathematics of Physical Quantities, Part II : Quantities srtuctures and dimensional analysis, The American Monthly »

GUITEL Geneviève, « Histoire Comparée des Numérations écrites » flammarion 1975

BOULEAU, N., Philosophies des mathématiques et de la modélisation du cherdcheur à l'ingénieur, L'harmattan 1999
CHEVALLARD Yves, 1999. « L'analyse des pratiques enseignantes en Théotie Anthropologique du didactique », RdM 19(2), 221-266.

BESSOT, A. et EBERHARD, M. : « Une approche didactique des problèmes de la mesure », in Recherches en Didactique des mathématiques, vol. 4.3., Grenoble, La pensée Sauvage 1983,

Nadine BROUSSEAU : « La mesure au CM1 », IREM de Bordeaux, 1987

BROUSSEAU N. et G. :
- Rationnels et Décimaux, IREM de Bordeaux, 1986
- Le poids d'un récipient ou l'étude par des élèves de problèmes de mesurage », en Grand N, n°50, IREM de Grenoble, 1992, pp. 65-87

BROUSSEAU G. « Les univers de la mesure »

Marie Jeanne PERRIN
DOUADY, R., Jeux de cadres et dialectique outil objet, in RdM, vol. 7.2. Grenoble, la Pensée Sauvage, 1986
DOUADY, R, et PERRIN-GLORIAN, M.-J., « Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane » , Educational Studies in Mathematics Vol. 20.n°4, p. 387-424
Rapports « Géométrie » et « Calcul » de la commission KAHANE

TABLE DES MATIERES