1972 - 4

DIVISION EUCLIDIENNE

A - ETUDE THEORIQUE

La plupart des gens comprennent l'énoncé suivant : "Si on divise 20 par 3, le quotient est 6 et il reste 2".

Nous allons étudier la théorie de ce petit problème et la signification exacte de cette situation.

I - PROBLEME

- Soit b un entier naturel non nul.

Désignons par m_b l'ensemble des multiples de b

$$m_b = \{0 \times b,\ 1 \times b,\ 2 \times b,\ 3 \times b,\ \ldots\ p \times b \ldots\}$$

- Soit a un entier naturel.

Le problème de la division euclidienne de a par b est synonyme du problème suivant : comparons a aux multiples de b.

II - ANALYSE

Il est immédiat de constater que deux cas peuvent se présenter :

1°) - $a \in m_b$ (a "coïncide" avec un multiple de b)

Il existe un certain entier q tel que $a = bq$

On dit que : a est un multiple de b
a est divisible par b
b divise a
b est un diviseur de a

q est le quotient exact de a par b

On écrit : $q = a : b$

2°) - $a \notin m_b$ (a "ne coïncide pas" avec un multiple de b)

Dans ce cas a est strictement compris entre deux multiples consécutifs de b.

Donc il existe un certain entier q tel que :

$$bq < a < b(q+1)$$

On dit que q est le quotient à une unité pris par défaut de a par b. (Ou quotient entier de a par b)

Exemple : $b = 3$ $a = 20$

$3 \times 6 < 20 < 3 \times 7$ $\boxed{q = 6}$

Cahier IREM n. 10 juin 1972

.../...

On note quelquefois le quotient entier q par $q = a \div b$

- On peut résumer les deux cas précédents :

La division euclidienne de a par b revient à chercher le nombre entier q tel que :

$$\boxed{bq \leqslant a < b\,(q+1)}$$

On peut dire que q est le plus grand nombre entier qui multiplié par b donne un nombre inférieur ou égal à a.

III - CHANGEMENT DE FORMULATION

Posons $r = a - bq$

$$bq \leqslant a < b(q+1) \Longleftrightarrow bq \leqslant a < bq + b \Longleftrightarrow 0 \leqslant a - bq < b \Longleftrightarrow 0 \leqslant r < b$$

La division euclidienne de a par b revient à chercher deux nombres q(quotient entier) et r(reste) tels que :

$$\boxed{a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < b}$$

IV - REMARQUE

Si $r = 0$ q est le quotient exact

Etudions la relation suivante dans N^* (les naturels non nuls)

$$b \,\mathcal{R}\, a \Longleftrightarrow b \text{ divise exactement } a$$

Exemple : $2 \,\mathcal{R}\, 8$, $4 \,\mathcal{R}\, 20$, $5 \,\mathcal{R}\, 5$, etc....

On constate :

1°) $\forall\, x \in N^*$, $x \,\mathcal{R}\, x$

C'est-à-dire que quelque soit le naturel x non nul, x divise x (en effet, q est égal à 1)

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

2°) $\begin{array}{l}\forall\, x \in N^* \\ \forall\, y \in N^*\end{array}$ $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x \Longrightarrow x = y$

En effet :

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x \Longrightarrow \begin{array}{ll}(\exists\, q \in \mathbb{N} & y = qx\,) \\ (\exists\, q' \in \mathbb{N} & x = q'y)\end{array} \Longrightarrow y = qq'\,y$$

donc $qq' = 1 \Longrightarrow q = 1$ et $q' = 1 \Longrightarrow x = y$

.../...

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique

3°) $\forall x \in N^*$ $\quad x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Longrightarrow x \mathcal{R} z$
$\forall y \in N^*$
$\forall z \in N^*$

C'est-à-dire : si x divise y et y divise z alors x divise z

en effet : $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Longrightarrow \left(\exists q \quad y = q\,x \right) \Longrightarrow z = q'(qx) = (q'q)\,x$
$\left(\exists q' \quad z = q'\,y \right)$

donc x divise z.

On dit que la relation $\mathcal{R}$ est transitive

Les trois propriétés de cette relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble N^* nous permet de dire que cette relation est une relation d'ordre.

*****
***
*

B - LECONS AU C.M. : LA COURSE A 20

I - REGLE DU JEU : LA COURSE A 20

1°) - PHASE COLLECTIVE : 3 minutes

La maîtresse explique la règle : On joue à 2. Chaque enfant doit ajouter 1 ou 2 au nombre énoncé par l'adversaire. Celui qui dit 20 a gagné.

La maîtresse commence le jeu au tableau noir avec un enfant. Les nombres énoncés sont écrits dans deux colonnes (comme l'indique le croquis). Puis très vite, c'est un autre enfant qui continue le jeu (à la place de la maîtresse).

	1
3	
	5
6	

Remarque : Cette phase dure environ 3 minutes.

2°) - JEU A 2 : 10 minutes

Les enfants sont par groupes de 2 et jouent plusieurs parties. Ils marquent sur une feuille, dans 2 colonnes, les nombres qu'ils énoncent (comme en 1°)

Remarque : Au cours de cette phase, on a pu observer que beaucoup d'enfants avaient déjà fait des découvertes intéressantes : ils avaient constaté notamment que celui qui écrivait 17 gagnait sûrement.

Cette phase doit durer environ 10 minutes.

II - JEU PAR EQUIPE

1°) - JEU DU BERET (appelé ainsi par analogie avec le jeu du béret que beaucoup d'enfants connaissent)

équipe I	équipe II
a	f
c	a
e	c
b	d
d	c
f	b

Les enfants sont partagés en deux équipes I et II (qui se font face).
Ils sont désignés, dans chaque équipe, par des lettres a, b, c..(Ces lettres sont inscrites sur des papiers préparés à l'avance par la maîtresse, les enfants les ont choisis au hasard).
Le jeu commence : lorsque la maîtresse appelle : "b" par exemple, les enfants de chacune des deux équipes portant cette lettre, vont jouer au tableau. L'équipe qui gagne marque 1 point.
Le jeu recommence plusieurs fois, avec les enfants portant les lettres a, c, d etc...

Remarque : Les enfants, à ce moment là, se rendent vite compte de la nécessité de se concerter, de discuter à l'intérieur d'une même équipe pour savoir comment devra jouer son concurent.

Cette partie peut durer de 17 à 19 minutes environ.

.../...

Observations : A ce moment là, les règles du jeu se sont précisées : on a constaté, en effet, que l'orsqu'un enfant écrivait 17, son équipe savait qu'elle allait gagner, et inversement.

2°) - JEU DE LA DECOUVERTE : Phase collective : 20 minutes à 25 minutes

On arrête le jeu du béret.

La maîtresse demande alors aux enfants d'énoncer des propositions. Ce sont les découvertes qu'ils ont faites et qui leur ont permis, de gagner.

Ces découvertes énoncées, alternativement par l'équipe A puis par l'équipe B, sont inscrites sur le tableau par la maîtresse (suivant la disposition ci-dessous) et vérifiées aussitôt par l'autre équipe. A ce moment là elles seront acceptées ou rejetées. Si elles sont rejetées, elles seront conservées sur le tableau.

Découvertes proposées		Découvertes vérifiées et acceptées	Score	
Equipe A	Equipe B		A	B

Pour chaque proposition énoncée, l'enfant devra venir vérifier, avec un adversaire, qu'elle est vraie ou fausse.

Pour donner plus d'intêret au jeu, on peut adopter la règle suivante :

- toute proposition énoncée et acceptée par la classe vaut 1 point
- toute proposition prouvée fausse donne 3 points à l'équipe qui a prouvé qu'elle l'était.

Remarque : Si le jeu de la découverte stagne, (les enfants ne trouvent plus de propositions à énoncer) on refait le jeu du béret.

Observations : Très vite, les propositions suivantes ont été faites :

- si j'écris 17, je suis sûr de gagner
- si j'écris 14 aussi je suis sûr de gagner.

Puis les découvertes ont été beaucoup moins importantes :

Exemple : Si je dis 16, l'autre peut dire 17 et il gagne.
Si je dis 18, je perds etc...

Alors on a arrêté le jeu de la découverte et repris celui du béret. Au bout de deux parties, les enfants ont découvert qu'en disant 11, puis 14 puis 17 ils gagnaient. (Discussion très serrée à propos de 11 : un enfant qui avait écrit 11 au cours du 1er jeu à 2, avait perdu). On lui montre que s'il sait jouer il doit gagner en disant 11. S'il ne sait pas jouer, il est évident qu'il peut perdre. Ces preuves sont toujours apportées en rejouant (à partir de 11 par exemple).

Les enfants au bout d'une heure ont découvert que pour gagner il fallait dire 2, 5, 8, 11, 14, 17.

III - SUITE DE LA COURSE A 20

1°) - COURSE A 25, 29, 30, SANS CHANGER LE "PAS"

a) - Course à 25

Les enfants reprennent le jeu 2 par 2 (comme pour la course à 20) en notant chaque fois, dans 2 colonnes, les nombres qu'ils énoncent. (Ils jouent plusieurs parties).

La maîtresse annonce très vite le jeu par équipe (jeu du béret) pour que les enfants aient l'idée -mais surtout voient l'intérêt- de faire une liste des nombres par lesquels il faut commencer pour que leur équipe gagne.

Remarque : Cinq minutes après le commencement de la partie à 2, la majorité des enfants a demandé que l'on arrête le jeu à 2 parce qu'ils avaient trouvé "le truc"

- Le jeu du béret a commencé : dispute entre les 2 enfants qui sont venus jouer car tous les deux voulaient commencer et mettre 1. (La classe, en majorité, a suggéré que l'on tire à pile ou face pour savoir qui commencerait).

Très vite, la maîtresse a proposé le jeu de la découverte (comme pour la course à 20). Un élève a énoncé aussitôt :

(1) "il suffit de mettre 1 et après d'aller de 3 en 3". Après une phase de vérification, toute la classe a accepté la proposition.

b) - Course à 29

On a procédé de la même manière que pour la course à 25.

Après deux parties de jeu à deux, l'élève qui avait énoncé la proposition (1) au cours de la course à 25, a dit :

"au lieu de commencer par 1, il faut commencer par 2 et aller de 3 en 3"

Vérification par la classe. Proposition acceptée.

c) - Course à 30

Même déroulement que précédemment. Les enfants ont trouvé très vite qu'il fallait laisser commencer l'adversaire pour gagner et mettre ensuite 3.

Remarque : La liste des nombres qu'il faut dire dans les courses à 20, à 25, à 29 pour gagner, a été laissée sur le tableau.

.../...

<u>On avait alors</u> :

<u>Course à 20</u> : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20
<u>Course à 25</u> : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25
<u>Course à 29</u> : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29
<u>Course à 30</u> : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

Les enfants ont remarqué que la liste des nombres de la course à 20 était la même que celle de la course à 29. Ils ont déduit aussitôt que ce serait la même pour la course à 26, 23, 20 etc..

Un enfant a dit alors que la liste des nombres de la course à 25 serait aussi la même que celle de la course à 28, 31, 22 etc... et a apporté à la maîtresse le tableau suivant :

course à 20	course à 28 à course 25	course à 26 course à 29	course à 27 course à 30
2	1	2	3
5	4	5	6
8	7	8	9
11	10	11	12
14	13	14	15
17	16	17	18
20	19	20	21
~~[illegible]~~	22	23	24
	25	26	27
	28	29	30
	~~[illegible]~~		

<u>Remarque</u> : Cette phase s'est déroulée au cours de deux leçons.-

2°) - <u>MEME JEU : COURSE A 30, 35</u>, 40 etc..; EN CHANGEANT LE PAS

2°) - MEME JEU : COURSE A 30, 35, 40 etc... EN CHANGEANT LE PAS

- La leçon s'est déroulée comme au (I) mais avec des nombres plus grands : 29, 35, 50...

Règle : On peut dire 1, 2, 3, 4 en commençant.

- Les découvertes ont été très rapides et la règle a été trouvée très vite chaque fois.

3°) - UTILISATION DES MACHINES

L'expérience est en cours, elle sera rédigée ultérieurement.