atelier
de pédagogie

maîtres du cycle élémentaire
jeudi 10 mars 1977; 15 h 55 - 17 h 25

TELEVISION

activités mathématiques

ALGORITHME DE LA DIVISION

Ces leçons font partie d'une suite de leçons qui a pour objet d'amener les enfants à construire par eux-mêmes un algorithme pour la division euclidienne, c'est-à-dire un procédé de calcul du quotient et du reste, valable pour n'importe quel dividende et n'importe quel diviseur.

Nous avons voulu obtenir cette construction comme résultat d'une activité mathématique et non comme résultat d'un apprentissage.

Leçons précédentes :

Les leçons d'introduction, qui favorisaient la découverte et la démonstration d'une suite de théorèmes, ont été décrites dans l'émission « **qui dira vingt** » et dans sa fiche d'accompagnement.

Dans ces conditions, où le sens de l'opération n'était pas conforme aux apprentissages antérieurs, on y voit les enfants établir les résultats suivants :

1re LEÇON

Pour pouvoir dire 20 (en ajoutant 1 ou 2 à ce que dit la partenaire) il faut dire successivement 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

2e LEÇON

« Qui dira 25, 29, 30 ? » Les enfants classent tous les nombres suivant la manière dont il faut commencer la partie (ce sont les 3 classes suivant le reste de la division par 3 : 0, 1, 2 ou classe résiduelle modulo 3).

3e LEÇON

Dans la course à 47 (en ajoutant 1, 2, 3, 4) les enfants construisent les classes de nombres, suivant leur reste par la division par 5.

4e LEÇON

Course à 58 (en ajoutant 1, 2, 3, 4 : « pas » de 5 ; puis en ajoutant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 : « pas » de 9. Les enfants possèdent alors une méthode lente mais générale pour calculer le nombre de départ de la course, c'est-à-dire le reste de la division. Cette méthode consiste à soustraire du but (dividende), le « pas » (diviseur) successivement autant de fois qu'il est nécessaire.

Exemple : pour atteindre 428 avec un « pas » de 27 (en ajoutant 1, 2, 3, 4, 5...) on doit commencer par 23. On le trouve en soustrayant 15 fois 27 de 428.

Séquences filmées

Les séquences qui figurent dans l'émission ont été extraites des 5e, 6e et 7e leçons de la suite.

Les enfants vont voir dans différents cas où l'on cherche un reste ou un quotient, qu'il faut faire une longue suite de soustractions ; ils vont inventer une méthode plus rapide pour les effectuer.

5e LEÇON

Recherche du quotient, découverte des petits groupements.

A - La classe est partagée en 5 équipes : 4 vont calculer pour prévoir le quotient que la 5e va trouver par manipulation. Cette équipe dispose de plusieurs feuilles quadrillées comportant au total 2 664 carreaux. Elle doit constituer par collage et découpage un panneau de 21 carreaux par rangée. Elle comptera combien de rangées complètes elle a pu faire.

B - Déroulement de la leçon :

1 - La maîtresse expose la situation.

2 - Les enfants travaillent. Chaque équipe ne doit afficher ses prévisions que lorsque tous ses membres sont d'accord.

3 - Comparaison des prévisions avec les résultats de l'équipe 1.

4 - Comparaison des méthodes de calcul employées pour les prévisions. Les enfants déclarent meilleure et plus facile la méthode suivante.

Répertoire	**Carreaux**	**Rangées**
21 × 100 = 2 100	2 664	
21 × 10 = 210	— 2 100	100
	0 564	+
	— 210	10
	354	+
	— 210	10
	154	+
	— 105	5
	39	+
	— 21	1
	18	126

C - Remarques

1 - Les décisions sont prises en équipe, mais chaque enfant recherche individuellement le résultat avant d'en discuter avec ses camarades.

2 - La nécessité d'enlever d'un seul coup plusieurs fois 21 est apparue d'emblée dans toutes les équipes. Ces groupements varient d'une équipe à l'autre : 2 équipes ont regroupé en multipliant le diviseur par une puissance de 2 sans qu'on sache pourquoi, 2 équipes ont utilisé la multiplication par 100.

Le mot répertoire a été emprunté à un vocabulaire bien connu dans cette classe pour désigner des égalités familières sues par cœur, utilisées dans un calcul ou dans un raisonnement.

3 - La maîtresse se garde bien, malgré le choix d'une méthode par les élèves, de déclarer qu'elle est meilleure et de demander aux enfants de l'appliquer. La pluralité des pratiques est acceptée, l'expérience seule devant faitre abandonner les moins bonnes.

6ᵉ LEÇON

Recherches de procédés plus efficaces pour trouver le quotient.

A - La maîtresse dit : « *Pensez-vous que les méthodes que vous avez inventées, hier, sont bonnes pour de grands nombres ? On va voir, proposez de grands nombres...*

Vous avez donc un immense panneau avec 588 654 801 carreaux que nous allons mettre par rangées de 831 431 carreaux... »

La situation proposée est la même que la veille mais les nombres sont beaucoup plus grands et il n'est pas question de faire une vérification expérimentale.

Les nombres ont été choisis grands de façon à rendre « plus payantes » les stratégies économiques, mais en contrepartie, on a fourni aux enfants des résultats de calculs auxiliaires pour favoriser le recours à des produits du diviseur par la plus grande puissance de 10 et par le plus grand entier inférieur à 10 possibles. Habituellement, le répertoire est demandé et proposé par les enfants.

B - Déroulement de la leçon

1 - La maîtresse expose la situation : « *Vous allez chercher le nombre de rangées de la manière la plus sûre, la plus simple et la plus courte* ».

2 - Les enfants cherchent individuellement à l'intérieur des équipes, discutent leurs méthodes, affichent au tableau leur résultat.

3 - Comparaison des résultats, correction des erreurs.

4 - Comparaison des méthodes. Les enfants comparent les méthodes en comptant le nombre de « coups », c'est-à-dire le nombre de multiplications tentées suivies ou non d'une soustraction.

C - Remarques

1 - Tout le monde n'applique pas du premier coup la méthode jugée bonne la veille.

2 - La nécessité de grouper par plus de 100 apparaît, malgré une mauvaise disposition naturelle, le répertoire (les enfants auraient dû l'avoir sous les yeux) est de plus en plus utilisé et cela incite les enfants à chercher le nombre « le plus proche ».

3 - La pratique la plus efficace apparaît dans la phase de discussion, mais n'est pas érigée en méthode.

4 - Dans ce processus, il faut éviter que les progrès dépendent trop des remarques formulées par quelques enfants sur les stratégies et que l'application de la règle convenue prenne le pas sur l'expérience personnelle. Il faut que les enfants calculent suffisamment sans toutefois qu'ils puissent ériger en mécanisme leur pratique momentanée.

7ᵉ LEÇON

Formulation d'une méthode générale du calcul de la division.

A - C'est un jeu. Il s'agit de prévoir avant de faire une division donnée (18 130 carreaux, 53 par rangée) en combien de « coups » au plus on trouvera le quotient (ou le reste).

Gagnent tous ceux qui ont effectué l'opération dans le nombre de coups prévus. Le champion étant celui qui l'a effectuée dans le moins de « coups » possibles.

B - Déroulement de la leçon

1 - La maîtresse explique les règles du jeu.

2 - Les paris s'engagent.

3 - Les enfants calculent.

4 - Comparaison des résultats de chaque équipe, avec le pari lancé au début du jeu.

5 - Discussion sur les méthodes de calcul et l'ordre de grandeur du quotient.

Résultats du jeu

	coups prévus	coups réalisés	
équipe 1 ..	3	3	équipe gagnante
équipe 2 ..	4	3	a amélioré son pari
équipe 3 ..	3	—	n'a pas trouvé le résultat
équipe 4 ..	4	3	a amélioré son pari
équipe 5 ..	3	4	n'a pas tenu son pari

C - Remarques

1 - Les enfants ont d'abord proposé « le nombre de coups » par référence à ce qu'ils avaient fait dans les leçons précédentes. C'est seulement dans la leçon suivante qu'ils sauront évaluer le nombre de chiffres du quotient et par conséquent son ordre de grandeur. Dans des conditions normales, ces résultats auraient pu être obtenus au cours de cette 7ᵉ leçon qui s'est déroulée, pour des raisons techniques, dans la même journée que la 6ᵉ.

2 - Dans leurs calculs, les enfants n'appliquent pas de techniques clairement formulées et sont conduits à se reposer à chaque « coup » la question : « *combien de fois puis-je enlever le diviseur ?* ». Certains, après avoir appliqué implicitement la bonne méthode pour de grands nombres, régressent pour la recherche des unités du quotient à la méthode primitive de soustractions successives du diviseur.

Suite de ces activités :

8ᵉ LEÇON

Ordre de grandeur du quotient : nombre de chiffres. La méthode de calcul la plus efficace devient de plus en plus familière.

9ᵉ ET DERNIERE LEÇON

Disposition des calculs. Les enfants disposent l'addition des parties du quotient trouvées successivement au-dessus du dividende.

Disposition à la 7ᵉ leçon

$53 \times 300 = 15\,900$	18 130 — 15 900	300
$53 \times 40 = 2\,120$	2 230 — 2 120	+ 40
$53 \times 2 = 106$	110 — 106	+ 2
	4	342

Disposition de la 9ᵉ leçon

	342 2 40 300	addition
$53 \times 300 = 15\,900$	18 130 – 15 900	
$53 \times 40 = 2\,120$	2 230 – 2 120	
$53 \times 2 = 106$	110 – 106	
	4	

En résumé, pour effectuer une division les enfants procèdent de la manière suivante : *cf.* fiche d'accompagnement de l'émission : « **Qui dira vingt ?** ».

La division - Disposition des calculs

Soit à effectuer la division 961 093 : 563. Le dividende est disposé d'abord comme l'indique la figure 1 (sous le poteau de rugby).

563	961 093	(fig. 1)

Le quotient sera disposé entre les poteaux au-dessus de la barre, les restes successifs sous le dividende ; les multiplications auxiliaires se feront à gauche des poteaux. La partie droite sera utilisée pour les divisions dans les décimaux. On soustrait du dividende un multiple du diviseur aussi grand que possible et « le plus à gauche possible » (mais ce n'est pas obligatoire au début de l'apprentissage). Le résultat, reste intermédiaire, s'écrit au-dessous du dividende (fig. 2).

	1	
563	961 093 -563 000	(fig. 2)
	398 093	

Le chiffre du quotient est placé au-dessus du chiffre des unités du multiple que l'on soustrait (ici 1 au-dessous du 3, unité de mille). On peut voir dès maintenant que le quotient aura 4 chiffres.

On tente de la même manière de trouver un multiple de 100 et du diviseur, inférieur au premier reste intermédiaire, le plus grand si possible. On le calcule à gauche en s'y prenant à plusieurs fois s'il le faut (fig. 3).

Cette disposition présente certains avantages :

— Les calculs intermédiaires figurent explicitement et la détection des erreurs est plus facile ;

— Les produits partiels ne sont calculés qu'une fois ;

— Les zéros intercalés causent moins d'erreurs ;

— Le nombre de chiffres du quotient est inscrit dans la disposition dès le départ ;

— Les tâtonnements légitimes ne donnent lieu à aucune rature traumatisante ;

	17
563 563 × 6 = 3 378 563 × 7 = 3 941 563 × 8 = 4 504	961 093 -563 000
	398 093 -394 100
(fig. 3)	003 993

Le chiffre correspondant du quotient 7, se place au-dessus du chiffre des unités de 3 941.

Et ainsi de suite...

Le même produit partiel peut servir plusieurs fois (fig. 4).

	1 707	
563 563 × 6 = 3 378 563 × 7 = 3 941 563 × 8 = 4 504	961 093 -563 000	
	398 093 -394 100	(fig. 4).
	003 993 - 3 941	
	000 052	

On met un zéro dans les colonnes du quotient où aucun chiffre n'apparaît.

Le quotient est 1 707 et le reste 52.

Si on ne trouve pas du premier coup le plus grand multiple, on peut trouver des quotients partiels dont on fait la somme (fig. 5).

	1 707	
563 563 × 6 = 3 378	101 1 606	
	961 093 -563 000	
	398 093 -337 800	
	060 293 - 56 300	
	03 993 - 3 378	(fig. 5).
	0 615 - 563	
	052	

— L'apprentissage est plus souple : en effet, la technique optimum peut être obtenue progressivement sans mécanisation.

Une disposition analogue est adoptée dans d'autres pays européens (les Pays-Bas, par exemple).

On trouvera dans la brochure éditée par l'A. P. M. E. P. (29, rue d'Ulm, 75230 Paris, Cédex 05) : *Mathématique à l'école élémentaire*, des compléments sur les processus de mathématisation et des exemples de leçons pris à d'autres niveaux.

Fiche établie par Eliette Faucon et Guy Brousseau.