C.E - C.M.
Enfants de 7 à 11 ans

DIVISION EUCLIDIENNE DANS LES ENTIERS NATURELS (1)

****

1 - BUTS DE LA SERIE DE LECONS

Nous voulons que les enfants élaborent progressivement un algorithme de la division euclidienne grâce à une série de réflexions et de découvertes, suivant le processus de mathématisation que nous utilisons habituellement.

- Ces découvertes doivent surgir à l'occasion de jeux de stratégie dans lesquels elles sont utiles : "la course à n"

- Elles doivent être formulées et utilisées comme des théorèmes au cours d'un "jeu de la découverte" permanent.

Nous allons exposer en détail l'utilisation pédagogique de ces deux jeux.

La reconnaissance de situations isomorphes dans lesquelles l'algorithme élaboré est utilisable -ce que les maîtres appellent le sens de la division-ne sera pas évoquée ici, mais elle doit évidemment être étudiée.

Les jeux ne supposent aucune technique mathématique préalable sinon celles du C.P. sur les nombres entiers et sur l'addition

..U DE LA COURSE A n

REGLE DU JEU

Soient n et p deux entiers positifs donnés. p est plus petit que n.

Deux adversaires, A_1 et A_2 sont en présence

A_1 dit un nombre inférieur à p, soit α_1

A_2 dit un nombre α_2 obtenu en ajoutant à α_1 un nombre inférieur à p

A_1 dit un nombre α_3 obtenu en ajoutant à α_2 un nombre inférieur à p

... etc...

Celui des deux adversaires qui peut dire n est déclaré gagnant.

3 - 1ERE LECON : n = 20   p = 3 , course à 20

1ERE PHASE : Compréhension de la règle du jeu (groupes de deux)

On pourra présenter ce jeu de deux manières :

Méthode visuelle : On étale 20 allumettes. Les adversaires prennent à tour de rôle une ou deux allumettes, au choix. Celui qui peut ramasser le dernier paquet d'allumettes, ou la dernière allumette, a gagné.

Méthode orale : On suit la règle du jeu de la course à n exposé ci-dessus : chaque adversaire ajoute 1 ou 2 au nombre énoncé précédemment. Celui qui dit 20 a gagné.

On peut utiliser l'une ou l'autre méthode, ou les deux succéssivement, au choix. Si on utilise les deux, il importe que les enfants découvrent l'isomorphisme entre les deux jeux. Dans tous les cas, on fera écrire les parties faites, de manière à pouvoir procéder ensuite à des comparaisons, dont les enfants pourront déduire des découvertes. (lire en détail ensemble la feuille : jeu de la découverte)

2EME PHASE : Adoption d'une découverte

4 - OBSERVATION DE LA CLASSE : Classe de Mme GIVERSO ($C.E_1$; $C.E_2$)

Méthode de présentation du jeu : La méthode orale a été choisie. L'institutrice a expliqué qu'il fallait ajouter un nombre inférieur à 3, c'est à dire $\boxed{1 \text{ ou } 2}$ au nombre énoncé précédemment par l'adversaire.

Difficulté de départ : Un certain nombre d'enfants écrivaient des suites telles que celles-ci : 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1....

Jeu de la découverte : Après un certain nombre de parties, les enfants ayant gagné au moins quatre fois ont essayé d'expliquer comment il fallait s'y prendre.

Les recettes suivantes ont été données :

(1) "j'ajoute toujours 2, et je gagne"

(2) "Celle qui commence la première gagne"
"celle qui commence la première perd"

(3) "Ca n'a pas d'importance par quoi on commence ; c'est important à partir de 16 ; l'autre a dit 16 ; je ne veux pas qu'elle gagne, alors je dis 17 ; alors, elle dira 18 ou 19 et je pourrai dire 20"

On assiste alors à une discussion entre les auteurs des idées (1) et (3) ; la première est convaincue de son erreur comme suit, par la troisième : "Si je dis 16, en ajoutant 2 tu diras 18, et tu perdras". Mais elle émet la réserve suivante : "si je mets 18 et si ma camarade ne comprend pas, elle dit 19 et je gagne"

On assiste ici à la naissance de l'idée qu'on ne peut établir une loi que si l'adversaire sait jouer. Les idées numéro (2), ont été immédiatement rejetées par l'ensemble de la classe.

Vérification des idées (1) et (3) : On reprend le jeu et on est amené à découvrir le théorème : celle qui dit 17 gagne.

Les enfants reprennent ensuite le jeu à 20. Puis on fait une deuxième pause pour juger les deux énoncés suivant.

(4) "Il ne faut jamais dire 16"

"Si, rétorque une enfant ; j'ai mis 16 ; l'autre a mis 18 et j'ai mis 20"

.../...

Une élève lui répond : "l'autre aurait pu mettre 17 et tu aurais perdu"

C'est à dire que si l'autre sait jouer, alors 16 est perdant.

(5) "Je compte de 2 en 2 jusqu'à 10, puis je dis 11, 14, 17" l'auteur est invité à venir écrire la suite des nombres au tableau. Elle joue en deuxième position (nombres soulignés).

2 - <u>4</u> - 6 - <u>8</u> - 10 - <u>11</u> - 13 - <u>14</u> - 15 - <u>17</u>

Commentaire des élèves :

l'auteur . "si mon amie met 13, je mets 14, comme ça j'arrive à 17"

Une deuxième enfant : "celui qui met 14, ça lui porte bonheur"

Une troisième : "14 est gagnant"

5 - REMARQUES SUR LE PROCESSUS DE MATHEMATISATION

Le théorème "celui qui dit 17, s'il sait jouer, ne peut pas perdre" est souvent découvert suivant le processus de mathématisation déjà évoqué.

a) - <u>Action</u>. Au cours de l'action, après une phase où l'enfant répond à "17" par "18", ou par "19" et constate qu'il perd, vient une phase où à 17 l'enfant ne répond pas. Ceci marque qu'il se reconnait perdant dans tous les cas ; il ne se résigne pas à dire l'un des deux nombres -perdants- qu'il a le droit d'annoncer.Mais le théorème est implicite en ce sens qu'il est effectivement utilisé, dans les bonnes situations, pour effectuer des déductions correctes, mais il n'est pas formulé.

b) - <u>Communication</u>. Il faut une motivation d'un autre type pour obtenir l'explicitation du théorème : par exemple la communication, dans le jeu de la course à n, entre membres d'une même équipe :

l'autre équipe a dit 15 ;

"dis 17, dis 17 et on a gagné"

(Si nous disons 17 nous avons gagné)

Mais cette formulation, dans le jeu de la recherche d'une stratégie, est généralement reçue par le destinataire comme une simple information, une proposition, parmi d'autres, elle peut être vraie ou fausse.

c) - Controverse. Il faut encore une autre motivation pour que cette formulation prenne une valeur de théorème. Ici le maître propose le jeu de la découverte "qui peut dire une proposition certainement vraie ?"... Si les élèves sont peu habitués, le maître donne l'exemple.

-"Celui qui dit 20 gagne"

- C'est vrai, mais c'est la règle...

- "à vous"

Ici la phrase émise par l'enfant sera une assertion : il s'engage sur la véracité de ce qu'il dit

- "Celui qui dit 17 gagne" et ce n'est pas la constatation statistique "chaque fois que quelqu'un peut dire 17 il gagne" qui doit convaincre, c'est la preuve que si le premier dit 17 quoique fasse l'autre, le premier peut gagner.

Cette qualité de preuve ne surgira pas de l'action, ni de l'information.

2EME LECON : REITERATION - RECURRENCE

PHASE INDIVIDUELLE : But : Généraliser les découvertes qui n'ont été acquises précédemment que par quelques enfants.

La classe est divisée en deux équipes : les bleus et les rouges.

Chaque équipe comportera trois conseillers et neuf concurrents.

Les conseillers par exemple sont les trois élèves qui gagnent le plus de courses à 20.

Les exécutants jouent ensuite individuellement à la course à 20 (bleux contre rouges). Les perdants peuvent se faire conseiller par des membres de leur équipe. Inversement, les exécutants peuvent aussi faire part aux conseillers de découvertes qu'ils pensent avoir faites en jouant.

On constate qu'une bonne partie des élèves joue la suite 8 - 11 - 14 - 17 - 20.

PHASE COLLECTIVE : On demande qui sait comment il faut faire pour gagner.

1ère proposition :

- "Si on dit 14, on peut dire 17 et on gagne"

objection - "je ne veux pas le croire, car j'ai mis 14 et l'autre a gagné"

Pour preuve, l'élève montre le jeu écrit dont elle parle. On l'écrit au tableau : 14 - 15 - 16

Commentaire de la classe : elle a perdu parce qu'elle aurait dû mettre 17 qui est gagnant, au lieu de 16 qui est perdant.

Autres propositions :

- On compte de deux en deux jusqu'à 8, puis on dit 11 - 14 - 17 - 20
- On met 2 - 5 - 8 - 11 - 14 - 17 - 20
- Si l'adversaire dit 2, on dit 4, comme ça on peut arriver à 8
- Pour gagner, il vaut mieux commencer par 1
- Si on arrive à 10, on a gagné
- Si on commence par deux, on gagne.

.../...

Conclusion : L'ensemble de la classe n'arrive pas à décider lesquelles de ces propositions donnent des méthodes sûres pour gagner. Au cours d'une troisième leçon, on devra donc organiser à nouveau le même jeu, pour en arriver à la découverte de l'algorithme correct.

3EME LECON :

Les idées suivantes ont été émises et vérifiées

- L'important est d'arriver à 5
- Si l'autre commence par 1, je mets 2, comme ça elle ne pourra pas dire 5 ; car il y a 3 entre 2 et 5
- Si on commence par 2, on est sûr d'arriver à 5.

Conclusion finale : Si on dit 2 - 5 - 8 - 11 - 14 - 17 - 20 on gagne à coup sûr. On n'a pas besoin de faire attention à ce que dit l'autre.

***

Cette constatation achève une première étape pour l'étude de la division.

La deuxième étape va consister à mettre en évidence les rôles de p et de n surtout celui de r, le premier nombre qu'il faut jouer et éventuellement de q le nombre de coups joués.

La troisième aboutira à l'institution d'un algorithme pratique pour trouver r ou q quand on connaît p et n

***

REMARQUES PEDAGOGIQUES ET PSYCHOLOGIQUES

Pour tous les enfants -après l'explicitation du premier théorème "qui dit 17 peut gagner"- la difficulté consiste à réitérer le raisonnement pour trouver les nombres 14, 11... à dire pour gagner contre toute défense. Les premiers pas faits,très peu d'enfants de 7 - 9 ans arrivent à réitérer d'eux même et a obtenir 8, puis 5, puis 2.. Nous disons que ceux ci dominent le processus de la récurrence finie. La plupart au contraire éprouvent de plus en plus de résistance à réitérer le raisonnement : d'abord il savent de moins en moins bien répéter la démonstration "si je mets 8, il ne peut mettre que 9 ou 10 s'il met 9 j'ajoute 2 et je dis 11, s'il met 10 j'ajoute 1 et je dis 11 aussi, si je mets 11 je peux mettre 14, puis 17, puis 20".

Comme si cette suite de propositions perdait de son sens par l'effet d'une certaine fatigue du cerveau ou comme si la mémoire s'embrouillait à vouloir se substituer à la compréhension de la situation: certains enfants au contraire se conduisent comme si le raisonnement luttait contre un autre modèle :

" à la fin il faut choisir le bon nombre mais avant 11 ou avant 8 on peut faire ce qu'on veut... Avant 5 ça n'a pas d'importance tout de même !". Ces enfants ne dominent pas le processus de récurrence finie..

Enfin les enfants sont de moins en moins sûrs de la véracité des théorèmes énoncés et des conclusions obtenues. Non seulement ceux-ci ne dominent pas le processus de récurrence, mais encore la notion même de déduction leur échappe encore : la vérité démontrée n'a pas pour eux la même valeur que la vérité constatée et dépend de la longueur du raisonnement.

.../...

Je ne suis pas sûr qu'il ne s'agisse que d'un retard dans le développement de la pensée logique de l'enfant, et qu'il suffise d'attendre que la nature fasse son oeuvre car beaucoup d'adultes éprouvent le même genre de difficultés. Il est toutefois évident que les explications du maître sont impuissantes à corriger ce défaut : une déduction ne peut convaincre qu'un interlocuteur capable de déduire. Il serait au contraire extrêmement dangereux que l'enfant accepte la déduction par sympathie pour le maître, par bonne volonté, à la suite d'une comparaison adroite, par habitude, ou à la suite d'un apprentissage. Il faudra faire jouer à nouveau l'enfant contre un autre qui connaît la suite gagnante, il pourra obtenir alors la conviction que le théorème est vrai, sémantiquement vrai.

Dans les autres exemples de courses le même raisonnement sera employé, de nouvelles occasions seront données à l'enfant de comparer la valeur des conclusions obtenues par des déductions avec celles qu'on peut obtenir par la pratique, le sens, ...

Il faudra toutefois aussi qu'il apprenne à distinguer les déductions logiques des conjectures et associations d'idées, pour lesquelles on emploie les mêmes mots du langage courant. (donc, parce que, car, alors...)

L'étude traditionnelle de la division ne s'arrête évidemment pas à ces difficultés car elle vise la connaissance de l'algorithme, -ce qui n'exige pas la compréhension-, et le sens des occasions où il y a lieu d'employer l'algorithme -appelé sens de la division-. Ce choix est peut être critiquable mais il est possible que nous devions conserver provisoirement pour l'acquisition de l'algorithme un apprentissage au sens strict.

La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division.

.../...

Ces explications consistent à résoudre l'algorithme en une suite d'évidences, mais évident veut dire ici familier, évident au maître, sémantiquement évident et non pas logiquement évident. L'inéfficacité voire la nocivité de ces fausses explications est facile à démontrer.

*****
***
*