CONFERENCE A L'UNIVERSITE DE GENEVE 3 JUIN 2004

GUY BROUSSEAU

DES DISPOSITIFS D'APPRENTISSAGE AUX SITUATIONS DIDACTIQUES EN MATHEMATIQUES

I. INTRODUCTION

En m'honorant du titre de Docteur Honoris Causa, l'Université de Genève accorde à mes travaux et à mes engagements une marque de considération à laquelle je suis extrêmement sensible. Je veux vous exprimer ici ma profonde gratitude. Mais je ne saurai dire l'émotion et l'extrême confusion que je ressens à devoir présenter une conférence dans l'université d'où Jean Piaget a fait rayonner tant de connaissances nouvelles.

Il m'a paru judicieux d'évoquer le rôle essentiel qu'ont joué les bribes de ces connaissances que j'ai pu saisir à l'époque où j'ai commencé la trajectoire qui m'a conduit ici aujourd'hui. Je suis conscient de braver le ridicule d'une comparaison bien peu flatteuse pour moi, mais je compte sur votre mansuétude.

Dans la première partie, j'évoquerai comment un instituteur qui aimait les mathématiques a rencontré l'épistémologie génétique et comment il a été amené à utiliser puis à transformer ses dispositifs d'observation, pour enfin, sous beaucoup d'autres influences, les absorber dans une « théorie des situations didactiques ». Celle-ci est aujourd'hui une des bases de la « science expérimentale du didactique », qui s'oppose en partie à l'approche de Coménius.

Cette première partie me permettra de rendre hommage à mes sources suisses. Car Pierre Gréco d'abord, puis Henri Wermuz m'ont fait accéder à l'intimité de leur regard sur certains des travaux de Jean Piaget, et pour le second, aussi à ceux de Ferdinand Gonseth. Et ces

regards à la fois sagaces, compréhensifs et lucides m'ont donné des impulsions essentielles.
Dans une seconde partie, à défaut de pouvoir présenter en détail l'évolution d'une réflexion qui s'étend sur presque quarante cinq ans et qui a bénéficié des efforts conjugués de plus d'une centaine de personnes j'essaierai d'illustrer le passage du point de vue de l'épistémologie génétique à celui de la didactique sur un exemple célèbre : la connaissance du nombre naturel.
Dans une troisième partie, je voudrais pouvoir dire quelques mots de cette théorie, ou du moins de son organisation actuelle, bien que je ne puisse pas évoquer ce qui est le plus important : l'enracinement expérimental et méthodologique de ces concepts.
En guise de conclusion, loin de me prévaloir de mes succès, je m'interrogerai sur l'influence des recherches aussi bien en psychologie qu'en didactique, pédagogie ou en sociologie sur l'enseignement.

II. ORIGINES DIDACTIQUES ET PSYCHOLOGIQUES DE LA THEORIE DES SITUATIONS

La théorie des situations est née de la remise en question et de la critique d'un certain nombre de tendances et de tentatives d'influence sur l'enseignement des mathématiques.

Mouvement de réformes.

Dans les années 50-70, en particulier en France, le flux d'injonctions que l'enseignement reçoit habituellement de l'ensemble des institutions de la société s'intensifie brutalement. Avec les espérances d'une après guerre et l'aisance financière des trente glorieuses, des propositions d'origines diverses, entre autres, l'éducation (LANGEVIN-WALLON), la psychologie (PIAGET), « la » mathématique (BOURBAKI), la linguistique (CHOMSKI) etc. se rassemblent sous une même bannière épistémologique, le structuralisme. Le bouillonnement se fait plus pressant et déborde en un train de réformes scolaires à tous les niveaux. La didactique classique issue des humanités, et ses avatars comme la méthodologie, sont submergés, enfoncés, « dépassés » c'est-à-dire discrédités, au moment même où s'effondrent les rapports de l'enseignement, notamment public, avec les institutions qui assuraient sa « protection » politique et scientifique.

Les critiques à l'encontre des actions des corps de l'état et du système éducatif sont radicales et très violentes, et elles s'accompagnent paradoxalement de l'affirmation que ces mêmes corps doivent et peuvent se réformer eux-mêmes et inventer des solutions nouvelles - Cette position contradictoire se maintient aujourd'hui-. Mais rien de concret ne vient remplacer ce qui est rejeté. D'autant plus que rien au fond ne relie de façon cohérente la masse des espoirs et des demandes qu'il a fallu mobiliser pour obtenir un mouvement appréciable.

Ainsi par exemple, l'enseignement traditionnel aurait sans doute pu *présenter* les nouvelles connaissances de mathématiques aux élèves, en séparant le « contenu » et les méthodes de l'enseignement. Il aurait ajouté quelques chapitres en modifiant un peu la présentation « axiomatique » sans en changer l'esprit. Mais la proposition structuraliste, alliée objective du behaviorisme permettait soudain un autre procédé officiel de construction des connaissances par les structures et les analogies comme on le verra plus loin. C'est d'ailleurs sous cette forme qu'elle s'est présentée aux professeurs.

En même temps que cette concession était accordée, la nécessité d'une adaptation aux étapes de l'apprentissage et du développement - d'une transposition - était déniée : de la maternelle à l'université, le savoir devait pouvoir être le même, s'exprimer dans les mêmes termes. La vérité (du point de vue structuraliste) paraissait même ne pas requérir la médiation d'une transmission à condition que la structure soit suffisamment épurée (préface de BOURBAKI).

De toute part, les exigences se multipliaient et se présentaient comme des impératifs catégoriques.

Il n'était plus possible d'ignorer ostensiblement que la psychologie, la pédagogie moderne, la sociologie, la philosophie critiquaient les méthodes classiques, sans trop appuyer sur les divergences qu'elles auraient pu souligner avec les divers projets de réforme …

Mais le structuralisme triomphant recouvrait d'un voile rassurant les divergences et mêmes les contradictions de toutes ces ambitions.

Or il n'était pas possible de satisfaire, sur de nouveaux contenus, en même temps - et surtout dans le faible laps de temps imparti -, toutes les orientations prescrites. Elles prônaient en vrac l'activité et la généralisation, l'abstraction et la construction d'un sens[1], la rigueur et l'utilité, la manipulation de machines et la découverte, l'individualisation[2] et le développement des relations sociales, la communication et l'innovation, le respect des stades génétiques ou celui de la liberté des élèves (selon FREINET, MARCUSE, ILLICH[3]…) etc.

Ce faisceau de projets était une utopie qui ignorait totalement toutes les difficultés et toutes les lois de la diffusion des connaissances et des

[1] Le sens était dans la structure pour les structuralistes, ou dans la sémantique au sens de Carnap, c'est à dire dans les réalisations de la structure, ou dans la fonctionnalité de la structure…

[2] Parmi les demandes les plus populaires, la plus violente et la plus destructrice a été et est encore celle de l'individualisation de l'enseignement.

[3] I. Illich, *Une société sans école , Seuil 1971*

pratiques dans une société, en particulier les questions de temps de réponse des systèmes. Il a crû et est mort dans l'illusion de la transparence des faits didactiques et de la toute puissance des moyens de connaissances.
Dans cet épisode, ni les « contenus » de l'enseignement – les mathématiques – ni leur conception moderne ou pas - ne peuvent être mis en cause, et les excès spectaculaires en tous genres qui ont ensuite servi d'alibi à la contre réforme ne sont eux-mêmes que des conséquences et des révélateurs d'un fait principal : notre ignorance de la fragilité et de la complexité des systèmes didactiques.
Un grand nombre d'appétits économiques, sociaux, culturels et politiques ont fait de l'enseignement (en particulier public) que l'on croyait indestructible, le champ clos de leurs affrontements. Il faudrait faire une place à part à tout un ensemble de courants anarchistes (sans rapports avec le structuralisme) qui trouvèrent un exutoire en mai 68 ; œuvrant d'abord en faveur des réformes mais en leur assignant leurs propres objectifs, ils se retournèrent contre elles lorsqu'il s'est agi de les mettre sérieusement en œuvre.

Rôle de l'ingénierie didactique des années 60 : Z. Diénès.

Mais revenons à l'enseignement des mathématiques au début des années 60. Instituteur initié aux mathématiques, j'ai d'abord conçu pour l'école primaire, un enseignement où les structures et notions nouvelles étaient seulement mises *au service* du programme classique, en utilisant au mieux les procédés didactiques et les méthodes pédagogiques en usage à l'époque[4]. Mes conceptions didactiques étaient à peu près celles que je découvris plus tard chez Z. Diénès. Mais alors que les choix didactiques étaient très proches son discours et le mien étaient différents.
Par exemple j'avais conçu un matériel structuré *unique*, mais beaucoup plus complexe que celui de Diénès, composé de baguettes de longueurs et de sections différentes, colorées… dont il fallait extraire les éléments utiles à telle ou telle leçon. Au contraire Diénès concevait ses leçons comme des *jeux* que le professeur pouvait considérer comme indépendants, avec un matériel déterminé,

[4] Cf. par exemple Les mathématiques du cours préparatoire, Dunod 1965

immuable et individuel. Dans ces jeux la structure mathématique était dans la consigne. Il fallait donc la comprendre pour jouer. Ce qui ne correspondait pas à mes modèles de la théorie des jeux. Mais cette critique m'a amené à lui emprunter inconsciemment l'idée de passer de l'étude des leçons et des connaissances que l'élève en tire, à celle des situations liées à la connaissance en acquisition.

Au cours des années 65-70 les professeurs de mathématiques cherchaient à inventer des exercices pour accompagner l'introduction magistrale des connaissances mathématiques nouvelles. Leurs efforts trahissaient à mes yeux une certaine pauvreté de nos conceptions didactiques. Ils se contentaient le plus souvent de trouver un exemple où le professeur pouvait reconnaître et faire voir – au sens de "lire" - les éléments de la structure ou les propriétés énoncées dans la définition ou le théorème de mathématiques étudié. La situation était donc une traduction littérale de la structure à enseigner, muni d'un habillage quelconque. Elle ne jouait aucun rôle. Elle était là, et l'élève devait la « découvrir ».
Cette présentation ne donnait aucune fonction à la connaissance de l'élève qui se contentait de reconnaître, sans raison, les connaissances cachées par le professeur, comme des œufs de Pâques dans un jardin.
D'autre part en préparant un programme pour une année entière, et non pas en adaptant quelques leçons, j'avais rencontré des difficultés qui avaient éveillé ma suspicion. Il fallait organiser la dépendance entre les apprentissages et la prendre en charge. On ne pouvait pas se contenter de considérer que la seule obligation de mémoire dans la classe incombait aux élèves.

Il me fut facile de cultiver mes doutes et mon autocritique, d'autant plus que leur objet était désormais assumé par un autre. Les théories de Diénès furent de ce fait, pour moi, pendant des années, une source inépuisable de critiques et de sujets d'études. La plupart des concepts nouveaux de la T.S.M. sont nés de cette partie de punching ball contre la « psycho-mathématique ».

Rôle de la psychologie et l'épistémologie génétique

En 1964, Lichnerowicz m'a proposé un programme d'études - en mathématiques et dans d'autres matières-, et comme sujet de recherches : « conditions limites d'une expérience en pédagogie des mathématiques ». Il m'envoya vers Pierre Gréco qui me fit étudier l'épistémologie génétique, et à Bordeaux, je me mis à l'école de Jacques Wittwer.

En psychologie les dispositifs ont pour objet de révéler les connaissances des sujets. A l'époque j'admettais que les dispositifs d'enseignement devaient être déterminés par les « lois » de la psychologie. Mais si ces dispositifs devaient être inventés par les observateurs, ils n'étaient pas considérés comme des objets d'études.
Par exemple dans l'expérience célèbre par laquelle un enfant révèle ou même apprend (selon Piaget) la conservation du nombre, l'expérimentateur fait varier l'espace occupé par la collection et l'enfant doit dire s'il y a ou non la même chose. Il suffit que l'observateur voie qu'il y a conservation du nombre pour qu'il considère que l'enfant doit le voir lui aussi, « s'il est conservateur »
Piaget n'indique pas la raison pour laquelle c'est ce qui est conservé : le nombre, et non ce qui est modifié, l'espace occupé, qui doit inspirer la réponse de l'enfant.
Cependant les premiers exemples de situations dans lesquelles le sujet met en œuvre des « connaissances » pour répondre et s'adapter à une sollicitation du milieu me sont venus sans conteste des dispositifs expérimentaux d'épistémologie génétique. Comme celui par lequel Gréco montrait comment révéler si les enfants pouvaient considérer la conservation de l'ordre de trois perles dans des rotations de 180°. L'enfant prévoyait quelle boule devait sortir la première d'un tuyau. Si son anticipation était fausse il pouvait le constater et tenter de la corriger. La « connaissance » d'une structure d'ordre était devenue fonctionnelle.
Destinés à mettre en évidence l'originalité de la pensée mathématique de l'enfant, et les étapes de son développement, ces dispositifs étaient nécessairement spécifiques des connaissances. Mais les auteurs ne faisaient aucun effort pour analyser a priori la façon dont ces dispositifs agissaient et pour expliciter ce rapport entre le dispositif, la

notion mathématique dont l'acquisition était étudiée[5] et les comportements des élèves. Or j'avais beaucoup de questions à poser.
Par exemple, lorsque PIAGET utilisait les axiomes de PEANO pour identifier LE développement de LA connaissance DU nombre chez L'enfant, ces singuliers m'apparaissaient plutôt comme des paris intéressants mais risqués, que comme des évidences. Je pouvais produire des "définitions" des nombres naturels, mathématiquement équivalentes aux axiomes de PEANO, mais de complexité cognitive très diverses. L'équivalence mathématique n'entraîne pas l'équivalence cognitive. Les axiomes sont « logiquement » équivalents à la théorie qu'ils engendrent, mais une bonne partie du travail mathématique consiste justement à établir des éléments de cette équivalence.
De même, il suffisait de faire varier un tant soit peu les nombres proposés pour voir que la connaissance DU nombre était en fait celle de quelques nombres. Qu'est-ce qui permet de déclarer que c'est exactement cette connaissance mathématique qui est la connaissance du sujet et non une autre plus générale ou plus particulière?

Ces observations n'étaient pas pour moi des objections aux travaux de PIAGET, mais des réserves à l'endroit de l'usage didactique que l'on voulait en faire. Plus précisément l'idée d'utiliser ces épreuves pour parler des acquisitions d'un élève particulier dans une situation particulière et pour en inférer des prescriptions didactiques[6] soulevait des objections insurmontables[7].

---

[5] « déplacements » ou « transformations » sont peut être des termes techniques du géomètre mais qui correspondent ici sans équivoque à des actions à des mouvements usuels…mais il ne s'agit plus de mouvements vécus dans l'action ; il s'agit de mouvements imaginés exécutés ou reconstitués en pensée. » Pierre Gréco *structures et significations (EHESS 1991)*

[6] Aebli "Didactique psychologique", Delachaux et Niestlé

[7] a) Mais l'acquisition « du nombre » (les axiomes de Peano) n'assure pas la maîtrise de l'utilisation des nombres dont on a besoin. La connaissance des axiomes ne donne pas la liste des théorèmes d'une théorie. Le nombre 25 a-t-il les même propriétés que 26 ou que 25^{25} ou que $(25^{(25^{\cdot\cdot\cdot 25})}$? Il y a confusion entre la fonction « objet » et la fonction « propriété d'un objet » ou entre une théorie et une métathéorie ?
b) De plus si une liste d'axiomes engendre une théorie, une théorie peut être générée par de nombreux systèmes d'axiomes. Lequel choisir ?
c) L'équivalence mathématique ou logique entre les théories n'entraîne évidemment pas l'identité ou même l'équivalence comme connaissance, comme moyen de générer des théorèmes ? (Une bonne partie du travail mathématique consiste à chercher les organisations les plus commodes).
d) L'engendrement des connaissances par leur construction axiomatique lui-même n'est justifié que par le besoin de contrôler leur consistance et par des considérations d'ergonomie très théoriques et incomplètes. L'usage des mathématiques développe au contraire un enchevêtrement de relations dont l'inférence n'est qu'une partie.
e) L'idée d'adaptation elle-même me conduit à douter de l'hypothèse qui prévoirait une identité formelle entre UNE structure de savoirs mathématiques, UNE structure des situations d'usage ou d'apprentissage correspondantes, UNE structure des connaissances du sujet adaptées à ces situations, et UNE structure des connaissances enseignées par le professeur.

L’idée de « situations mathématiques »

Il m'est donc alors apparu qu'il fallait prolonger ces travaux en étudiant les dispositifs eux mêmes et leurs rapports avec telle ou telle connaissance : dans quelles conditions un sujet - quelconque - peut-il être amené à avoir besoin de telle connaissance pour établir ses décisions, et pourquoi a priori, le ferait-il? Sans les dispositifs piagétiens, cette idée aurait été bien banale car étudier les problèmes et les exercices qui font utiliser une notion mathématique est un travail coutumier aux mathématiciens depuis l’antiquité. En entreprenant ce travail, j’ai donc cru faire une œuvre utile du point de vue « théorique », mais aussi du point de vue pratique. Car il me semblait que les professeurs avaient tendance à vouloir utiliser les dispositifs d’épistémologie pour enseigner les « vraies » mathématiques à leurs élèves.

Mais comme chaque notion appelle tout un ensemble de problèmes et d'exercices qui lui sont spécifiques, on pouvait penser que cette voie de recherche avait une chance à peu près nulle d'apporter des informations sur l'acquisition de savoirs un peu généraux. Dans cette perspective les comportements des élèves sont les révélateurs du fonctionnement du milieu considéré comme un système : la boite noire des behavioristes devenait pour moi alors le milieu et les réactions des élèves les révélateurs des propriétés de ce milieu.
Le maître mot des ces travaux est : « pourquoi ». Cette méthode conduit naturellement à considérer un problème ou un exercice, non pas comme une simple re-formulation d'un savoir, mais comme un dispositif, comme un milieu qui "répond au sujet suivant certaines règles. A quel jeu le sujet doit-il jouer pour avoir besoin de telle connaissance ? Quelle aventure - succession de jeux - peut l'amener à

---

f) Et même si les réflexions structuralistes de l’époque montraient bien *comment* les structures surgissaient avec une merveilleuse ubiquité dans les conditions les plus inattendues, la question *pourquoi* ne recevait guère de réponses satisfaisantes.
g) Et de ce fait l’enseignement des mathématiques se trouvait lancé dans une quête effrénée de la génération des structures et la réponse usuelle était finalement des procédés empiristes sensualistes et behavioriste en totale contradiction avec d’autres résultats de l’épistémologie génétique. A partir d’exemples et d’analogies, l’enseignant recherchait d’hypothétiques généralisations qui auraient fourni des structures prêtes à schématiser et à formaliser (Diénès).
h) Il existe des convergences mais aussi des divergences entre l’organisation mathématique et l’organisation de leur apprentissage

la concevoir, ou à l'adopter ? Dans cette approche, le sujet n'a pas besoin d'être mieux décrit que le joueur d'échec, qui pousse les blancs ou les noirs suivant une stratégie impersonnelle. Quelle information, quelle sanction pertinente doit recevoir le sujet de la part du milieu pour orienter ses choix et investir telle connaissance plutôt que telle autre ?

La même démarche conduit alors à considérer le milieu comme un système autonome, antagoniste du sujet, et c'est lui qu'il convient de modéliser comme une sorte d'automate.

Nous avons appelé "situation" un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain milieu qui détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce milieu un état favorable. Certaines de ces "situations" nécessitent l'acquisition "antérieure" de toutes les connaissances et des schèmes nécessaires, mais d'autres offrent une possibilité au sujet de construire lui-même une connaissance nouvelle en un processus "génétique", c'est à dire qui l'engendre.

Notons que le même mot "situation" sert, dans son sens ordinaire, à décrire tantôt l'ensemble (non nécessairement déterminé) des conditions qui entourent une action, tantôt le modèle théorique et éventuellement formel qui set à l'étudier.

Dispositifs Piagétiens et situations

Lorsque Piaget s'intéresse au développement de la connaissance du nombre naturel, l'épistémologie des mathématiques de l'époque lui fournit le concept d'invariant, dont Félix Klein avait fait un usage remarquable. Les éléments caractéristiques d'un objet sont ceux qui restent invariants dans un ensemble structuré de transformations.

A la condition de concevoir des épreuves adéquates pour constater la présence ou l'absence de ces invariances, il devient possible, par des collections d'épreuves étudiées longitudinalement, de mettre en évidence des hiérarchies dans l'apparition de ces structures.

L'opportunité d'étudier le développement de connaissances non scolaires et non culturelles lui est offerte par l'apparition d'une nouvelle approche des mathématiques. Issue d'une longue évolution de l'Analyse mathématique, une puissante réorganisation axiomatique des théories et des objets suivant leurs structures, affecte toutes les branches des mathématiques. Piaget y a trouvé l'instrument métamathématique dont il a besoin pour séparer l'activité mathématique des sujets qu'il observe, et avec qui il utilise les concepts et le langage classique, de l'analyse qu'il en fera et qui s'exprimera en termes nouveaux. Il pourra ainsi chercher l'apparition des nouvelles structures dans des comportements des enfants induits par les conceptions classiques.

L'utilisation opportune de ces notions d'invariants et de structure lui permettent ainsi d'examiner le développement de la connaissance des nombres sans avoir à se préoccuper d'en examiner aucun (par exemple si l'enfant « connaît » le « nombre » 78 et aussi 137 et donc indépendamment des pratiques scolaires etc. Cet avantage disparaîtra lorsque l'enseignement portera sur ces connaissances métamathématiques. Mais pour le moment il lui permet d'établir l'épistémologie génétique.

L'équivalence évoquée ci-dessus suffit à Piaget pour son projet : un enfant qui peut ordonner et réordonner une collection, qui peut reconnaître que son nombre ne varie pas lorsqu'on en modifie la disposition, qui différencie deux collections qui ne diffèrent que de un élément … est un enfant qui est en mesure d'apprendre la structure des nombres naturels.

Il devrait être clair pour les enseignants comme pour les mathématiciens que la connaissance de la structure ou des axiomes ne peut pas être tenue pour équivalente à celle de la théorie. Seules les assurances structuralistes ont pu le faire croire. L'importation des théories et des dispositifs de Piaget dans l'enseignement s'est faite sur une série de confusions hasardeuses comparables, la théorie avec son système de générateurs, mais aussi la connaissance avec le savoir, le sujet psychologique avec l'élève, le dispositif avec le milieu etc.). L'utilisation des épreuves de Piaget dans l'enseignement des mathématiques, que ce soit pour provoquer les apprentissages ou que ce soit pour en « contrôler » les effets me semble avoir été une méprise grave qui a contribué à développer des attitudes et des pédagogies attentistes assez dommageables.

En épistémologie génétique, les épreuves n'ont pas pour objet les modalités concrètes des apprentissages, mais l'ordre de leurs résultats. Cet ordre est supposé être déterminé par des lois du développement

mental indépendantes des individus et des cultures, qu'il s'agit d'élucider.
Les apprentissages scolaires et l'environnement culturel produisent donc des connaissances qui brouillent évidemment l'*étude* de ces lois. Piaget sera donc conduit à éviter l'étude des sujets scolaires.

L'observateur, le sujet et le milieu : H. Wermuz

La modélisation que Wermuz proposa pour exprimer les idées de Piaget sur la genèse de la pensée logique de l'enfant a joué un rôle important dans le développement de la théorie des situations didactiques.
Wermuz considère des propriétés : R : rectangle, C : carré, non C : non carré, T taille, P : position, A : allongement (proportion) etc. L'observateur est supposé pouvoir les connaître et les appliquer pour reconnaître des objets
Les propriétés que le sujet connaît sont des prédicats amalgamés représentés par des parenthèses. Ce qui est écrit dans la parenthèse c'est le modèle que l'observateur se donne pour identifier la connaissance de l'élève.
Par exemple Rs = (rectangle) indique que l'élève S utilise le prédicat rectangle comme l'observateur lui-même. Mais Rs = (R, nonC) indique qu'il ne reconnaît pas un carré comme rectangle. Sa connaissance est tributaire de la composante contextuelle non C. Rs = (R, nonC, Ti, Pj, Ak,) indique un sujet qui ne reconnaît un rectangle que sous la condition que les prédicats T, P, A prennent des valeurs dans i, j, k des domaines de ces variables. Les composantes contextuelles ont des statuts différents suivant que le sujet est capable d'en percevoir les effets (centration) ou non sur la définition du prédicat amalgamé : distinguer un rectangle allongé d'un rectangle moins allongé marque une étape avant de considérer l'allongement comme un prédicat indépendant de la forme rectangle (décantation). Une CC décantée sort de la parenthèse puis qu'elle fonctionne pour l'élève comme un prédicat.
L'attribution d'un prédicat à un objet par un sujet peut ainsi être elle-même représentée par un système formel ou chaque lettre avec son statut (centrée ou non) représente un usage précis d'un prédicat déterminé par l'observateur.

« Connaître » un prédicat consiste pour le sujet à débarrasser sa parenthèse de toutes les composantes contextuelles parasites en conservant celles qui sont pertinentes mais qui s'expriment par des formules logiques. Le sujet manipule ces prédicats amalgamés comme l'observateur manipule les prédicats, à l'aide de foncteurs logiques. Enfin presque car Piaget distingue plusieurs formes d'utilisation qui évoluent au cours du développement. H. Wermuz formalise alors ces étapes par des systèmes de préfoncteurs, et sans doute aussi par des parenthèses portant des indices correspondants. Le modèle est alors susceptible de représenter n'importe quelle évolution des connaissances du sujet dans lesquelles on supposerait que l'usage des foncteurs logiques n'est pas indépendant des connaissances des sujets mis qu'au contraire ils se développent dans une domaine de façon concomitante.
La croyance en la validité générale de cette conclusion m'a encouragé dans l'idée que l'apprentissage et l'usage des connaissances mathématiques devaient être étudiés en rapport avec des conditions et des milieux spécifiques.

Un exemple facilitera la présentation des concepts qui ont surgi du renversement de points de vue que constitue l'analyse des situations.

III. L’EXEMPLE DES NOMBRES NATURELS

Une des premières épreuves qu’un débutant rencontrait, à l’époque, est celle par laquelle Piaget s’assure de l’acquisition de l’invariance « du nombre » par rapport aux variations de disposition des éléments « Où y en a-t-il plus, ici ? ou là ? ». Piaget demande de comparer une collection de 6 et une de 8 qu’il écarte et resserre (observation STU[8]). La conclusion : « il a suffi de montrer à STU grâce aux petits nombres de 6 et de 4 qu’une rangée serrée peut contenir plus d’éléments … pour enfin découvrir la correspondance terme à terme ».

Cette conclusion me parut audacieuse et fit affluer les questions bien connues : avions-nous là une découverte, donc un moyen d’enseignement du nombre ? Ou bien s’agissait-il simplement de l’élucidation d’un malentendu par quelqu’un qui sait déjà beaucoup de choses mais qui ne saisit pas tout de suite de quoi il s’agit ? En effet comme très souvent dans les enseignements et dans les exercices scolaires, l’élève doit d’abord savoir ce qu’est un nombre pour entrer dans les exercices d’apprentissage du nombre ou des nombres. Quelle ressource aurait un observateur devant un élève mathématicien qui s’obstinerait à rester collé à la lettre des questions sans daigner comprendre ce qu’on lui suggère ? …

Comment définir un concept mathématique comme celui de nombre naturel par une situation qui puisse être comprise par des élèves qui ne savent pas ce qu’est un nombre et qui ne savent pas compter ? Existe-t-il une situation qui puisse représenter toutes les situations où la notion de nombre naturel apparaît ?

Et quelle différence y aurait-t-il entre une telle situation et une batterie de tests ?

8.*C’est plus* – comment çà ? – *on voit à la ligne* (on serre les huit on écarte les six) – *là* (où il y a six) *il y a plus* – pourquoi ? - *Là ça fait plus petit on les a serrés* – Mais il y en a moins ? – *Oui.*

Cette expérience montre dit-il « comment il a suffi de montrer à Stu grâce aux petits nombre de 6 et 4 qu’une rangée serrée peut contenir plus d’éléments qu’une rangée de plus grande longueur pour qu’elle cherche à combiner les apports de longueur et de densité et en vienne ainsi à décomposer les ensembles présentés, puis enfin à découvrir la correspondance terme à terme ».

STU peut avoir mis, légitimement derrière tous ces pronoms indéfinis : « C », « ça », « en »… le concept de « la place occupée par la collection », « ça » étant la collection elle-même. L’insistance de l’observateur va bientôt la conduire à rejeter cette idée et à lui substituer celle de nombre d’objets de la collection. Peut-on pour autant conclure comme Piaget « qu’il a suffi de montrer à STU grâce aux petits nombres de 6 et de 4 qu’une rangée serrée peut contenir plus d’éléments … pour enfin découvrir la correspondance terme à terme ».

Deux modèles classiques de « savoir compter »

Commençons par décrire deux situations culturellement classiques utilisées pour savoir si un enfant sait compter.

Une pratique populaire : Bébé compte, scène familiale
Maman : - Vous savez, grand père, le petit sait compter!
Grand père : - c'est vrai? voyons ça mon mignon...
Maman : - "Montre à grand père que tu sais bien compter"
L'enfant, quatre ans : - Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, dix, quinze, heu...
Grand père, admiratif : - Aaah! très bien! Il ne te reste plus qu'à continuer!

Une pratique professionnelle : "compter" ainsi ne compte pas
Mais la famille comprend la tante Mimi qui est une institutrice à la retraite.
Tante Mimi : - Mais non, grand père, ce n'est pas cela savoir compter : pour savoir si cet enfant sait compter il faut lui montrer des doigts et lui demander combien il y en a, et puis lui demander à son tour de montrer tant de doigts! il ne suffit pas de réciter la suite des nombres! Et s'il n'y parvient pas bien, il ne faut pas que maman soit déçue. A quatre ans la plupart des enfants ne peuvent guère vraiment comprendre les nombres au delà de 5, les psychologues vous le diront.
Maman : - mais notre petite voisine Odile, qui a cinq ans, compte bien jusqu'à soixante et dix!
Tante Mimi : - Oui, elle peut aussi réciter "Le chat la belette et le petit lapin" qui comporte bien plus de 70 mots, mais elle croit que les pénates sont des espèces de pantoufles! Ce n'est pas bien grave, mais une jeune collègue m'a raconté que les parents exercent actuellement une forte pression pour "faire compter" précocement les enfants. Elle constate que sous l'influence de ce matraquage, certains de ses élèves se mettent à compter, dès lors qu'ils entendent le mot "nombre" sans même vouloir réfléchir à la question qu'on leur pose. Elle a dans sa classe des élèves "petits et moyens" d'école maternelle, des enfants qui comptent mécaniquement jusqu'au delà de cinquante, et de ce fait, elle ne peut plus, ni avec eux, ni avec ceux qui ne dépassent pas cinq, organiser en commun aucune activité mathématique de leur âge etc.

Analyses et modélisation

Le modèle du deuxième exemple contient et corrige évidemment le premier. Dans les deux cas la formulation des nombres est bien un moyen approprié de répondre à la demande, mais la tante Mimi modifie le modèle initial (Maître, élève, savoir} de façon essentielle en lui substituant le modèle {Maître, élève, savoir, milieu} où un milieu objectif est le nombre de doigts à montrer ou à compter. Ainsi, dans son rapport au milieu, l'enfant doit assujettir sa réponse à une nouvelle forme de validité qui n'est pas seulement celle de l'acquiescement ou du désir d'un adulte.

Cet assujettissement donne évidemment un tout autre sens au savoir, qui devient le moyen adéquat de répondre aux nécessités d'une situation objective, dénuée en elle-même d'intentionnalité didactique. Mais remarquons que l'enfant n'a pas les moyens de comprendre la question "combien" ni de répondre s'il n'en a pas appris le sens au préalable. De plus, il n'a pas les moyens de vérifier lui-même la validité de sa réponse. Le jugement de son adéquation reste sous le contrôle de l'enseignant. Cette situation est donc essentiellement une situation d'évaluation des connaissances.

Elle ne peut être utilisée pour l'enseignement que dans le cadre d'une didactique behavioriste qui consiste à répéter les questions, à enseigner comment on établit la réponse et, ici, à faire reproduire les techniques de comptage dans des associations question-réponse, jusqu'à reproduction parfaite.

Dans une situation "d'apprentissage" où l'élève devrait "s'adapter à une situation objective" (et non pas à une relation "duelle" avec l'enseignant), en produisant lui-même la connaissance, il est nécessaire que *la consigne ou le projet d'action puisse être conçu par le sujet sans le secours de sa solution* puisque c'est ce qu'il s'agit de construire ou d'acquérir.

Pour comprendre la situation, l'élève doit pouvoir envisager, avec ses connaissances actuelles, une stratégie de base correspondant à la consigne qui lui est donnée. La connaissance nouvelle est alors le moyen de produire l'effet attendu par une stratégie plus efficace, plus sure, plus économique etc. Les connaissances sont en compétition et les motifs d'apprentissage sont des lois "économiques" qui se manifestent à l'élève lui-même.

L'apprentissage "behavioriste" fait appel à un sens, mais ce sens est extérieur au processus d'adaptation. De ce fait, c'est l'enseignant qui doit décider de ce qu'il va considérer comme un apprentissage élémentaire. Si une connaissance est trop complexe, il devra la décomposer, enseigner les parties, puis enseigner la composition de ces connaissances fragmentaires. Les raisons de ce découpage échappent à l'enfant et le sens de ce qu'il a appris ne pourra lui en être donné qu'après coup, par l'usage. Ce qui explique la nécessité de la multiplication des exercices d'applications du savoir appris. Le sens de ce savoir sera représenté, non pas par son adéquation à l'établissement des réponses, mais par un univers de situations déterminé par leurs analogies. Ainsi, l'enseignement classique de la division sépare l'apprentissage de l'algorithme, et celui de son sens.

La situation fondamentale du dénombrement

Pour satisfaire les conditions ci-dessus, et en utilisant quelques conclusions de la théorie, on obtient la situation suivante qui peut être traduite en instructions adaptées aux enfants de 3 à 7 ans :
"Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un seul dans chaque pot. Tu dois apporter tous les pinceaux en un seul coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les rapportes là-bas et tu essaies à nouveau. ***Tu sauras compter quand tu pourras le faire, même quand il y a beaucoup de pots et de pinceaux"*****.**
Claire MELJAC a étudié plus tard une situation similaire. Cette situation englobe la précédente en ce sens que, dès que le nombre de petits pots devient assez grand, l'élève doit, soit disposer d'un moyen matériel de représenter la collection (dessin, énumération, avec ses doigts ou autrement etc.) soit la compter, au besoin en organisant son énumération. Le nombre n'est plus l'*objet* explicite de la question mais le *moyen* implicite d'y répondre..
Pour que le nombre apparaisse explicitement, il faut transformer cette auto-communication en une communication véritable:
" Tu dois rester près des pots, et dire ou écrire un message pour que ton camarade, puisse t'apporter les pinceaux que tu veux. S'il te porte trop de pinceaux ou pas assez, vous avez **perdu tous les deux.** *Vous*

saurez compter quand vous pourrez le faire, même quand il y a beaucoup de pots et de pinceaux".

L'enfant saura dénombrer lorsqu'il pourra jouer les deux rôles : *demander* (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement *fournir* à la demande la quantité voulue.[9]

Les moyens de résoudre ce problème vont évoluer, en particulier avec la taille des collections et la forme sous lesquelles elles se présentent. La connaissance des petits nombres s'enrichira lorsqu'ils serviront à en construire d'autres à l'aide de diverses opérations… Il faut observer que les enfants acquièrent rapidement certains schèmes vrais pour n'importe quel nombre, mais aussi que la possibilité effective de prendre ces schèmes comme objet de connaissance et de les manier comme des savoirs ne s'acquiert ni spontanément ni rapidement. Il faudra de plus, tôt ou tard, ne pas se contenter de leur usage, mais aussi élucider, formuler, discuter les propriétés et les structures numériques. Ces élucidations sont nécessaires à l'apprentissage lui-même et doivent l'accompagner. Comment et quand? La connaissance DU nombre n'est pas réductible à celle des axiomes de PEANO. Les connaissances humaines ne sont pas contenues dans les savoirs qui les résument.

La différence entre le comptage comme **savoir** culturel habituel et le comptage comme **connaissance** d'un moyen de résoudre la situation fondamentale est bien visible dans l'exemple suivant dû à B. VILLEGAS

Le sens des dénombrements

La situation précédente est proposée à des enfants en cours d'apprentissage (classique), qui "savent" déjà compter, en ce sens qu'ils savent résoudre le problème de l'émetteur et celui du récepteur

---

[9] Cette situation semble présenter un caractère fondamental parce que "toutes" les situations de comptage peuvent en être déduites en faisant varier ses variables cognitives (nature, mobilité des objets, circonstances, taille des ensembles, etc.) et que toutes les pratiques de comptage et d'apprentissage du comptage peuvent ainsi être classées et comparées du point de vue didactique. Les deux pratiques habituelles précédentes s'obtiennent à partir de la situation fondamentale par suppression ou par transfert à l'adulte de certaines tâches. Dans la première, que nous pourrions appeler par exemple "***le comptage populaire***", l'enfant reproduit une suite de mots sous le contrôle de l'adulte. La seconde, "***le comptage scolaire classique***", est plus évoluée, il reste à l'enfant à faire correspondre un nombre à un ensemble de pots (travail d'émetteur), ou à constituer un ensemble d'un nombre donné de pinceaux.

(disons jusqu'à trente), mais qui n'ont pas encore la maîtrise du dénombrement.. On peut alors observer parfois le comportement suivant :

L'élève va chercher une poignée de pinceaux et les distribue dans les pots.

- "Ah, il en reste trois !"
- Tu as réussi ?
- Non parce qu'il m'en reste trois !
- Bon, reprends-les tous et essaie une autre fois.

Les autres élèves de la classe lui suggèrent :

- "compte !, compte !"

L'élève compte les pots, repart, saisit une poignée de pinceaux et revient. Le fait de compter ne lui a servi à rien. Les autres élèves continuent à l'aider :

- Non ! non ! tu dois compter les pinceaux.

L'enfant part, compte tous les pinceaux en prend quelques uns et revient...

Une condition supplémentaire: la confiance en ses méthodes:

Pouvons-nous affirmer que l'élève sait compter lorsqu'il est capable de constituer des collections adéquates de n'importe quelle importance dans les conditions de la situation fondamentale?

Pas tout à fait : Il doit aussi être capable d'être suffisamment sûr de son comptage pour identifier les sources d'erreurs et au besoin les discuter.

Par exemple, si au moment où il va chercher les pinceaux, quelqu'un lui dérobe un pot, il doit être capable de comprendre et dire :

- "tu m'as fait une farce!".

Cette confiance dans ses méthodes exige à son tour une position réflexive par rapport à elles, une "métaconnaissance", des mots pour exprimer les connaissances acquises, un métalangage, et finalement tout ce qui constitue la conversion en savoirs de certaines des connaissances. Ainsi notre situation de dénombrement n'était pas tout à fait fondamentale. L'est-elle maintenant?

Par rapport aux méthodes classiques, cette situation fondamentale du dénombrement peut se révéler utile, à divers moments de l'apprentissage et surtout pour indiquer aux professeurs ce que veut dire "compter" en termes "concrets". Ceci ne veut pas dire que l'apprentissage par l'usage exclusif de la situation fondamentale serait plus rapide ou plus efficace, elle peut se révéler inutilement lourde quand l'élève a compris le but de l'apprentissage.

L'organisation de processus génétiques longs

Comment s'organise l'acquisition d'une structure mathématique complexe comme celle des nombres naturels ? Elle nécessite évidemment des processus longs. Comment s'articulent les connaissances acquises en premier lieu, avec celles acquises ultérieurement ?
Apprendre séparément les pratiques partielles du comptage implique que l'adulte les enseigne, les exige, les corrige, les fasse imiter et répéter puis les compose. A aucun moment, l'enfant n'est en mesure d'établir lui-même la finalité de l'action et de corriger ses erreurs. Cependant, parents et enseignants utilisent avec un certains succès toutes ces formes dégénérées de la situation fondamentale, même le cas extrême de l'apprentissage formel de la suite des nombres. Aussi s'agit-il moins de rejeter certaines d'entre elles que de les utiliser au mieux suivant leurs caractéristiques particulières.

Les désavantages principaux des apprentissages « partiels » sont les suivants :

- ils ne permettent pas de déférer à l'enfant la responsabilité du jugement sur la valeur de ses réponses, ni de lui décrire à l'avance un projet d'apprentissage dont il peut évaluer les progrès
- il faut qu'il ait déjà appris la réponse d'une manière ou d'une autre pour comprendre ce qu'on lui demande de faire.

La théorie des situations permet d'étudier les solutions existantes et d'en proposer des différentes. En particulier, en replaçant les techniques partielles dans une genèse globale intelligible. La présentation d'une telle genèse sortirait du cadre de cet article, mais l'utilisation de la situation fondamentale et de la poursuite de la connaissance de nombres de plus en plus grands y jouent un rôle essentiel.

Apprendre les nombres

Cet exemple laisse dans l'ombre la diversité des situations nécessaires à l'ensemble du processus, la complexité des rapports au savoir, et un grand nombre de phénomènes. Car finalement, il faudra bien, pour cela, que l'élève ***énumère***[10] les collections (qu'il appelle l'un après l'autre, tous les objets sans appeler deux fois le même), en même temps qu'il les ***dénombre*** (qu'il évalue leur cardinal par correspondance avec une autre collection), en particulier quand il les ***compte*** (qu'il mette en correspondance leurs éléments avec les mots) puis, si le comptage a été décomposé, en "***nombrant***[11]" (en exprimant oralement le nombre à l'aide d'un système de numération) le résultat de son comptage, et ensuite en ***écrivant ce nombre.*** Il faudra aussi qu'il s'approprie les usages ***ordinaux*** de la suite des nombres etc. La dénomination et l'écriture des premiers nombres utilise des procédés de ***numération*** qui doivent être reconnus pour être utilisés, mais dont l'étude et l'analyse doivent se poursuivre tout au long de la scolarité obligatoire ne serait que pour connaître et utiliser de nouveaux nombres. L'analyse du cryptage numérique et des systèmes de numération, opposés à la pratique du ***numéral,*** notamment à la lecture des ***numéros***, est indispensable.

La taille des nombres et leur construction

Quel est l'effet de la taille des nombres ? Utilise-t-on vraiment et peut-on apprendre de la même façon des nombres de 2 à 7, des nombres entre 15 et 30, des nombres au-delà trois cents, des nombres comme $(25^{(25\ldots}\ldots)$? Quels répertoires sont nécessaires à ces apprentissages ? Avec le répertoire cumulatif suggéré par Peano et l'algorithme « ajouter un », pour connaître un nombre n, il faut avoir « appris » tous les nombres précédents ? Cet ordre d'apprentissage est il inéluctable ? La réponse est non : d'autres opérations sont susceptibles de permettre un meilleur usage de ces nombres aux

---

[10] Pour plus d'informations, consulter (entre autres): sur l'énumération, la thèse de J .BRIAND " L'énumération dans le mesurage des collections" (1993) (DAEST, Université Bordeaux 2, Place de la Victoire 33 000 Bordeaux) sur la numération, celle de M. BAHRA "Problèmes de didactique de la numération, échecs et succès de la remathématisation (1995) (même adresse), sur les dénombrements celle de B. VILLEGAS (1986) (idem),

[11] Néologisme

propriétés ergonomique différentes. L'addition, la multiplication ou la puissance sont des moyens bien plus puissants pour construire directement, connaître et manipuler certains intervalles de nombres.
La convention avait décidé en 1794 de régulariser la dénomination orale des nombres. Des études du même type nous ont conduit à montrer les déficiences de la disposition classique en France des calculs numériques légués par l'histoire et à proposer de nouvelles dispositions éprouvées très avantageuses... qui n'ont jamais été prises en considération.

Conclusions
Ces études montrent des problèmes et des résultats que l'importation mal contrôlée des travaux de l'école de Piaget dans la didactique avait tendance à faire passer au second plan.

IV. LES THEORIES DES SITUATIONS

Introduction

La *théorie des situations didactiques en mathématiques* peut s'appuyer aujourd'hui sur l'esquisse d'une *théorie générale des situations,* prolongement de la théorie des jeux.

La perspective classique conduirait à déterminer ensuite la catégorie des situations didactiques, puis à spécifier dans ce cadre les situations de didactique des mathématiques, comme cas particulier de la précédente.

Cette approche due à COMENIUS, suppose qu'il existe un algorithme d'enseignement universel, qu'il s'agisse d'Art, de science ou de langue. En première approche elle a convenu depuis le $17^{\text{ième}}$ siècle à la création d'un enseignement de masse.

Pourtant il est assez clair que chaque connaissance nouvelle, chaque théorème, chaque branche des mathématiques suppose une situation spécifique. La logique mathématique montre qu'il n'existe pas de méthode universelle de construction des énoncés vrais et l'histoire illustre ce fait. La pratique classique n'existe donc que grâce à des compromis didactiques réels mais cachés par des approximations et des fictions épistémologiques et psychologiques. Les logiques de l'administration et de la politique les portent à se cramponner à la hiérarchie classique car il est plus facile de financer un seul laboratoire de métaphysique dont on prétendra ensuite appliquer les résultats à la thermodynamique comme à l'électronique et à l'optique, que de financer dix laboratoires spécialisés.

Je suis parti dans une voie différente. Celle qui consiste à rechercher le « compromis didactique » à partir des activités de production et d'usage de la connaissance. Il ne suffit pas de pouvoir citer ou réciter les mathématiques pour les connaître, il faut les apprendre – donc les enseigner avec leur fonction propre et les agréger par leur fonctionnement.

J'ai donc d'abord tenté de déterminer la nature de l'activité mathématique par les situations où ces connaissances s'exercent pour étudier ensuite les conditions dans lesquelles ces situations peuvent être suscitées ou reproduites à des fins didactiques.

Cette méthode m'a permis d'analyser, d'imaginer et de comprendre le fonctionnement, de diverses genèses concevables, pour tous les concepts mathématiques fondamentaux - ceux que l'on veut enseigner dans la scolarité obligatoire - y compris celles qui sont effectivement pratiquées. La recherche des compromis et des agrégations présente des difficultés théoriques et pratiques redoutables. Il a toujours été clair que les situations et les genèses que nous avons conçues pour les étudier n'étaient pas destinées à être projetées vers les professeurs comme méthodes d'enseignement. Il n'empêche qu'elles ont dû être diffusées. Ces travaux relèvent de ce que j'appelle aujourd'hui la *théorie des situations mathématiques* a-didactiques. Nous ne pourrons guère qu'indiquer son organisation.
Car c'est au moment où il s'est agit d'inclure une situation mathématique dans une situation où l'un des agents est animé d'une intention didactique que les paradoxes dissimulés par le compromis classique sont apparus. La *théorie des situations didactiques en mathématiques* a été érigée pour résoudre ces paradoxes.
La théorie des situations didactiques est une approche et une méthode de recherche parmi beaucoup d'autres, mais elle donne une excellente base pour l'étude de ce que j'appelle la *micro-didactique,* par référence à la micro-économie. Elle vise à prévoir les conditions dans lesquelles les échanges entre une institution et un milieu ou entre deux institutions vont dépendre d'*une connaissance* déterminée.
Elle offre de plus, un cadre conceptuel à la *macrodidactique* qui se propose de dégager comment sont déterminées les grandes orientations de l'enseignement des mathématiques dans les sociétés et leurs rapports relativement à l'idée qu'elles se font de telle ou telle connaissance mathématique. L'expérience a montré qu'il ne suffit pas de résoudre tous les problèmes scientifiques et techniques dont dépendent l'utilisation, la diffusion et le développement d'une connaissance et d'une pratique d'enseignement pour qu'elle soit effectivement adoptée, quelle que soit sont utilité et quelque faible que soit son coût. Les exemples abondent : des réformes modestes comme la numération orale décimale ou les dispositions du calcul humain en France à d'autres plus complexes comme l'enseignement des statistiques.

Quelques généralités sur les situations

Les situations dont il s'agit sont des « modèles» en termes de jeux. Elles représentent *certaines* parmi les interactions d'un joueur appelé « *actant* » avec une *partie* de son environnement appelé « *milieu* ». L'actant peut être une personne ou une institution, le milieu peut comprendre ou non des actants, doués ou non d'intentions, engagés dans des coopérations ou dans des compétitions avec l'actant.

Johan Huizinga[12] a soutenu[13] que le jeu est un facteur fondamental de tout ce qui se produit au monde, au point qu'il a proposé de substituer au nom d'homo sapiens et d'homo faber celui d'homo ludens.

La théorie des jeux a connu vers la même époque un développement mathématique extraordinaire avec Von Neumann, Morgenstein et Nash. Dès les années 70, je me suis intéressé aux problèmes concrets posés par l'interprétation et la modélisation mathématiques des activités humaines d'apprentissage à l'aide de ces modèles. Sous le nom d'étude des actions situées, la voie a été reprise au milieu des années 80, indépendamment semble-t-il, par certains sociologues. Il faut ajouter que quels que soient les jeux et leurs enjeux, nous supposons que les actants obéissent à une règle implicite supplémentaire : le résultat doit être obtenu au moindre coût, au moindre effort, au moindre risque. De sorte que notre actant est un homo oeconomicus en même temps qu'un homo ludens. Cette condition n'était évidemment pas étrangère à la théorie des jeux, mais l'accent mis sur les difficiles questions d'équilibres laisse parfois un peu dans l'ombre les aspects ergonomiques plus modestes.

L'étude générale des situations se divise en une « *statique des situations* » et en une « *dynamique des situations* » qui déterminent ensemble quelques *types fondamentaux de situations* et la *méthodologie*.

La statique des situations

La statique décrit les dispositifs matériels, le rôle des protagonistes, les actions permises c'est-à-dire les règles convenues dans lesquelles s'inscrivent leurs décisions, les états initiaux et les états terminaux

[12] Grand historien néerlandais 1872-1945,

[13] Johan Huizinga « homo ludens » essai sur la fonction sociale du jeu (1938) Tel Gallimard 1951

ainsi que les enjeux attachés à certaines de ces issues.
Dans ces conditions, les diverses décisions, tactiques ou stratégies de l'actant, peuvent être interprétées comme l'effet de connaissances qui proposent ou soutiennent ces décisions. Par ce moyen, les connaissances se voient dotées, dans cette situation, de propriétés ergonomiques en termes de coût de la mise en œuvre, intérêt, fiabilité, probabilité d'apparition… Qu'il s'agisse de prévoir ou d'expliquer le résultat d'une expérience, ce genre d'analyse est une aide précieuse.
L'intérêt de différentes connaissances pouvant procurer la solution dépend de la valeur de certains paramètres. Par exemple pour résoudre un système de deux équations du premier degré, la substitution est une assez bonne méthode universelle (encore qu'elle puisse être dépassée dans des circonstances favorables par d'autres plus simples). Elle est impraticable pour un système de cinq équations…

La dynamique des situations étudie les évolutions dans le temps des systèmes milieu-actant. Dans le cas où une situation doit être fréquentée par l'actant, il est possible de prévoir que celui-ci adapte ses connaissances à cette situation. Suivant les caractéristiques de cette fréquentation, et la complexité de l'apprentissage (des modifications nécessaires du répertoire, assimilations et accommodations,) il est possible d'envisager les connaissances les mieux adaptées, suivant de façon grossière, le coût de chaque usage, la fréquence d'emploi, et le coût de l'apprentissage.
Nous supposons alors que, quel que soit le processus de création, si le sujet produit cette connaissance elle sera justifiée et renforcée par la fréquentation de la situation.
Nous avons ainsi montré que les modes de connaissance optimaux, étaient différents suivant les conditions de la situation de l'apprentissage et de la fréquentation. Nous avons établi ces domaines de meilleure efficacité, pour les nombres naturels, pour les nombres décimaux et rationnels, pour les rapports avec l'espace, etc.
L'adaptation à une situation peut ainsi conduire à la « création » de connaissances, mais aussi à des modifications du milieu, à des questions nouvelles… (→ extension aux situations didactiques)

L'étude de la dynamique des situations à montré que dans certains cas une connaissance localement adaptée peut faciliter « l'acquisition » de connaissances plus sophistiquées et plus générales, mais que dans d'autres elle peut la rendre plus difficile. Elle peut même s'ériger en véritables obstacles comparables aux *obstacles* épistémologiques introduits par Bachelard. Nous avons montré que contrairement à son opinion ce phénomène d'obstacles se produisait en mathématiques.
L'étude de la genèse d'une connaissance devient alors un véritable problème d'optimisation entre des contraintes opposées.

Les types de situations élémentaires
Dès le début des années 70, nous avons différencié des types de situations, suivant les principaux types d'échanges avec le milieu : actions, messages, preuves, ordres. Il existe une très remarquable mais très naturelle correspondance entre les différents types de structuration du milieu, les types d'échanges, les types de connaissances et les types d'apprentissages (comprenant notamment ceux montrés par Bateson).
Les situations réelles sont décomposables en situations élémentaires. Celles si peuvent se composer dans la mesure ou il existe une hiérarchie des décisions compatibles (sinon elles engendrent des injonctions paradoxales).

La méthodologie
La théorie des situations ne serait qu'un discours de plus s'il ne lui était associé un ensemble de modalités et de méthodes de confrontation avec l'observation des activités et de leurs résultats. Cette confrontation prend deux aspects aussi importants l'un que l'autre à mes yeux :

- d'abord, le calcul des situations et l'étude de leurs variables. Ce sont les bases de l'étude a priori, indispensable aussi bien à l'observation de la contingence qu'à la production de dispositifs aux caractéristiques connues, décrites et assumées, l'ingénierie didactique.
- ensuite l'observation, mais surtout, l'observation soutenue et participative – en un sens très précis et très contrôlé développé dans l'expérience de l'école J. Michelet - qui seule à mon avis

permet la mise à l'épreuve des concepts et des modèles théoriques.

Des méthodes d'études stochastiques comme l'analyse implicative, développée précisément pour leur usage en didactique permettent des confrontations plus directes dans le cas d'observations sur de nombreuses cohortes de situations. Les réponses d'un élève à trente questions ne forment pas une statistique pour un psychologue centré sur le sujet, contrairement à l'observation de trente élèves répondant à une même question. Pourtant c'est une population de trente observations pour qui veut dire en quoi ces trente situations se ressemblent ou diffèrent.

Quelques Principes

L'utilisation de modèles de situations n'est pas seulement d'une sorte de technique d'étude ou d'ingénierie. La consistance exige de lui associer des principes et entraîne quelques conséquences dont voici les plus importantes.

a). 1. Les conditions qui font qu'un milieu intervient dans les manifestations d'un connaissance donnée ne sont pas indépendantes, elle forment un système : le milieu. 2. L'interaction de l'actant avec ce milieu a la structure d'un jeu – la situation-. 3. Tous les objets du champ sont définis par leur fonction dans une situation. En particulier toute connaissance n'entre dans le champ qu'en étant définie par au moins une situation dont elle fournit une solution. 4. Un modèle d'actant et une situation forment un « automate » au sens mathématique, sur lequel peuvent être définies les diverses caractéristiques des composants : pertinence adéquation, réalisabilité coûts, etc. 5. Postulats de la Correspondance connaissances/situations, de l'existence de situations fondamentales etc.

b) L'usage de ce modèle implique 1. Que l'observateur doit être lui-même modélisé et inclus dans le système. 2. Que la structure du milieu et celle de la connaissance solution ne sont a priori ni identiques ni même souvent comparables. 3. Qu'une connaissance identifiée par l'observateur dans la culture, prend inévitablement dès lors qu'elle est mise en fonctionnement dans des situations particulières, des propriétés et des sens différents. Ces différences de sens sont augmentées par les adaptations indépendantes, et ne sont

combattues que par un effort culturel, et par le partage de situations similaires, objets effectifs de la diffusion et de la didactique.
Ces prolégomènes semblent pouvoir être utilisés dans de nombreux domaines, et notamment dans la didactique des diverses disciplines. La question qui se pose maintenant est celle de la spécification de ces situations pour la modélisation de l'enseignement.
c) L'usage d'un modèle dans la recherche scientifique exige que l'on distingue très nettement les termes définis dans le modèle et les termes correspondants en usage dans le milieu que l'on modélise. Par exemple une « connaissance » telle que définie dans la culture, avec tout son environnement, et son modèle la « connaissance de l'actant » telle qu'elle est déterminée par une situation précise. Cette condition n'est tenable que si l'univers de la recherche n'est pas en contact direct le milieu modélisé. Si elle l'est comme c'est le cas en médecine la contamination du langage des malades par celui des médecins peut créer de grandes difficultés, mais celle de la terminologie médicale par le vocabulaire et les concepts populaires rendrait impossible toute recherche scientifique. Or c'est ce qui se produit encore trop souvent en didactique. Les chercheurs distinguent mal leurs objets théoriques de leur référent effectif.

Les situations mathématiques

1. Existe-t-il un modèle de l'activité mathématique valide pour toutes les connaissances mathématiques ? oui comme schéma, non comme modèle effectif. chaque cas est différent.
2. Les mathématiques et l'activité mathématique, objet / moyen, outil /
3. Le modèle valide pour les mathématiciens le serait-il pour tout les usages et pour tous les utilisateurs ? penser et citer
4. Le modèle classique : textes et problèmes, ce qui lui manque : l'organisation, le questionnement et la création de problèmes, la dialectique, etc. la subordination de la chronogenèse à la topogenèse. L'épistémologie professionnelle des professeurs.
5. Les situations fondamentales et les processus génétiques
6. Le réalisme platonicien conduit à la dénégation de la transposition didactique.

7. Les situations mathématiques d'action, de formulation, de preuve, paraissent résoudre les problèmes d'apprentissage et d'enseignement : il suffirait de reproduire les situations génériques des connaissances.
8. Mais est-il possible de « reproduire » un processus historique. Les connaissances mathématiques sont créées dans des conditions très ouvertes, par des spécialistes très avertis, et le temps et le hasard jouent un grand rôle. Par la suite, elles sont reprises, utilisées, réinterprétées. Donc en général, le sujet ne peut pas distinguer dans tout ce qu'il a mobilisé pour résoudre un problème, ce qui est exactement important, ce qui sera utile.

La thèse constructiviste radicale ne tient malheureusement pas dans une analyse plus précise du modèle. Elle est inconsistante, contradictoire. Le sujet ne peut pas reproduire en situation a-didactique ni les processus historiques, ni les savoirs culturels. Il ne peut produire que des « connaissances ».
Je ne donnerai que deux exemples des difficultés rencontrées.

Les situations didactiques en mathématiques

Les situations didactiques relèvent, soit du modèle de la *dévolution* soit de celui de l'*institutionnalisation*.

La dévolution

1. Si le professeur indique toujours à l'élève ce qu'il doit faire dans des termes qui ne lui laissent aucun choix, ce dernier, au mieux, exécute un ordre. L'élève n'exerce ses connaissances (et ne les montre) que dans la mesure ou la situation lui laisse une incertitude que ces connaissances réduisent, donc s'il y a un risque d'erreurs.

D'ailleurs l'enseignement vise à adapter élève à des situations de la vie courante où toutes les conditions didactiques auront été abolies. Il faudra alors que cet élève conçoive ses réponses en fonction du problème objectif qui lui est posé – nous l'appelons la situation *a-didactique* - et non en réponse aux dispositions didactiques facilitatrices mais sans rapports avec le contenu. Pour entraîner l'élève à ces situations le professeur doit lui en proposer.

2. La dévolution est le passage d'une situation didactique à une situation a-didactique. Cette transition est plus complexe que le passage classique, du cours au problème ne le laisse paraître. L'élève doit accepter ce qu'aucun adulte n'accepterait, c'est à dire de s'engager à obtenir un résultat, (avec le risque d'être mal jugé) sans savoir à l'avance comment il peut le faire.
3. S'engage alors une sorte de négociation autour de ce que nous avons appelé un *contrat didactique*, qui ne peut être en fait ni explicité, ni tenu s'il l'était. Il fixe l'illusion qui permet le déroulement de l'activité didactique et l'apprentissage. Le déroulement de la situation n'est possible que grâce à un renouvellement permanent de l'espoir et de la confiance des protagonistes.
4. Il en résulte que pour enseigner, le professeur doit de son côté accepter pour l'élève des risques d'erreurs qui comportent à terme, pour lui aussi, un risque d'échec. L'apprentissage est un processus historique et stochastique. La réussite individuelle n'est pas garantie.

L'institutionnalisation

Nous avons indiqué plus haut que si l'actant, disons l'élève, peut s'adapter de façon autonome à une situation déterminée, il ne peut pas anticiper le rôle de la connaissance locale qu'il a produit dans des situations plus générales qu'il ne rencontrera que plus tard.

Le plus souvent d'ailleurs il ne peut même pas « reconnaître » la connaissance qu'il a mise en œuvre car un métalangage lui est nécessaire pour l'évoquer dans ses rapports avec les autres élèves ou avec me professeur

L'institutionnalisation consiste à placer la connaissance produite par l'élève par rapport aux connaissances culturelles et aux intentions didactiques du professeur. Elle revient à passer d'une organisation chronogénétique didactique des connaissances à une organisation topogénétique scolaire « officielle ».

L'institution comporte donc la relecture par le professeur de l'activité de l'élève et sa réinterprétation.

La théorie générale des situations telle que nous l'avons présenté plus haut envisageait de modéliser l'activité dans des milieux sans intention didactique par des automates finis. Notre étude montre que cette conception n'est qu'une approche grossière. Il faut concevoir l'enseignement comme comportant une réécriture, une interprétation du passé. Les modèles nécessaires sont au moins des automates à pile de mémoire.

Conclusion

Nous savions tous que la diffusion et l'enseignement des connaissances est un phénomène très complexe. Avons-nous progressé dans la compréhension de cette complexité ?
Lorsque j'ai exposé les prétentions de ma thèse devant Pierre Gréco, en 1970, il hocha la tête et après avoir tiré sur sa cigarette, il me dit.

- La psychologie cognitive et l'épistémologie génétique sont déjà bien difficiles ! Alors l'enseignement ! Je ne crois pas qu'on soit en mesure de réussir un tel projet pour le moment. Mais finissez de rédiger ce que vous m'avez montré sur le nombre et ce sera déjà assez pour une thèse de psychologie.

Je n'avais pas trop besoin d'une thèse de psychologie, j'ai persévéré.
Aujourd'hui on peut avoir le sentiment d'avoir relevé un défi difficile.
Pouvons nous dire pour autant que Pierre Gréco s'est trompé ?
Je n'en suis pas si sûr. Mon exposé n'a pas fait allusion aux moteurs principaux de nos travaux - l'observation et l'ingénierie didactique - ni aux principales étapes, ni à ce que nous pourrions considérer comme des progrès significatifs ou même des voies prometteuses. Mais il n'évoque pas non plus les craintes, les doutes et les difficultés qui tendent sans cesse à nous décourager. Je vais en évoquer un parmi d'autres, dans la dernière partie, celui des rapports entre nos recherches et l'enseignement.

V. DE L'USAGE DES SITUATIONS-PROBLEMES

Nous observons depuis le milieu du 20$^{\text{ième}}$ siècle à une longue et vigoureuse poussée en faveur d'un enseignement fondé sur l'activité des élèves. En mathématique, cette activité a souvent été identifiée à la *résolution de problèmes*, mode d'enseignement opposé à *l'étude de textes* ou à *l'organisation de théories mathématiques* en classe.
Il semble que ce mouvement ait pris de l'ampleur et de nombreux professeurs ne conçoivent leurs relations avec leurs élèves que dans le cadre de problèmes ou d'échanges de questions relevant du même schéma. Mais il me semble que le « tout problème » ne donne pas de résultats aussi satisfaisants que les études de ces trente dernières années l'avaient fait espérer.
Je soupçonne que la diffusion des dispositifs d'épistémologie génétique puis celle de situations non didactiques d'action auprès des enseignants a eu une influence non négligeable en préparant la voie à un usage excessif de « situations-problèmes »
Avant de nous interroger sur la réalité et sur l'importance de ce phénomène ou sur ses conséquences, il convient d'évoquer son rapport avec le sujet qui nous intéresse.
La réforme des mathématiques envisagée par les mathématiciens portait sur les instruments même de construction des mathématiques. Il s'agissait de s'assurer avec les élèves d'un générateur logique de la pensée mathématique à l'école. Dans ce rôle la « théorie des ensembles » ne pouvait pas être introduite de façon axiomatique par le biais de définitions comme en logique mathématique. Elle ne pouvait être introduite que de façon « naïve », c'est-à-dire en confondant le langage construit (objet) avec le langage du constructeur (outil de construction). Toute autre présentation engageait « un glissement métadidactique » récurrent.
Les situations mathématiques d'action, ont été conçues dans les années 70 essentiellement pour résoudre ce type de difficultés : introduire sans mots de façon précise des concepts validés par leur fonction. Elles avaient une même caractéristique : elles réclamaient l'usage de connaissances « sous forme d'actions », donc indépendamment de la formulation qu'elles pouvaient recevoir. La

formulation, la validation explicite, l'articulation sur des connaissances antérieures faisaient l'objet de situations différentes, concomitantes ou non.

Par la suite la méthode a été étendue à tous les sujets de mathématiques élémentaires. Il s'agissait de contrôler le sens des concepts mathématiques en même temps par leur organisation syntaxique et par leur usage.

Les dispositifs d'épistémologie génétique devaient présenter la même propriété. Servant à révéler le développement de « structures de la pensée » indépendantes des cultures et des langues, elles devaient être connues de l'observateur, mais avoir été cachées aux élèves et aux professeurs. En principe ils révèlent donc ces structures sans qu'il soit nécessaire que le sujet en ait conscience et surtout sache les nommer d'une façon ou d'une autre. C'est en ce sens que la voie de PIAGET se distingue, s'oppose et complète celle de VIGOTSKY. Au moment où Piaget en avait besoin, la logique et les structures mathématiques se sont présentées avec les bonnes propriétés culturelles (pour cause de rupture entre la culture des mathématiciens et celle des enseignants). La production de dispositifs pour les observations d'épistémologie génétique conduisit les piagétiens à construire des situations d'actions.

Les épistémologues d'abord puis les didacticiens ont ainsi fourni aux enseignants exactement ce qu'ils souhaitaient : des moyens de comprendre et de présenter à leurs élèves le sens des notions de mathématiques modernes qu'ils ne pouvaient guère définir.

Ces dispositifs ont été largement diffusés – je ne dis pas facilement – auprès des professeurs.

Il semble par exemple que la nouveauté des situations d'action ait plus souvent retenu l'attention des enseignants que leurs propriétés didactiques effectives et surtout que leurs conditions d'application. Les situations et les processus de formulation de validation ou d'institutionnalisation dans lesquels elles étaient imbriquées étaient souvent plus négligés. Par exemple, alors que la théorie des situations met l'accent sur la nécessité d'articuler sur une situation d'action, une situation de formulation effective (c'est-à-dire celles où les formulations inadéquates reçoivent des « sanctions » du milieu matériel), celles-ci se sont vues bien souvent substituer des dispositifs didactiques formels et sans règles comme du « travail en groupes » ou des « situtations-problèmes » étranges avatars de la maïeutique

socratique. Il s'agit souvent d'un problème classique, « ouvert » par divers stratagèmes formels tels que le plonger dans un environnement insolite, supprimer des informations, ou même les questions, disposer des « distracteurs » etc. Le temps dévoré par ces « situations » qui fournissent un lot bien trop faibles de connaissances utilisables, chez un assez petit nombre d'élèves, tend à manquer au moment de l'institutionnalisation et des apprentissages plus formels.
Voici une liste de propositions qu'il conviendrait d'étudier.
1. L'utilisation des « situations ouvertes » s'est beaucoup répandue chez les enseignants, en particulier au collège
2. Elles se présentent souvent comme un moyen privilégié pour introduire des notions nouvelles, mais elles sont utilisées très souvent pour l'étude de questions ordinaires.
3. Mais les techniques et les théories didactiques qui auraient permis et limité l'usage de ces situations ne sont apparues que tardivement et n'ont pas reçu les mêmes appuis idéologiques.
4. Dans ces « problèmes ouverts »,

- l'incertitude des élèves est par définition grande donc en l'absence de rétroactions naturelles et rapides les « corrections » des idées des élèves sont tardives et sporadiques, seules quelques unes reçoivent une confirmation ou un désaveu, et après un temps considérable.
- la probabilité de réussite complète par un élève est très basse. Elle résulte ordinairement d'une construction ou d'une réflexion collective.
- l'appropriation de la solution collective par chacun des élèves dépend fortement des modalités de l'institutionnalisation continue au cours du processus. Si cette institutionnalisation s'effectue mal ou trop tard, les élèves croient à tort avoir appris.

5. Les élèves s'habituent à ces situations à basse probabilité de réussite et étendent leur comportement dans ce cas à tous les problèmes :

- réflexion très lente, temps de résolution uniformément exagéré même pour des questions faciles, acceptation de conclusions floues, de formulations approximatives ou franchement erronées.

Tout le système s'est accommodé de ces situations d'entrée « ouvertes » à très basses probabilités de réussite, auxquelles on a accepté de prêter des vertus éducatives de façon incontrôlée. Toutes les activités sont interprétées avec les mêmes concepts didactiques

6. Cette accommodation associée à la conservation d'une didactique classique inappropriée a profondément modifié les normes du contrat social d'enseignement. Les élèves, les parents et parfois les professeurs eux-mêmes considèrent (ou traitent en fait) toutes les activités de élèves avec un point de vue uniforme, confondant les phases de recherche, d'apprentissage et de contrôle

7. L'utilisation quotidienne et parfois exclusive de ces situations « ouvertes », faiblement soutenues par des techniques didactiques insuffisantes, la confusion entre les types de résultats qui y sont obtenus avec des résultats espérés d'un enseignement et d'autres phénomènes liés à ce processus ont alimenté un psychose et peut-être ont contribué à une rupture de contrat entre les enseignants et la société dont ils sont les mandataires.

8. Cette rupture a été accentuée par un changement de mode de gestion de l'enseignement par cette société. Abandonnant le contrôle classique de l'enseignement par la compréhension rationnelle de ses décisions, la société prétend désormais gérer l'enseignement sans avoir besoin de le connaître ou de le comprendre, par le simple jeu de « contrôles » et par l'inscription d'un devoir de résultat au registre des obligations professionnelles des enseignants. Cette attitude absurde ouvre la porte à des exigences contradictoires qui ont bouleversé l'enseignement et en fait permis toutes sortes de dérives

9. La diffusion des travaux issus de la théorie des situations ont donc à la fois mis en évidence les défauts des différents choix didactiques, proposé des solutions, et néanmoins contribué à aggraver les effets qu'ils voulaient combattre.

10. Une des raisons pourrait être les méprises découlant de l'emploi par les chercheurs et par les enseignants des mêmes termes et des mêmes concepts. Dans leurs rapports avec les enseignants, les chercheurs utilisent leurs termes et leurs concepts professionnels, usent de métaphores et d'exemples dans un langage familier. Ils devraient considérer ces concepts souples et pratiques mais inconsistants comme un objet d'étude mais pas comme un moyen d'étude et surtout pas comme un bon modèle. L'approche scientifique des questions d'enseignement ne peut pas faire l'économie d'un langage spécifique qui devrait être tenu soigneusement distinct du

langage et des conceptions ordinaires. Les rapports sociaux nécessaire aux travaux et à la formation ne le permettent pas pour l'instant.

11. On peut douter de la possibilité de mettre en application les conclusions indiscutables d'une recherche expérimentale et théorique, même si elle est parfaitement décrite, compréhensible et facile à réaliser de sorte qu'elle ne demande aucun aménagement ni aucun matériel, ni formation supplémentaire des enseignants. Autrement dit l'ingénierie de micro-didactique est *insuffisante* pour résoudre certains problèmes qui semblent relever de la macro-didactique, l'étude de la représentation des connaissances dans les grandes institutions de la société et de leur diffusion entre elles.

VI. CONCLUSION

A la fin d'une carrière toute orientée vers l'aide à l'enseignement par une connaissance scientifique de ses difficultés, on se prend à douter. Il reste tant de travail à accomplir et on a fait si peu ! La multiplicité des questions à traiter, la variété des approches possibles, la complexité des phénomènes, les difficultés à conduire des recherches véritablement scientifiques et expérimentales, les résistances sociales, épistémologiques et économiques de toutes sortes, semblent autant de raisons de désespérer.

Mon antidote a été le suivant. J'ai eu la chance de pouvoir observer des maîtres qui aimaient faire la classe, enseigner, s'occuper des élèves, et d'aimer les regarder faire ce qu'ils aimaient, de pouvoir saisir ces moments exaltants où des élèves s'étonnent d'une question, s'enflamment pour une idée, s'éprennent pour un savoir qu'ils veulent apprendre, comprendre, posséder, où ils s'excitent à partager leur plaisir. J'aimais imaginer, pour les maîtres, des provocations didactiques à ce genre de situations qu'ils mettaient en œuvre adroitement si elles leur plaisaient. Et j'étais toujours curieux de savoir ce qu'ils allaient en dire ou en faire. Leur désir d'enseigner et le plaisir qu'ils y prenaient était l'inducteur du plaisir et du désir de leurs élèves, et du mien. Le reste est technique, professionnalisme, travail et chance.