

## Etude de la situation fondamentale des Statistiques

### du curriculum

« PREMIERE DECOUVERTE DES LOIS DU HASARD A L'ECOLE ELEMENTAIRE »  
émission TV « atelier de pédagogie » du 30.11.76  
(texte en annexe)

### A - ETUDE D'UNE EXPERIENCE DE PROBABILITES

**1. 0.** Pour pénétrer dans le domaine des probabilités et des statistiques, il me paraît commode de commencer par une expérience. Ce choix est peut-être discutable et nous le discuterons plus tard, mais j'y tiens. Avant même de proposer à nos élèves de la découvrir, faisons cette expérience ensemble.

#### 1 - POURQUOI FAIRE BEAUCOUP D'EXPERIENCES ?

##### 1. 1. L'expérience

Je prends un grand sac opaque dans lequel je mets une trentaine de jetons pour jeu de dame blancs et noirs mélangés, à poignées, sans m'occuper de savoir s'il y a plus de blancs ou de noirs. Maintenant, je prends trois sacs opaques eux aussi plus petits, que je marque des lettres A, B, C, pour bien les reconnaître.

En les plaçant à tour de rôle dans le grand sac, sans regarder, je mets dans chacun cinq jetons. Si je n'ai pas triché, j'ignore bien sûr la composition de chaque petit sac.

Le jeu consiste à deviner le plus de choses possibles sur le contenu de chaque petit sac sans jamais regarder ce qu'il contient. (Nous pouvons cependant vérifier à travers le tissu que nous avons bien 5 jetons par sac).

*On a le droit pour cela de procéder à des EPREUVES ELEMENTAIRES ou TIRAGES un tirage consistera :*

- a) à bien secouer les jetons pour les mélanger,*
- b) à plonger la main dans le sac, à saisir un jeton, le sortir du sac, regarder sa couleur*
- c) à le remettre dans le sac.*

Nous supposons qu'alors les jetons ne peuvent pas être distingués les uns des autres. Cela veut dire que nous ne faisons pas de marques dessus.

##### 1. 2. Premières réflexions : premières expériences

Faites quelques expériences. Avez-vous noté quelque chose ? Quoi ? La date ? Le mois de l'année ? De quel pied vous êtes-vous levés ce matin ? Combien de fois avez-vous tiré un jeton ? avez-vous noté les résultats des épreuves ? Les avez-vous numérotés et rangés dans l'ordre ?

Quelles questions vous êtes-vous posées ? Quelles sont celles auxquelles vous pouvez déjà répondre ? Le choix des renseignements utiles pour la recherche des réponses n'est pas toujours évident.

• Voici par exemple les premiers résultats que j'ai obtenus par cette expérience.

Sac A	Sac B	Sac C
N	B N	N

(fig. 1)

• L'examen de ce modeste résultat permet déjà de répondre à quelques questions :

- Y-a-t-il des jetons noirs dans tous les sacs ?                   oui.
- Et des blancs ?    dans le sac B, oui.
- Dans les autres ?    nous ne savons pas.

• Et déjà, nous prévoyons que l'on peut espérer à l'aide de nouvelles épreuves la réponse à d'autres questions (sans que cela soit certain toutefois).

- Par exemple, le sac A contient-il des jetons blancs ?

Continuons les triages :

Sac A	Sac B	Sac C
N	B	N
B	N	B
B	B	N
B		N

(fig. 2)

• Nous savons maintenant de façon certaine que tous les sacs contiennent des jetons des 2 couleurs.

Si nous avons tiré d'un certain sac la suite NNNNNNNNNNNN, pourrions-nous conclure de façon certaine : « ce sac ne contient pas de jeton blanc » ? non, "mais nous penserions" il est possible que ce sac ne contienne aucun jeton blanc".

Il y a une grande différence entre la conviction avec laquelle nous disons ces deux phrases : "il y a dans le sac A des jetons blancs" "il n'y a pas de jeton blanc dans le nouveau sac".

La première est acquise par une sorte d'expérience achevée, si familière que sa conclusion est, à partir d'un certain âge, évidente et sans mystère.

La deuxième est acquise de façon implicite par des expériences du genre de celles que nous faisons ici et acquise très jeune si l'on en croit Piaget <sup>(1)</sup>.

---

<sup>1</sup> (\*) La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.

Mais elle nécessite des justifications rationnelles qui font appel à des modèles beaucoup plus complexes.

*Pour l'instant nous savons que lors de chaque EPREUVE élémentaire, deux EVENEMENTS seulement sont susceptibles de se produire :*

- "il sort un jeton noir"

- "il sort un jeton blanc"

Si nous avons numéroté les jetons 1, 2, 3, 4, 5, alors les événements susceptibles de se produire auraient été :

- "il sort le jeton 1"

- "il sort le jeton 2"

mais alors il aurait été facile de connaître la composition du jeu.

*Les phrases que nous prononçons à propos du contenu des sacs sont des "hypothèses" ou des "conjectures" (tant que nous ne leur attribuons pas une valeur : "vrai", "faux", "certain", sinon, elles deviennent alors des assertions).*

### **1. 3. Les comparaisons justifient de nouvelles expériences**

• Nous avons donc 3 sortes de déclarations :

a) sur les expériences passées : des résultats

b) sur celles à venir : des prévisions

c) sur le contenu du sac : des hypothèses

dont seules les premières, (a) sont a priori certaines - acquises par des procédés sûrs.

Mais ces sortes de déclarations sont liées au moins implicitement ; "il sort des jeton noir du sac C" *donc* " C contient un noir" *donc* l'évènement "il sort un noir" peut se réaliser à la prochaine épreuve.

*Ces liaisons que nous utilisons souvent sans y penser, nous allons les découvrir et les étudier presque en même temps que nos élèves.*

• Intéressons-nous à une prévision, par exemple, à la couleur du prochain tirage dans le sac A. Engageons un pari 1 contre 1 à ce sujet. Vous et moi, parions ensemble contre une troisième personne. Si je propose de parier pour "il sort un jeton noir" serez-vous d'accord ? Pourquoi ?

- parce qu'il est sorti plus de blancs du sac A ?

mais si les blancs sont sortis c'est aux noirs de se montrer maintenant, ne le pensez-vous pas ?

- vous préférez penser que s'il est sorti plus de blancs c'est à cause du contenu du sac, lequel ne va pas changer et donc on va continuer à voir sortir des blancs.

• Si cette dernière idée est juste les tirages déjà effectués ressemblant au contenu des sacs devraient se ressembler entre eux.

Pourtant, à un jeton noir, on voit succéder ici et là, tantôt un jeton noir, tantôt un blanc (dans tous les sacs) les résultats à une épreuve ne se ressemblent donc pas d'une expérience à une autre.

Parions néanmoins suivant notre intuition pour 1 blanc.

Tirons dans A, il sort N (perdu) rejouons, il sort N, puis B, et encore B.

Je crois comme vous, que si je continue à jouer, je pourrais gagner car je crois qu'il sortira plus de blancs que de noirs.

Continuons donc les tirages : B N B N B B B B N B B N B B N N B B B N B.

• Jusqu'ici, j'ai eu raison (mais je ne suis pas sûr que cela va continuer) il est sorti 10 noirs et 20 blancs. J'ai fait 30 tirages.

• Puis-je en conclure que le sac A contient plus de blancs que de noirs ?

Si nous recommençons cette expérience, le résultat serait-t- il le même ?

Vérifions :

N B N B N B B B B N B N B B B B N B N B N N N B N N B B N:

13 noirs, 17 blancs.

• Ainsi ces questions nous conduisent à recommencer l'expérience qui comprendra plusieurs tirages : 30 par exemple, ici,  $k = 30$ .

*Ces 30 tirages constituent une nouvelle épreuve - composée de plusieurs épreuves élémentaires. A cette épreuve sont associés de nouveaux évènements.*

Par exemple, l'évènement "il sort plus de blancs que de noirs" s'est produit dans l'épreuve composée de 30 premières épreuves élémentaires relatives au sac A ainsi que l'évènement "il est sorti 10 noirs et 20 blancs".

*Tous les évènements que l'on veut comparer doivent être susceptibles de se produire dans chacune des expériences que l'on veut descriptibles et reproductibles comme une épreuve unique.*

Il faut donc que ces expériences comportent le même nombre d'épreuves élémentaires.

#### 1. 4. Comparaisons des résultats entre eux

• Une question nous vient :

y a-t-il un sac dans lequel notre pari paraît plus facile ?

Evidemment celui où il est sorti le plus de blancs.

• Pour vérifier, faisons donc avec chaque sac plusieurs suite de 10 épreuves.

Sac A	Sac B	Sac C
B N B B B B B N B B B N B B B B B N B B	B N N N B N B N B N B N N N B N B N B N	B N N N N B N B N B B N N N N B N B N B
N B B N N B B B N B N B N B N B B B B N	B B N B N B B B B B N N N B N B B N N B	B N N N N N N N N N B N N N N N N N N N
B N B B B B B N B N B N N N B N N B B N	N B N N B N B N B B	N B B N N B N N N N

(fig. 3)

• Quels évènements sont réalisés ? Lesquels nous intéressent ? Pourquoi ?

Sac A. : Dans la première épreuve il est sorti plus de blancs que de noirs.

• Pour répondre à certaines questions nous construisons, avec les résultats des épreuves, des effectifs : nombre de blancs, nombre de noirs, nous aurions aussi pu chercher le nombre de fois qu'un noir suit un noir, si nous avions vu que cela avait un rapport avec notre objectif.

• Il n'existe pas d'évènements privilégiés si nous ne nous posons pas de questions préalables.

Les évènements dont on constate la réalisation sont choisis parmi bien d'autres, parce qu'on croit qu'ils ressemblent mieux à ceux qui peuvent se produire ou aux hypothèses qui nous intéressent.

En quoi ces nouveaux tirages nous apprennent-ils au contenu ? Comment pourraient-ils ressembler au contenu - toujours le même du sac alors qu'ils mne se ressemblent guère entre eux ?

Il semble que le problème se repose de la même façon que précédemment et que l'on doive considérer maintenant des suites de suites d'épreuves comme on a considéré des suites d'épreuves pour vérifier les prévisions qui venaient à l'esprit : ...

Quelles informations pourraient alors apporter de nouvelles expériences : de nouvelles hypothèses ? une conviction meilleure pour certaines déjà formulées ? On pourrait par exemple se convaincre mieux que C contient plus de jetons noirs que de jetons blancs. Mais serons-nous alors convaincus ?

La crainte de n'avoir pas avancé sensiblement dans notre quête peut inciter à renoncer.

### **1. 5. Comparaison des résultats avec les différentes hypothèses**

Nous avons pourtant progressé.

• Toutes les hypothèses que nous pouvons formuler sur la composition du sac peuvent se ramener à une, et une seule des suivantes :

chaque sac contient :

soit **5** jetons noirs (ceci est exclu)  
soit **4** jetons noirs et **1** blanc  
soit **3** jetons noirs et **2** blancs  
soit **2** jetons noirs et **3** blancs  
soit **1** jeton noir et **4** blancs

soit **0** jeton noir et **5** blancs

(ceci est exclu)

**1ère idée** : Il faut pouvoir rapprocher les résultats des hypothèses, l'idée vient alors assez régulièrement aux enfants de considérer des épreuves de cinq tirages (ou épreuves élémentaires) s'il y avait eu 7 jetons par sac, ils auraient considéré des épreuves de 7 tirages.

Nous pouvons réécrire l'ensemble des premiers tirages en les regroupant par 5. Le tableau précédent devient alors :

Sac A	Sac B	Sac C
N B B B N - N B B B N	B N B B B - B N B N N	N B N N N - B N N N N
B N B B B - B B N B B	B N N N B - N B N B N	B N N N N - B N B N B
N B B N N - B B B N B	B B N B N - B B B B B	B N N N N - N N N N N
N B N B N - B B B B N	N N N B N - B B N N B	B N N N N - N N N N N
B N B B B - B B N B N	N B N N B - N B N B B	N B B N N - B N N N N
B N N N B - N N B B N	B B N N B - B N N B N	N N N N N - N B N N N

(fig. 4)

**2ème idée** : Pour comparer les résultats des expériences (désignées par leur numéro) et découvrir leurs ressemblances ou leurs différences, classons-les. Par exemple, classons-les suivant que l'évènement "il sort plus de jetons blancs que de jetons noirs" est réalisé ou non

	Sac A	Sac B	Sac C
Plus de blancs	1 2 3 4 5 -8 -9 -10	1 5 6 -8 -10 -11	4
Plus de noirs	5. 7. 11. 12.	2.3.4. 7. 9. 12	1 2 3 5 6 7 8 9 10 11 12

(fig. 5)

Ou tout simplement d'après le nombre de jetons blancs tirés dans - chacune. Exemple, dans la 7ème expérience, dans le sac B, il est sorti 1 blanc (\*\* P. 9\*\*) : (et 4 noirs).

Nombre de blancs sortis :	Sac A	Sac B	Sac c
0			6 - 8 - 11
1		7	1- 2 - 3 - 5 - 7-10 - 12
2	5 - 7 - 11 - 12	2 - 3 - 4 - 9 - 12	9
3	1 - 2 - 10	5 - 8 10 - 11	4
4	1		
5	6		

(fig. 6)

Expériences qui ont réalisé ces évènements.

Nous obtenons ainsi la distribution des évènements.

Distribution des effectifs : Si nous sommes d'accord sur le fait que le moment où on fait une expérience n'a pas d'influence sur ses résultats - cela resterait à vérifier - au lieu de regarder la suite des expériences, il suffit de compter combien il y en a par catégorie.

Nous obtenons alors un nouveau tableau d'effectifs :

- chaque ligne concernera un des évènements (incompatible avec tous les autres) susceptibles de se produire au cours de l'épreuve de 5 tirages :

- il sort 0 blanc

- il sort 1 blanc

....

- il sort n blancs.

Ainsi tous les cas sont envisagés.

[*Un tel ensemble d'évènements est dit exhaustif*]

*Un système exhaustif d'évènements est un ensemble d'évènements tels qu'au cours d'une épreuve :*

*- L'un d'eux se produira certainement*

*- et celui-là seulement - aucun autre ne peut se produire en même temps.*

*Exemples :*

*A chaque événement on fait correspondre son effectif dans l'expérience étudiée. Cette correspondance est appelée "distribution des effectifs".*

Regardons cette distribution des effectifs :

Certaines différences apparaissent. C paraît toujours très différent de A et de B, alors que A et B se ressemblent encore. Mais qu'est-ce qui est différent ?

Observons de plus près :

D'abord l'évènement le plus fréquent. Cet évènement qui a le plus grand effectif s'appelle le mode.

Le mode du sac C est "il sort un blanc" (effectif 7)

Le mode du sac B est "il sort deux blancs" (effectif 5)

Le mode du sac A est "il sort quatre blancs" (effectif 5)

Par contre, on remarque que les évènements dont l'effectif n'est pas nul sont voisins les uns des autres : la distribution de sac A s'étend de "il sort 2 blancs" à "il sort 4 blancs".

Celle du sac B s'étend de 1 à 5.

Celle du sac C s'étend de 0 à 3.

Pouvons-nous tirer maintenant certaines conclusions ?

Il faudrait peut-être avoir un plus grand nombre de résultats dans chaque classe pour voir comment se différencient les trois sacs.

Effectuons ces tirages -

Voici mes résultats.

n° des expériences	A	B	C
13	N N B B B	B B N B N	N N N N N
14	B B B B N	N N B N B	B N B N N
15	B B B B B	N N B N B	N N N N N
16	N B B N B	B B N B B	B N N N N
17	B N N N B	N B B N B	N N N N N
18	N B B N N	N B B B B	N N N N N
19	N B N N N	N N B B N	N N N N N
20	B N N N N	N N B B N	N N N N N
21	N B B B N	B B N B N	N N N N B
22	N N B B B	N B B N N	N N N N B

(fig. 7)

Et voici maintenant la distribution des effectifs : (fig. 8)

Nombre de blancs dans une suite de 5 tirages	A	B	C
0			☐ ☐
1	┌		☐ ☐
2	☐	☐ ☐	┌
3	☐ ┌	☐ ┌	
4	☐	┌	
5			

(fig. 8) : Nombre d'expériences réalisant ces événements.

Au lieu de porter comme dans la figure 6, le numéro des expériences en face de l'évènement qu'elles sont réalisées, nous nous sommes contentés de mettre une barre à chaque fois, par exemple six suites de 5 tirages dans A ont réalisé l'évènement "il sort deux blancs" (les expériences 5, 7, 11, 12, 17, 18).

Nous visualisons ainsi le tableau des effectifs en un diagramme appelé histogramme : (fig. 8).

On perd ainsi certaines informations : par exemple, on ne peut plus voir que dans le sac C il est sorti une étonnante suite de 26 noirs. A la 16ème, 17ème, 18ème, 19ème, 20ème et 21ème expérience. Mais on se détache de ces événements particuliers pour s'intéresser à des événements moins variables, et plus en rapport avec l'hypothèse à tester :



Les différences entre A et B ne semblent guère se confirmer (mode de A : 3 ; mode de B : 2) par contre C semble toujours différent de A et de B. Vos résultats ressemblent-ils aux miens ?

## 1. 6. Choix d'une hypothèse

Ainsi on entrevoit une méthode de choix entre les diverses hypothèses : on cherche une caractéristique de la distribution des effectifs qui associe à toute distribution obtenue une des hypothèses, de préférence aux autres.

**Critères intuitif** : Par exemple, je suis convaincu intimement que le sac C contient 1 blanc et 4 noirs et peut-être le pensez-vous aussi ? Cette hypothèse me semble mieux convenir d'abord, intuitivement, puis en y réfléchissant parce que le mode de C est 0 ou 1, parce qu'on sait bien qu'il n'y a pas 0 blanc dans C et parce que les expériences fournissant 2 blancs sont trop rares.

*Cela montre que nous avons acquis un "modèle implicite" qui nous permet, sur vingt ou trente expériences de nous faire une opinion. Nous ne savons pas exactement de quoi nous tenons compte ni comment le raisonnement s'effectue mais le fait est là et dans certains cas, notre conviction est assez ferme. Pour d'autres notre intuition échouera.*

Quelques expériences ont montré que les enfants ont assez tôt la capacité de prévoir ainsi des résultats dans certaines situations aléatoires en tenant compte des résultats observés si les différences entre les distributions sont assez nettes. Mais ils sont souvent incapables de découvrir, d'expliquer de quoi ils ont tenu compte pour avancer leurs conclusions. Or cette explication est indispensable pour tester, pour éprouver, le critère de choix retenu.

### Exemple de critère de choix d'une hypothèse

#### . Le mode

. Le premier critère qui vient à l'idée c'est de choisir le mode - l'évènement le plus fréquent - comme indicateur du contenu du sac.

On pourrait donc avancer suivant ce critère, après la 12ème expérience :

A contient 4 blancs, B contient 2 blancs, C contient 1 blanc

après la 22ème expérience :

A contient 3 blancs, B contient 2 blancs, C contient 1 blanc.

Mais on voit

- d'une part, que les hypothèses que le critère permet de retenir varient avec le nombre d'expériences

- d'autre part, que l'effectif de l'évènement le plus fréquent n'est pas très différent de l'effectif des évènements voisins, c'est pour cela d'ailleurs que le mode varie.

#### .La différence d'effectif des classes

C'est pourquoi les enfants recherchent assez souvent, à ce moment de l'expérience, et sans analyser leurs raisons, des critères de choix d'une hypothèse plus ou moins ingénieux exacts ou efficaces, mais qui présentent si possible les qualités - d'être stables quand le nombre d'expériences augmente.

- de trancher nettement entre les hypothèses en présence.

Par exemple celui-ci :

"Nous allons tirer jusqu'à ce que l'effectif d'un évènement dépasse de 2 celui de la classe qui la suit" ; cet évènement sera pris comme indicateur du contenu du sac.

Appliqué à mes résultats, ce critère donne à la douzième expérience :  
C contient 1 blanc et 4 noirs.

À la vingt-cinquième expérience, aucune conclusion nouvelle.

### **Qualités d'un critère**, Test de ces qualités

Nous dirons qu'un critère est fidèle s'il donne très fréquemment (disons 95 fois sur 100 par exemple) la même réponse, lorsqu'on recommence de très nombreuses fois le même ensemble d'expériences.

Nous dirons qu'il est net ou précis, si le nombre de cas où il ne fournit pas de réponse est faible (par exemple inférieur à 2 %).

Il est juste si l'hypothèse qu'il propose est très souvent la bonne. Par exemple plus de 99 fois sur 100.

Il est efficace si la conclusion est obtenue à l'aide d'un petit nombre d'expériences.

Nous ne savons rien a priori de la valeur des critères que nous pourrions avancer. Nous pourrions bien sûr ouvrir les sacs, vérifier si la réponse est juste, recommencer. Pour chaque critère, nous pourrions évaluer expérimentalement, tester sa fidélité, sa précision, sa jeunesse, son efficacité et choisir le meilleur.

Cela demandera de très nombreuses expériences systématiques, de plus les résultats obtenus seront eux-mêmes aléatoires, c'est-à-dire qu'ils varieront un peu d'une série d'expériences à une autre, et seront caractérisés par des distributions d'effectifs. Il faudra donc là aussi décider de nouveaux critères de choix permettant de dire que tel critère est plus juste que tel autre... ou que le nombre d'expériences est suffisant...

Il n'y a pas de raison que cela s'arrête. C'est pourquoi nous nous interdirons, non pas de faire des expériences, mais d'ouvrir ces sacs-là. Nous avons fait de même avec les enfants afin de favoriser la réflexion mathématique.

Pouvons-nous déjà choisir un critère, ou trouver un moyen d'en choisir un ? quelles qualités devrait-il avoir ?

Si le critère de choix d'une hypothèse est juste au sens où nous l'entendons, il est nécessairement fidèle ; c'est-à-dire que s'il donne fréquemment la réponse juste, il donne souvent la même réponse si on recommence souvent la même expérience. Ce que l'on doit gagner à chaque expérience nouvelle n'est donc pas une information qualitativement différente, c'est de la conviction une certitude plus grande que l'hypothèse indiquée par le critère est la bonne.

Il faut que le critère donne des réponses d'autant meilleures et sûres que le nombre d'expériences sur lesquelles on l'applique est plus grand. Inversement, si le nombre des hypothèses augmente, il est plus difficile de choisir entre elles. On doit pourtant arriver à une précision suffisante sans changer de critère, et on voit qu'on ne le pourra qu'en augmentant le nombre d'expériences.

## CONCLUSION :

Il faut revenir à l'expérience mais après notre première tentative, nous savons mieux ce que nous cherchons et comment nous pouvons y arriver : il faudra entre autres, faire beaucoup de tirages.

Les tirages sont assez longs et fastidieux aussi je les ai faits pour vous. J'ai fait avec un appareil mille tirages dans chaque sac A, B et C. Nous les trouverons dans l'annexe ci-après, et nous prendrons là les tirages que nous voudrons quand nous le voudrons.

Les enfants de l'Ecole Michelet ont inventé des appareils plus rapides que les sacs : des bouteilles de plastique où l'on met des billes et dont on obstrue une partie du col avec une épingle double pour qu'une seule bille puisse descendre (fig.10).

Nous pouvons aussi utiliser un programme d'ordinateur (\*)

Comment allons-nous utiliser toute cette information pour résoudre notre devinette ?

.