2015

Commentaires 2015 de Guy Brousseau sur son ouvrage de 1964 (v4)[1]

G. Brousseau, G., Les Mathématiques du cours préparatoire, premier fascicule, Dunod, 1965[2].

Prologue

Un étrange curriculum ? Une provocation et un manifeste !

Ce petit ouvrage apparaît comme un manuel, ou plutôt un cahier d'exercices, destiné à des élèves de 6 ans pour leurs quatre premiers mois d'études. Ils ne savent pas encore lire, donc aucun texte ne s'adresse directement à eux. Ils n'ont à considérer que des dessins ou des graphes et à les compléter. Les consignes présentées en marge sont formulées comme celles que pourraient faire des professeurs laconiques s'ils suppléaient à la parole par l'exemple et par le geste. Mais il n'a jamais été publié ni même écrit de livre pour les maîtres qui auraient voulu l'utiliser pour un enseignement effectif.

En réalité, cet ouvrage est un *manifeste* en faveur d'une approche moderne de l'enseignement des mathématiques. Il est même une véritable *provocation* par le nombre des dispositions traditionnelles qu'il transgresse. Il exprime[3] simplement l'idée que l'enseignement des mathématiques modernes permet, et même nécessite, une nouvelle approche des dispositifs et des méthodes d'enseignement.

Il faudrait évoquer la situation en 1962-1963, au moment où ce livre à été conçu et rédigé. Remis à l'éditeur et au dessinateur fin 1963 ou début 64, il paraît en octobre 64, daté de 1965 comme il est d'usage. Il précède le flot des publications à visées didactiques proposant des interprétations de ces « mathématiques modernes » dont tout le monde commence à parler.

Les conceptions suggérées par ce livre sont-elles des illusions, et la provocation est-elle une supercherie ? La suite révèlera que cet ouvrage présente, à côté de maladresses et de fictions caricaturales assumées, une collection d'hypothèses qui serviront de base à toute une série de travaux scientifiques qui tendent à faire de l'enseignement des mathématiques un objet d'étude pour une science renouvelée, la Didactique des mathématiques. Les visiteurs de cette ébauche pourront, du troisième millénaire où ils se trouvent, exhumer les traces archéologiques de la naissance de certains des principaux thèmes de la théorie des situations, que cet ouvrage précède d'une dizaine d'années.

Les curieux trouveront ci-après a) d'abord un commentaire et des explications pour certaines des particularités des exercices de ce petit ouvrage, b) ensuite une liste des expériences et des ouvrages ultérieurs qui s'en sont inspiré avant la création du COREM, c) enfin un inventaire de concepts et d'idées portés par les actions évoquées dans les petits dessins et qui seront, par la suite, des questions fondatrices de l'étude des situations et des phénomènes de Didactique.

[1] Lire sur ce site la traduction de ce texte, en espagnol, pour le "**Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática. Una mirada epistemológica y empírica (**Santa Marta, Colombia 2015

[2] Sur ce site : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2015/04/65-Dunod.pdf

[3] Il avait bénéficié d'une recommandation de la ville de Paris pour ses écoles.

******

I

La visite

A. la table méthodique des matières.

Les plus évidentes de mes intentions apparaissent dans les quatre pages de la « table méthodique des matières » avec la répartition des exercices dans le temps, les termes du programme officiel, le nom moderne des notions mathématiques travaillées, l'objet des exercices et les techniques, les éléments de logique étudiés ou utilisés à cette occasion et les motivations ou les origines sensorielles. Ces pages annoncent l'introduction de nouveaux concepts logicomathématiques et déclarent s'inspirer des apports de la psychologie cognitive et surtout de l'épistémologie génétique. Des termes savants comme « cardinal » ou « appartenance » évoquent des concepts nouveaux qui interviennent dans la conception de l'enseignement visé. Mais aucun de ces termes n'apparait, ni dans le langage des élèves ni dans celui des professeurs, sauf les symboles mathématiques. Cette précaution avait pour objet de prévenir une tendance des enseignants à *présenter* les connaissances mathématiques en les nommant, en les décrivant, en les illustrant d'exemples et d'explications au lieu seulement de les utiliser et de les faire utiliser à bon escient.

B. Les premières pages : leçons non verbales, actions non verbales

Les élèves font connaissance avec les personnages du Cirque et identifient quelques objets typiques de ce milieu. Cet univers facilitera pour les élèves le jeu des représentations, une évocation et un écho de leurs propres aventures et des motifs de leurs activités. La page 2 évoque une leçon donnée réellement en classe par la maîtresse. Elle remet à chaque élève un carton avec une sorte de figure simple. Toutes sont différentes. Elle met un carton au tableau, l'enfant qui possède le même motif doit venir le montrer à côté de la maîtresse. Elle peut obtenir ce résultat la première fois sans dire un mot, en allant chercher un premier enfant et en le guidant sans mot dire. Elle montre un autre motif et attend visiblement que l'enfant vienne… Elle obtient un premier succès, puis d'autres, toujours sans dire un mot. Individuellement les élèves retrouvent la situation suggérée dans le cahier, seulement le déplacement y est représenté par une flèche, ébauche d'un instrument universel pour représenter un couple. La façon non verbale d'introduire la pratique de cette flèche dans la classe n'est pas évoquée dans le manuel. La méthode n'est pas difficile à *imaginer*. Il suffit de « montrer » et de « faire imiter ». Les trois derniers exercices qui demandent « que doit dessiner la maîtresse pour faire venir tel élève ? » auraient dû être présentés en premier.

Les exercices présentés ici visent à faire utiliser par les élèves des signes iconiques pour exprimer ou accompagner des actions, en soi assez simples. Avec les enseignants, la difficulté principale est de leur faire pratiquer eux-mêmes cette même méthode dans leur enseignement : utiliser les signes à bon escient, approuver les formulations correctes et à l'occasion corriger les usages inappropriés plutôt que les discours. Par exemple, les flèches employées dès la première leçon représentent un mouvement d'élève vers le tableau, (dans le contexte un lien aurait suffi) ; les signes engendrés par les formes et les couleurs représentent des élèves. Mais il est clair que l'enseignant a dû réaliser le jeu avec les élèves avant de leur proposer l'exercice. Et le livre suggère que le professeur peut parfaitement faire jouer les élèves en suggérant ce qu'ils ont à faire simplement par l'exemple, sans prononcer un mot.

C. Vers les situations adidactiques…

Il est évident que le jeu des informations ou des consignes à deviner, sans parole, n'est utile que si, en comprendre le sens, établit une complicité avec l'élève. Ce n'est pas un exercice, ni une leçon à apprendre, c'est un jeu. Toutes les leçons auront comme cela « un petit quelque chose » à faire, à deviner, personnellement pour montrer que l'on comprend, que l'on participe. Le genre de petit signe qui ne doit en aucun cas être exigé, montré, rabâché… celui qui n'invente pas imite. Ce genre de jeu sera souvent évoqué dans les leçons suivantes.

Ces devinettes préfigurent un genre de rapport didactique qui sera bientôt précisé et formalisé sous le nom de situations a-didactiques. Des situations dans lesquelles la bonne réponse s'impose par son adéquation, mais où elle n'est pas encore exigée, expliquée, et où les manquements ne sont pas encore constatés, décomptés, reprochés, punis ! Les conditions qui justifieraient l'usage direct de ces signes de la part des élèves n'étaient pas faciles à exposer au professeur dans cette fiction non verbale destinée aux seuls élèves !

Il faudra plusieurs années de réflexion et d'expériences pour avoir des exemples de situations qui justifient la bonne réponse sans que la mauvaise ne tue le problème, parce que pour produire la bonne il aura fallu développer la connaissance ou le raisonnement idoine voulu. Elles permettent donc à l'élève des essais successifs, mais pas les stratégies exhaustives aveugles (genre QCM). Les situations ont des structures différentes selon que la (ou une) bonne réponse *doit* s'exprimer par une décision non verbale : une « action », ou par un message informatif : une « communication » réelle (le destinataire ignore la bonne réponse) ou par une déclaration (un avis, une explication, une preuve,…)

Le travail *d'ingénierie mathématique* consiste à concevoir ou identifier les conditions que l'élève peut et doit investir, seul, pour finalement exercer *une connaissance précise*, et la comprendre pour des raisons strictement mathématiques. Ces raisons ne doivent pas lui être fournies au préalable. Ce travail comprend, entre autres, le choix d'un dispositif spécifique de la connaissance mathématique visée, l'évaluation de la probabilité de réussite individuelle, le calcul de l'effet multiplicateur d'un réseau coopératif de communications[4] etc.

Et malheureusement ce travail n'est pas généralisable, il n'est pas déductible entièrement de principes généraux indépendants du concept mathématique visé. A priori, chaque énoncé mathématique est original et réclame une genèse et une preuve spécifique ! Vouloir faire « réinventer » chacune des connaissances mathématiques par les élèves serait une entreprise perdue d'avance.

Heureusement il suffit de réserver une proportion raisonnable de temps à ce type d'activités pour entretenir l'appétence des élèves et le confort des apprentissages essentiels. L'intérêt de ces épisodes mathématiques justifie, aux yeux des élèves comme à ceux des mathématiciens eux-mêmes, les classiques efforts d'apprentissage formel (drill), où la réponse est enseignée avant d'être

[4] Le travail en réseau coopératif spécifique (il ne s'agit pas d'une simple mise en groupes parallèles) permet à une classe entière d'aborder, comprendre et résoudre des problèmes qui n'auraient été compris, résolus et appris que par un trop petit nombre d'élèves travaillant individuellement. Les idées ou les informations recueillies par certains servent à d'autres pour d'autres tâches… Ainsi les connaissances nécessaires apparues ici ou là, *percolent* d'un poste de travail à l'autre. Un excellent exemple de ce processus est donné par Imre Lakatos dans Preuves et Réfutations essai sur la logique de la découverte mathématique.

« apprise ». La solution est un équilibre dialectique subtil entre ces deux types de situations didactiques. Il n'est pas inutile à qui veut « faire » de la poésie, d'apprendre quelques bons textes par cœur.

C'est seulement en 1970, à l'occasion de la création des IREM que j'eus la possibilité de formuler les bases d'un processus de mathématisation et d'en donner un exemple[5] (ce qui allait devenir plus tard la « théorie des situations mathématiques »). N. Picard, dans le même ouvrage, parlait de « mathématisation des situations », le sens était tout différent.

D. Une pratique algébrique : des objets et des déclarations

Cet enseignement « non verbal » de pratiques bien précises permettra le moment venu d'introduire la formulation adéquate en distinguant naturellement le nom de la chose et le nom du signe. Il existe de nombreux jeux qui consistent à deviner un mot par divers contextes (Ex : le jeu consiste à poser des questions pour deviner l'action que représente le verbe « tirlipoter »). Ainsi l'ouvrage peut présenter, sans phrases, non seulement des objets nouveaux mais aussi des déclarations et donc des pratiques algébriques. Les élèves auront à traiter non seulement des objets et leur nom (éventuellement un signe), mais aussi des classes d'objets et leur nom, des nombres et leurs noms, des relations : « égalité », « plus grand que »[6]… même sous forme de déclarations (« R est vraie »). Ainsi Il s'agit de faire traiter et utiliser par les élèves, non seulement des nombres et des dessins d'objets ou de personnages mais aussi des énoncés mathématiques.

E. Isomorphismes, 4 grandeurs, 1 opération, 3 relations, 1 système formel

Ces énoncés, par exemple : « 4 + 5 > 3 + 5 », sont traités comme des signifiants qui prennent des « significations » différentes dans cinq univers dans chacun desquels œuvre un personnage principal (ils confrontent leurs résultats page 52) : (a) le petit singe compte les *collections d'objets*, (b) Bubu met bout à bout des *longueurs de baguettes*, (c) Pipo manipule des cubes de même taille mais de *différentes masses* entières, (d) Mr Loyal compte la *monnaie,* enfin Zanzi tient *les écritures.*

Seuls sont introduits comme signes grammaticaux :

- Le signe d'opération « + », qui prend un sens différent mais précis dans chaque univers : réunir, mettre bout à bout, dans le même plateau. Le signe « - » devait être introduit un peu plus tard par un processus différent, en prolongement de l'écriture de la quantité inconnue présentée page 50. Le paradigme { +, et} est formé des signes « + » et « et ». « 3 et 4 » a un sens différent de « 3 + 4 ». En arithmétique élémentaire « 3 + 4 = 7 » est interprété ordinairement comme la représentation temporelle dynamique d'une action et de son « résultat » : « je dispose 3, j'ajoute 4, je compte le tout et je trouve 7 ». Ici le sens de « + » est descriptif et statique.
- 3 signes de relations : { =, <, > } qui peuvent apparaître à la même place dans les formules. Ce paradigme donne au signe « = » une fonction et un sens précis. Dans cet ouvrage, « = », « < » et « > » sont des relations entre deux « grandeurs » que l'on compare. Les élèves

[5] G. Brousseau, Processus de mathématisation, un exemple de processus de mathématisation : l'addition dans les naturels : CP, CE1. *La mathématique à l'école élémentaire,* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 1972, 428-457, http://guy-brousseau.com/952/processus-de-mathematisation/

[6] Pour que le signe « = » reçoive une signification et soit compris correctement il faut qu'il soit choisi parmi plusieurs alternatives. Son usage ancien à l'école primaire n'en faisait qu'une ponctuation. Il aurait pu se lire « résultat »

peuvent écrire des observations ou des prévisions du genre « 3+4> 5+1 » pour prévoir une comparaison de taille ou de poids…

Chaque exercice suggère au professeur d'organiser des types d'activités similaires. Les réponses non désirées des élèves ne sont pas des fautes, ce sont des occasions de montrer « ce que le professeur souhaite qu'on fasse ou dise » dans ces situations.

Les jeux avec des nombres cachés sont des devinettes qui sont des résolutions d'équation. Les pages 56 et 57 montrent comment pourraient s'organiser à la fois la manipulation et l'addition de vecteurs et la numération décimale... Un délire si on les comprend comme des exemples pour un cours mais une suggestion très plausible pour un curriculum ultérieur.

Les exercices sur l'ordre naturel sont des gammes inhabituelles par rapport à la comptine rituelle.

La suggestion des baguettes n'est pas une invention. Le fait qu'elles soient de longueurs (entières), de couleurs et de sections différentes permettait certains exercices mais elles n'étaient pas une copie du matériel de Cuisenaire, ou de celui de Kern qui existaient précédemment. Elles permettaient de poser des questions de logique, mais elles n'étaient pas un système comme le matériel Diénès qui arriva en France quelque temps après.

L'ouvrage suggère de provoquer d'abord des actions et des observations dans des conditions un peu incertaines qui demandent sans pression une petite adaptation de la part de l'élève, en réponse à des gestes, à des intentions explicites ou à deviner. L'usage est établi en réponse à des conditions données (connues du professeur mais pas délimitées pour les élèves). Par exemple l'élève doit demander le matériel nécessaire pour faire un petit banc dont chaque pied est composé de deux baguettes de 3 bout à bout. Mais il ne dispose que des baguettes prises dans la boîte 2. L'élève est conduit à envisager implicitement que 3+3 = 2+2+2 avant de l'écrire. La réponse de l'élève s'adapte à des circonstances. Il agit, communique avec ses moyens et plus tard, ce qu'il connaît est identifié comme un objet d'étude et de savoir. L'inversion par rapport aux pratiques de l'époque est déjà assez nette : ces dernières consistaient à mettre en avant un texte qui présente les éléments de savoir textuels précis à apprendre isolément, par répétition, avant de les « appliquer » ensemble dans des constructions progressives de concepts plus complexes : le nom, l'objet, l'usage, la reproduction, l'application, avec éventuellement l'explication, chacun faisant l'objet d'un apprentissage sur le même modèle : la répétition et la conformité à la demande du professeur.

Il est clair néanmoins que ce curriculum est seulement un catalogue de possibilités d'utilisation des concepts mathématiques fondamentaux dans des exercices élémentaires, destinés à faire pratiquer les connaissances basiques de la mathématique moderne dans l'apprentissage des connaissances classiques. Mais sans l'appui ultérieur des mots précis, exacts et stables, au moment opportun, tout cela ne constituera pas un curriculum viable. Les processus d'apprentissages suggérés ont quelque chose d'un dressage d'animal à cause de l'insistance mise sur les situations non verbales. Mais il n'est pas indiqué non plus, surtout avec des enfants, d'enseigner une langue nouvelle en commençant par sa grammaire avant de leur enseigner des expressions et des mots. Les intentions que j'y expose n'étaient pas satisfaites par cette réalisation. Mais je savais déjà qu'il ne serait pas possible de réaliser la transition sans développer un corps spécifique de connaissances théoriques et expérimentales.

Le projet de concevoir un curriculum satisfaisant, de le faire essayer dans quelques classes puis de le développer directement dans l'enseignement réel me semblait dénoter une prétention extravagante et une incompétence incroyable. Il fallait acquérir des connaissances précises et reconnues des pratiques des enseignants. On ne pourrait essayer de les tirer que par des observations anthropologiques d'enseignants et d'apprentissages scolaires.

C'est probablement ce dont j'ai pu convaincre Lichnerowicz quand je lui ai présenté la maquette de ce livre.

II

Les suites

Les expérimentations et les ouvrages inspirés par ce canevas

A ma connaissance, une seule institutrice essaya sérieusement de réaliser cette suite d'exercices avec ses élèves, à l'instigation de son inspecteur et à mon insu. Un peu timide mais ferme, elle me révéla après coup qu'elle avait trouvé cette tâche intéressante mais tout à fait impossible. Très touché, surpris et surtout un peu confus, je lui avouai mon stratagème. Mais je l'assurai que ses efforts ne seraient pas vains et que nous essaierions de faire un véritable curriculum en appliquant ces idées. Je l'ai fait à deux reprises :

1. Le canevas de cet « ouvrage » fut explicité (cette fois) dans un projet de curriculum[7], réorganisé, commenté, rédigé, par ses quatre auteurs et mis en œuvre très librement par un groupe d'institutrices dirigées par Y. Lamoureux Inspectrice des écoles maternelles du Lot et Garonne et par sa conseillère pédagogique J. Marinières, sous la conduite attentive de Lucienne Félix. Celle-ci recueillit et rédigea l'essentiel des réalisations originales – parfois très éloignées du projet, mais très intéressantes - et des observations de ces institutrices[8]. Hachette publia le résultat de notre travail

2. Par la suite, un certain nombre d'idées présentes dans ce parcours schématique furent reprises au début des années 70 dans le cadre d'une recherche sur la dépendance entre les apprentissages. Je réalisai un nouveau curriculum que Gérard Deramecourt, professeur de Mathématiques à l'EN de Périgueux, étudia et fit réaliser dans trente classes de CP. Les enseignants avaient consenti à communiquer le nombre de réussite et d'échecs par classe (et non par élève) aux exercices proposés. Avec cet effectif misérable de 30 données par leçon, j'ai essayé d'observer la matrice triangulaire des interactions entre des situations de catégories différentes mais relatives à une même connaissance au cours d'une suite de situations d'actions, de communication, et d'explication. Sans espoir d'obtenir une réponse solide, une méthode statistique rustique a été improvisée sans réel fondement théorique : Nous avons observé des collections de couples de leçons de même type, par exemple « action- formulation », « formulation- explication », « explication- application »... Si le nombre de cases où le coefficient de corrélation était significatif (paraissait lui-même « invraisemblablement » grand ou petit), nous concluions à l'influence de l'antécédent sur l'ultérieur. Rien de probant évidemment (effectifs non paramétriques)... Il a fallu créer des instruments mathématiques appropriés (ce fut l'analyse implicative de R. Gras, dans les années 80). Nous avions

[7] G. Brousseau, L. Félix, Y. Lamoureux, J. Marinières « Première mathématique. Préparations et commentaires » Classiques Hachette 1972

[8] G. Brousseau, L. Félix, « Première mathématique. Mathématique et thèmes d'activité » Classiques Hachette 1972

alors des moyens d'analyses multifactorielles certainement plus convaincants, mais peu adaptés à nos types de données.

Toutes ces expériences n'étaient pas destinées à être développées vers les classes mais à nous permettre d'éprouver la possibilité d'obtenir des apprentissages avec le type de leçons envisagées. Les conclusions qui furent tirées de ces tentatives furent très utiles à la conception du COREM où devaient se dérouler des opérations beaucoup plus précises, ambitieuses et mieux cadrées. Revenons à ce texte et examinons de plus près ce qu'il y avait de provoquant et néanmoins de raisonnable, à la réflexion.

III

Notions de Didactique

A. Les premiers « phénomènes » de la future « théorie des situations »

a) *La notion de situation*

Elle est déjà clairement proposée comme l'élément essentiel de la relation didactique, même si elle est illustrée par toutes sortes d'exemples désordonnés. Elle explique et justifie pour l'observateur, la mise en œuvre par l'élève d'une action « originale » pour lui et qui est spécifique de cette connaissance. Il faut remarquer la particularité du regard porté sur cette action : la situation est spécifique d'une connaissance et indépendante à priori du sujet qui l'affronte. Le sujet dont il s'agit est un sujet épistémique muni des moyens de son âge et de ses conditions. La comparaison des rapports de ce sujet épistémique avec les résultats de sujets réels est un des objets directs des recherches expérimentales en Didactique des Mathématiques. A l'origine, la situation est ce qui appelle et justifie la libre action verbalisable ou non de l'élève, en dehors de toute coercition ou même de sollicitation verbale. Bientôt la notion de « situation » s'étendra à d'autres structures (techniques, sociales…) appropriées aux divers types d'interactions (descriptions, expressions, ou argumentations…) et d'interlocuteurs (concurrents, coopérants, enseignant etc.). Cette classification a pour objet de cerner et de justifier au plus près les possibilités d'actions des élèves et les conditions qui les rendent plus ou moins probables, correctes ou erronées. Cette classification des situations comme modèles pour la description et la prévision des évolutions des interactions didactiques ou cognitives a été présentée en 1970 à l'association des professeurs de Mathématiques de l'enseignement public qui le publiera en 1972[9]

b) Le domaine de meilleure efficacité d'une connaissance dans une classe de situations

Dès cette époque, on peut discerner les conclusions d'une réflexion sur les « ***niches*** » favorables à une « connaissance » déterminée. Les valeurs limites des variables d'une situation donnée déterminent une zone (peut être vide) dans laquelle cette connaissance a une efficacité meilleure que toute autre.

---

[9] G. Brousseau, Processus de mathématisation 428-442 et un exemple de processus de mathématisation : l'addition des naturels, 443-457, La mathématique à l'école élémentaire, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 1972, http://guy-brousseau.com/952/processus-de-mathematisation/

Par exemple, dans le comptage, zéro n'a pas de sens, et dans les mesures ou les dénombrements, 1 tout seul non plus, car pour « faire nombre » il faut être au moins deux ! Deux, trois, quatre sont des adjectifs qui distinguent directement des « formes » visuellement identifiables (jusqu'à sept, dans des circonstances favorables). Cette reconnaissance directe des nombres est apprise par les élèves sous des formes très différentes. Ils les recensent dans leur « dictionnaire » personnel (exemple page 37 pour le nombre 6)… il n'y a ni obligation, ni interdiction d'utiliser le comptage : le domaine de reconnaissance directe utilisé dans le livre est l'intervalle [1- 5].

Nous montrerons plus tard

- que certaines niches peuvent se constituer en obstacle épistémologique, psychologique ou didactique, en ce sens que la solution d'un problème, imparfaite mais commode dans un champ élémentaire et réduit, peut rendre plus difficile et moins efficient l'usage d'une conception plus satisfaisante et plus générale.
- qu'aucune situation n'est optimale dans toutes les valeurs de ses variables et donc qu'il existe des situations plus économiques dans des cas particuliers.
- Qu'aucune méthode didactique en mathématique n'est universellement et uniformément meilleure que toute autre dans toutes les situations concevables.
- La recherche de « la » meilleure méthode n'a pas de sens. L'objet de l'étude des situations est d'abord *d'**observer*** correctement, respectueusement, les actions d'enseignement, d'en ***comprendre*** les particularités et de déterminer les variables qui délimitent le champ de validité de ces actions, en ***concevant*** et en étudiant des choix alternatifs et en ***réalisant*** des projets valides, éprouvés, et adaptés.

c) Le saut de complexité

Cette séquence s'achève avec la page 33 où une nouvelle niche commence : les nombres peuvent être désignés par une somme aussi bien que leur nom canonique. Les élèves rencontrent des collections de 9 (p. 33), puis de 11 (p.34), sans avoir connu ni 7 ni 8. Le comptage direct ne peut dont pas être utilisé (officiellement), d'ailleurs il ne s'agit pas de compter mais de comparer par des correspondances terme à terme. Les quantités seront reconnues et définies, d'abord par correspondance avec une collection de référence, mais bientôt par des sommes (de la page 39 à la page 49, et finalement par leur place dans une comptine, ou par une mise en ordre dans des circuits fléchés (p. 35). Le dénombrement s'effectue alors sur la partition de l'ensemble en collections que l'on sait compter. Le résultat est une somme. Passer de 5 à 9 ou 11 constitue « un saut de complexité ». Ce saut dissuade implicitement les élèves de prolonger une technique de comptage hors de son domaine de meilleure efficacité (la reconnaissance directe) et justifie la recherche et l'utilisation d'une autre (une somme). La connaissance des propriétés des sommes est étudiée jusqu'à la p. 50 où est introduite une « devinette », prélude à une prochaine manipulation algébrique des nombres ! Le livre s'arrête avant que l'on aborde la niche de la multiplication par un saut très au-delà de 25… Mieux vaut ne pas aborder une nouvelle niche par ses bords, mais plutôt par son centre afin que la nouvelle technique soit réellement plus avantageuse par rapport à l'ancienne. Mais l'exploration des bords devra s'accomplir.

Le comptage n'est absolument pas exclu, il apparaît seulement progressivement comme un moyen « privé » pour le contrôle, si on sait s'en servir. L'apprentissage du comptage perd un peu de sa place officielle de moyen de référence, mais la pratique lui rend largement son compte, après coup. Le comptage garde sa valeur pour la dénomination par dénombrement, mais son prolongement au-delà de onze devient de plus en plus lourd et coûteux jusqu'à trente ou quarante, lorsque la lecture décimale réduira l'appellation des nombres. La prolifération des écritures d'un même nombre devient rapidement une difficulté Au-delà viendra la niche de la multiplication, celle de la dénomination décimale commencera dès 30…

d) Une définition moderne des prix comme classes d'équivalences

Les manières de réaliser les prix avec de la monnaie étaient, à cette époque, une autre connaissance basique pour les enfants, un peu plus complexe, pas à calculer mais à concevoir. Des friandises étaient vendues directement aux enfants en toutes petites quantités dans les bureaux de tabac : deux berlingots, trois caramels… Cette situation ne conviendrait plus du tout aujourd'hui où la monnaie matérielle ne joue plus qu'un rôle marginal. De toute façon, la vente directe des friandises aux enfants a heureusement disparu.

Les élèves avaient utilisé jusque là des boîtes pour faire des classifications, en particulier des classifications de quantités (le nombre était le nom de la boite). Ces boîtes reprennent ici leur fonction, mais ce sont les objets ou les lots de friandises *vendus* au même prix qui sont regroupés dans une même boite, sur laquelle figure cette fois non pas le nombre mais le prix de ces objets (de toute façon fictif, à cause des dévaluations). Un prix déterminait une classe d'objets interchangeables (tout à 1 centime, à 2 centimes à 5 centimes (ou francs) etc. La somme en liquide était un des objets de la boîte, équivalent aux autres, (mais non comestible). Le jeu consiste à échanger des lots, mais comment régler les échanges d'objets de prix différents ? Le rôle de la monnaie et de ses additions devait apparaître clairement pour régler les échanges en référence aux nombres écrits sur la boîte.

e) Concepts mathématiques divers

L'étude des « *équations* » se conclut (p. 50-55) par la recherche d'un nombre inconnu (caché dans un sac) appelé X. L'étude d'une *fonction* : La représentation de l'opération « ajouter 5 » (p. 58) introduit le graphe d'un objet mathématique. Ce dernier ne sera reconnu par les élèves comme « une fonction » que beaucoup plus tard. Les flèches de la page 59 représentent un ensemble d'images d'un même nombre par plusieurs fonctions. Ce genre de représentions avait un avenir moins grandiose. La page 61 préparait l'exploration directe de la numération de position et la relation d'ordre qui leur est associée

f) L'ordre des exercices, celui de la progression des idées

L'initiation à chacune des pratiques enseignées était soigneusement placée au moment où elle était à la fois utile et concevable avec ce qui avait été introduit préalablement.

B. Les premiers éléments de connaissances sur les situations

a) Les apprentissages scolaires classiques

Ces apprentissages combinent traditionnellement deux modèles :   a) D'abord l'apprentissage des connaissances par celui de **textes** convenus qui les expriment (l'enseignement est un projet social qui s'exprime et se communique par des textes). Ces textes servent de modèles généraux et de

justification pour des comportements particuliers visés dans des circonstances indéterminées b) Ensuite, l'apprentissage direct de **comportements** par la fréquentation répétée de certaines conditions déterminées, volontairement ou non.
Avec toutefois une restriction : le second (l'enseignement des comportements) n'est légitime que s'il respecte le premier (l'enseignement de leur raison d'être) : il ne doit provoquer que des comportements conformes aux textes.
L'organisation standard des textes mathématiques respecte cette règle car elle vise seulement à communiquer l'information « suffisante » et minimale et la possibilité de contrôle de la validité. Les *définitions* précèdent les énoncés des *théorèmes* qui précisent les conditions de leur validité, lesquels précèdent les *preuves*. Le seul moyen de combattre l'insuffisance de *l'information* est une information supplémentaire, une expansion de la démonstration.
L'enseignement classique des mathématiques consiste à exposer les théorèmes principaux et à faire établir par les élèves eux-mêmes des théorèmes mineurs et similaires. Autrement dit, à faire utiliser l'objet de l'enseignement de façon répétée. Mais l'usage répété ne porte pas et n'évoque pas vraiment la raison d'être de la connaissance enseignée : la pratique mathématique qui est donnée à voir dissimule sa raison d'être mathématique et n'en laisse rien percevoir par les élèves.
Ainsi les deux modèles se fondent souvent dans une pratique behaviouriste de l'apprentissage par l'enseignement du texte convenu ! Le texte est enseigné et appris comme une condition nécessaire et suffisante de l'apprentissage visé. Or ceux qui produisent les textes de mathématiques ne le font pas de cette manière : les textes sont les conclusions de leur travail et non pas ses prolégomènes. Ainsi la pratique des mathématiques elle-même suit des processus tout différents.
Quelque chose manque irrémédiablement à cette conception classique : elle néglige la condition essentielle et spécifique du rapport d'un sujet vivant avec une connaissance nouvelle pour lui. Pour étayer cette déclaration singulière, il faut créer, montrer l'existence de conditions d'apprentissages et d'enseignement différentes.

b) Le développement psycho-cognitif et l'apprentissage de la langue maternelle ne suivent pas ce schéma. Avant et dominant le verbe, il existe une pensée en devenir, différente, qui se manifeste essentiellement par des actes et qui évolue différemment au gré des interactions du sujet avec ses congénères et avec les milieux où il vit. Le modèle behaviouriste fait alors place à un modèle plus complexe et plus souple : conditions, intentions, actions, effets sur le milieu, adaptation… et l'éducateur est suppléé par un ensemble de conditions et d'acteurs divers, un milieu auquel l'enfant doit s'adapter. Or le texte traditionnel va perdre sa légitimité et être très profondément modifié, alors que le nouveau texte n'est porté que par une poignée d'individus. La constitution, la diffusion et l'acceptation d'un nouveau « texte de base » va être un processus long et hasardeux. Or, les nouveaux concepts fondamentaux semblent être justement le prolongement de ceux que l'enfant élabore spontanément au cours de son développement.

c) Apprendre les mathématiques directement comme un Langage d'usage ?

Pourquoi alors ne pas éviter, quand cela se justifie, le détour par le texte et par le discours de l'enseignement traditionnel en introduisant directement l'usage des concepts et du langage mathématique, sans passer par l'enseignement traditionnel du métalangage classique et par des méthodes stéréotypées qui ne tiennent pas compte de la spécificité de chaque savoir ?
Le langage mathématique est celui qui permet le mieux d'exprimer certains objets et certaines relations. Mais les enfants sont capables d'investir directement certaines situations sans le détour

par la culture et par la description linguistique. Les dispositifs expérimentaux de Piaget révèlent les connaissances de nature logicomathématique développées spontanément par les enfants. Des dispositifs du même genre ne seraient-ils pas capables de faire évoluer ces connaissances et ainsi leur en faire acquérir de nouvelles, sans « leçons classiques » ? Pourrait-on aller jusqu'à se priver du discours mathématique, c'est-à-dire de la combinaison de langage mathématique formel et de son métalangage éducatif, et enseigner directement l'usage du langage mathématique, ou au moins ses expressions principales ?
Tel est, dépouillé de ses perversions verbales, le défi proposé par ce petit livre. La sécheresse de ce schéma est adoucie par quelques procédés rhétoriques *implicites* : des gestes, des exemples, des comparaisons, des représentations (métaphores et métonymies).

d) Les conditions limites d'une expérience en pédagogie des mathématiques

Les conditions de la réalisation d'un tel programme sortaient évidemment de mes connaissances de l'époque. Mais je me suis attaché pendant plus de quarante ans à démontrer la nécessité théorique et la possibilité concrète des conditions initiales. L'évolution des sociétés et de l'économie n'a pas permis à cette voie de recherche pourtant bien vivante de réaliser les conditions suffisantes. Aujourd'hui, la formation à la Didactique se confond à l'Université avec la formation des professeurs, d'où **l'observation anthropologique et expérimentale des communautés didactiques** a disparu, et a fortiori l'étude des connaissances et moyens de recherche sur l'observation scientifique des enseignements.

Les seuls responsables légitimes de la Science Didactique sont, en dernier ressort, les communautés de mathématiciens. Leur désengagement dans les années 80 l'a placée presque partout entre des mains totalement illégitimes, quelle que soit la bonne volonté et la compétence personnelle des intéressés.

L'enseignement est aujourd'hui placé sous le contrôle d'innocents statisticiens qui laissent croire que les informations statistiques qu'ils établissent et diffusent inconsidérément pourraient entrer utilement dans les systèmes de décision contrôlant l'enseignement ! Cette pratique viole et fait violer allègrement toutes les conditions éthiques et déontologiques des sociétés humaines.

Pour en finir avec ces commentaires un peu erratiques…

Rapprocher ainsi brutalement l'évocation de mes débuts modestes et maladroits avec un problème inaperçu mais lancinant que nos grandes sociétés mercantiles rencontrent en les ignorant, apparaîtra à certains comme une idée absurde et grandiloquente. Mais je ne puis faire autrement que confier mes confettis aux vents capricieux de la toile.

Guy Brousseau   Juillet 2015

******